С. И. Туманов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

Пособие для самообразования

ПРОСВЕЩЕНИЕ • 1970

С. И. ТУМАНОВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПРОСВЕЩЕНИЕ»
Москва 1970

512
Т83

Туманов С. И.

Т-83 Элементарная алгебра. Пособие для самообразования. Изд. 3-е, переработ. и доп. М., «Просвещение», 1970.

864 с. с илл.

Книга написана так, что по ней можно изучать предмет без преподавателя. Кроме курса алгебры и теории тригонометрических функций, в книге изложены сведения о производной, дифференциале, интеграле, элементарной теории множеств, позиционной системе счисления, даны расширение понятия числа и краткие сведения о возникновении и развитии математических наук. Имеются примеры и задачи как решенные, так и предназначенные для упражнений. Настоящее третье издание дополнено начальными сведениями из теории вероятностей.

2-2-2
70

512

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее третье издание, по сравнению с предыдущим, внесены следующие изменения.

Переработаны: введение — «Учащимся о математике» и тема «Что такое алгебра». Первые приложения преобразований к решению задач перенесены несколько вперед. Расширено понятие пропорциональности (прямой и обратной). Показана идея деления многочленов методом неопределенных коэффициентов. Глава «Обратные тригонометрические функции» дополнена темой «Взаимно обратные функции и связь между их графиками». Показано, как с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим легко решаются многие трудные задачи.

Включена новая глава — «Начальные сведения из теории вероятностей». Начала анализа дополнены техникой дифференцирования сложных функций и применением интегрирования к вычислению объемов. Несколько расширены применения производной к исследованию функций на экстремум и построению их графиков. Несколько дополнены сведения о мощности бесконечных множеств. Включены новые задачи, предназначенные усилить интерес учащихся к математике.

Исключен раздел «Об аксиоматическом методе в математике».

При написании темы «Начальные сведения из теории вероятностей» автор пользовался советами и материалами, предоставленными доцентом В. Е. Гмурманом, за что автор приносит ему искреннюю благодарность.

Автор

УЧАЩИМСЯ О МАТЕМАТИКЕ

1. МАТЕМАТИКА И ЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

В обычный школьный курс математики входят следующие математические предметы: арифметика, элементарная алгебра, элементарная геометрия и тригонометрия. Содержание этих четырех предметов в основном соответствует тому уровню математических познаний, который был достигнут человечеством к началу XVII века. Математические же познания, достигнутые в последующее время, изучаются в соответствующих высших учебных заведениях и научных институтах.

Арифметика, элементарная алгебра, элементарная геометрия и тригонометрия относятся к так называемой «элементарной математике». Математические же дисциплины, изучаемые в высших учебных заведениях, относятся к высшей математике.

Однако современный школьный курс математики не изолирован от идей высшей математики. Например, в нем имеются сведения о функциях, пределах, координатах, графическом методе и даже производной, т. е. сведения, относящиеся к началам высшей математики.

Математика, так же как и другие науки, возникла, становилась и развивается на основе производственно-практической деятельности людей. Так, начала арифметики и геометрии возникли в связи с самыми простейшими запросами хозяйственной жизни. Счет предметов, потребность измерять количество продуктов и производить расчеты при их обмене, знать протяженность дорог, площади земельных участков, размеры и вместимость сосудов, исчислять время — все это и приводило к возникновению и развитию первоначальных понятий арифметики и геометрии. Вопросы астрономии привели к появлению зачатков тригонометрии еще в Вавилонии (Месопотамия) за много веков до нашей эры.

Слово «математика» происходит от греческого слова μαϑημα, что означает «познание», «наука».

Содержание и происхождение математики как науки точно и полно характеризуется следующими словами Энгельса: «Чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть —

весьма реальный материал. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне как нечто безразличное; таким путем мы получаем точки, лишенные измерений, линии, лишенные толщины и ширины, разные a и b, x и y, постоянные и переменные величины... Как и все другие науки, математика возникла из *практических потребностей* людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики». (Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, М., Госполитиздат, 1966, стр. 33.)

Глубина и богатство этого классического определения будут раскрываться перед учащимся все полнее по мере расширения его математических познаний.

Остановимся сначала на том, что математика есть наука о количественных отношениях.

Для определения объемов некоторых тел или площадей некоторых плоских фигур бывает необходимым вычислять суммы, подобные следующей:

$$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 4+\ldots+997\cdot 997+998\cdot 998+$$
$$+999\cdot 999+1000\cdot 1000.$$

В этой сумме 1000 слагаемых, хотя явно выписанных слагаемых только восемь. Остальные слагаемые подразумеваются под многоточием. Так, например, после слагаемого $4\cdot 4$ следует слагаемое $5\cdot 5$, после $5\cdot 5$ следует $6\cdot 6$ и т. д., перед слагаемым $997\cdot 997$ подразумевается $996\cdot 996$, перед $996\cdot 996$ подразумевается $995\cdot 995$ и т. д. Употреблять здесь многоточие не только целесообразно, но даже необходимо, так как выписывать все 1000 слагаемых было бы крайне утомительно и такая запись заняла бы не одну страницу.

Если предложенную сумму вычислять непосредственно, то придется выполнить 1000 раз умножение, а затем сложить тысячу полученных произведений. На все это одному вычислителю потребовалось бы не менее 20 часов. Между тем если воспользоваться соответствующим математическим законом (стр. 408), то за одну минуту можно обнаружить, что искомая сумма равна 333 833 500. Это число есть значение выражения

$$\frac{1000\cdot 1001\cdot 2001}{6}.$$

По какому же закону написано это выражение?

Первый множитель в числителе, а именно число 1000, есть число слагаемых в данной сумме; второй множитель есть число, на единицу большее числа слагаемых; третий множитель есть сумма первых двух. Знаменатель же не зависит от числа слагаемых (он всегда равен 6).

Проверьте этот закон на примере

$$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3+4\cdot 4+5\cdot 5+6\cdot 6+7\cdot 7=\frac{7\cdot 8\cdot 15}{6}.$$

В качестве других количественных отношений, изучаемых с помощью математики, приведем, например, взаимосвязь между атмосферным давлением и высотой над уровнем моря или, скажем, количественные отношения между силой притяжения двух тел друг к другу, массами этих тел и расстоянием между их центрами тяжести.

Теперь приведем для иллюстрации примеры применения математики к изучению пространственных форм.

С помощью математики определяются орбиты планет, движущихся вокруг Солнца.

С помощью математики определяются площади поверхностей и объемы тел любой формы, длины кривых линий, изучается кривизна таких линий и кривизна кривых поверхностей и т. д. и т. п.

Без математики и ее методов нельзя изучить достаточно полно физику, механику, электротехнику, радиотехнику и прочие инженерные науки. Математика нужна при проектировании сколько-нибудь сложных сооружений. Начала арифметики нужны каждому человеку, а элементарные знания по геометрии и умение пользоваться буквенными формулами и графиками необходимы каждому квалифицированному рабочему и служащему. В целом же математика, как и всякая другая наука, является одним из средств познания закономерностей окружающего мира и раскрытия путей использования этих закономерностей в практической деятельности людей.

Но математика изучает не все содержание окружающих нас предметов и явлений. Например, с помощью только одной математики нельзя определить химический состав воды или изучить процессы, происходящие в живом организме. Математика изучает лишь количественные отношения и пространственные формы предметов и явлений. Другие же стороны явлений изучают иные науки (физика, химия, аэродинамика, радиотехника и т. д.). Сложные технические вопросы разрешаются совместными усилиями ученых и практиков различных специальностей, т. е. путем применения не одной науки, а одновременно нескольких соответствующих наук. Поэтому, зная только математику, нельзя построить, например, мост через Волгу. Вместе с тем такой мост нельзя построить и без математических расчетов. Следовательно, для сооружения крупного моста математические знания являются необходимыми, но не достаточными. Кроме математики, нужны еще строительная механика, материаловедение и многое другое.

Из сказанного выше ясно, что математика, выделяя количественные отношения и пространственные формы, оставляет в стороне все остальное, не являющееся предметом математического исследования. Например, изучая свойства шара, математика не интересуется ни его цветом, ни материалом, из которого он сделан. Изучая свойства чисел и правила действия над ними, математика оставляет в стороне конкретные величины и формулирует полученные результаты независимо от того, что этими числами выражено. Наряду с этим математика отличается еще и той особенностью, что все объекты, ею изучаемые, мыслятся абсолютно точными, идеальными. Поясним, что это значит.

Никакое физическое шарообразное тело (например, мяч, глобус или игрушечный воздушный шар) не может иметь абсолютно гладкую или, точнее говоря, идеально шаровую поверхность. Шарообразные же формы, изучаемые в математике, мыслятся абсолютно точными, имеющими абсолютно гладкую, идеальную шаровую поверхность.

Всякая линия, начерченная тушью или проведенная карандашом, имеет ширину и толщину. Линии же, изучаемые в математике, мыслятся имеющими только длину и не обладающими ни шириной, ни толщиной.

Всякая точка, изображенная тушью или карандашом, имеет какие-то размеры (длину, ширину и толщину). Все же без исключения размеры математической точки мыслятся равными нулю.

Никакой треугольник, вырезанный из дерева, картона или металла, либо просто изображенный на чертеже, не может иметь идеально прямой угол, идеально прямолинейные края или границы. Длину сторон такого треугольника никогда нельзя определить абсолютно точно *. Треугольники же, изучаемые в математике, мыслятся идеальными, т. е. имеющими абсолютно точную прямолинейность сторон, абсолютно точные углы, абсолютно точную длину сторон и т. д.

Особенность математики изучать количественные отношения и пространственные формы изолированно от всего прочего и при этом в их идеальном виде является основным условием существования математической науки и ее силой. Без этой особенности математика как наука не существовала бы. Поясним сказанное.

Еще за две тысячи лет до нашей эры египетские землемеры пользовались для построения прямых углов веревочным треугольником со сторонами 3, 4 и 5. (Очевидно, что $5\cdot5=3\cdot3+4\cdot4$.)

---

* Никакую величину нельзя практически измерить с абсолютной точностью; ее можно измерить только приближенно с той или иной степенью точности, которая зависит от измерительных приборов. Если же под измерением понимать счет конечного числа предметов, то такое измерение выполнимо точно.

Были известны и другие прямоугольные треугольники, стороны которых выражались целыми числами, например 5, 12, 13. Но этот замеченный факт тогда не могли еще обоснованно обобщить. И только в VI веке до нашей эры Пифагор доказал, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе любого прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах. Но Пифагор сумел прийти к этому открытию только потому, что он отвлекся от физических треугольных форм и стал рассматривать треугольник математический, воображаемый, идеальный, т. е. такой, в котором прямолинейность сторон, прямой угол и длина сторон мыслятся абсолютно точными. При этом его исследования и суждения относились не к отдельному треугольнику, а ко всему множеству прямоугольных треугольников.

Такой метод исследования геометрических форм появился далеко не сразу, а лишь в результате длительной работы многих предшественников Пифагора и самого Пифагора. Надо было от египетских веревок и от намеченных вехами или заборами границ земельных участков перейти к отвлеченному понятию линии, в частности прямой линии, не имеющей ни ширины, ни толщины. Надо было установить добытые практикой первоначальные геометрические истины (аксиомы), установить признаки равенства треугольников, научиться определять площадь треугольника и т. д. и т. п.

Если бы мы отказались пользоваться таким методом исследования пространственных форм, тогда геометрия как наука не могла бы существовать. В самом деле, изучая только веревочные треугольники и другие веревочные фигуры, мы обнаружили бы лишь отдельные случайные факты и не смогли бы из них сделать далеко идущие выводы общего порядка. Мы не сумели бы, например, установить сколько-нибудь полно взаимосвязь между сторонами и углами треугольника, между его площадью и сторонами и т. д.

Первоначальным источником всякого познания являются наши чувственные восприятия, получаемые из опыта, из наблюдений. Но данные, полученные из опыта, из наблюдений — это лишь первый шаг познания. Вторым его шагом является обобщение этих данных и их логическая обработка, т. е. создание теории. Но теория имеет значение только тогда, когда она применяется на практике. Поэтому третьим шагом познания является применение теории к практике, а вместе с тем и проверка на практике выводов теории.

Таким образом, **всякое познание вырастает только из практики человеческого общества.** (Здесь слово «практика» понимается в самом широком смысле. Под практикой понимается опыт, наблюдения, производство, техника, наука, искусство и культура.)

Математические теории имеют огромную ценность, так как без них невозможно решение крупных практических проблем *, связанных с техникой, производством и строительством, и теоретических проблем во многих других науках (механике, физике, аэродинамике, гидродинамике, радиолокации и т. д.).

Когда мы мысленно отвлекаемся от всего прочего содержания явления или предмета и изучаем только какую-нибудь одну существенную его сторону, например форму предмета или количественные отношения между его элементами, то говорят, что мы изучаем эту сторону явления или предмета абстрактно. Таким образом, математика есть наука абстрактная. Слово «абстракция» происходит от латинского слова «abstractio», что означает «отвлечение».

Поясним сказанное на примере.

Пусть предметом нашего изучения служит шар. Отвлекаясь от многих свойств шара (его цвета, материала, из которого он сделан, его веса и т. д.), выделим мысленно только одно его свойство: иметь объем. Но свойством иметь объем обладают и другие тела. Поэтому возникает такая задача: «Найти общий метод вычисления объемов тел любой формы, а не только шара». Силой абстракции такой общий метод в математике уже создан.

Абстрактное мышление есть более высокая ступень отражения в нашем сознании закономерностей и связей объективного мира, нежели живое созерцание или чувственные восприятия. Например, мы не слышим и не видим непрестанно распространяющиеся вокруг нас радиоволны. Несмотря на это, в ходе практической деятельности людей при помощи абстрактного мышления это явление познано и изучено настолько глубоко, что получило в руках людей широчайшее практическое применение (радиоприемники, телевизоры, радиолокационные приборы и т. д.).

Чувственным восприятием нельзя охватить движение со скоростью света, а абстрактному мышлению оно доступно. С помощью созерцания или чувственного восприятия мы не можем видеть ту закономерную зависимость, которая объективно существует между площадью и длинами сторон треугольника. С помощью же абстрактного мышления на базе уже ранее добытых практикой и теорией познаний мы эту зависимость в состоянии обнаружить. Таким образом, благодаря абстракции мы овладеваем правилом, позволяющим определять точно площадь треугольника по заданной длине его сторон.

Роль абстракции велика не только для познания окружающей нас природы, не только для построения математических и дру-

* Проблема — это сложный практический или теоретический вопрос, подлежащий изучению, исследованию и разрешению. Слово «проблема» происходит от греческого слова «πρόβλημα», что означает «задача». Буквальный перевод этого греческого слова — «нечто, брошенное вперед».

гих естественнонаучных теорий. Она не в меньшей мере велика и для познания сущности явлений и законов развития общества. Приведем хотя бы один пример.

Цена товара и его стоимость представляют собой совершенно различные понятия. Цены товаров на капиталистическом рынке колеблются в зависимости от спроса и предложения. Когда спрос на товары превышает их предложение, цены поднимаются и, наоборот, уменьшение спроса ведет к понижению цен. Не зная, что такое стоимость товара, можно подумать, что цена товара и есть его стоимость. В действительности же это совершенно неверно. Стоимость не зависит от спроса и предложения. Стоимость товара определяется количеством затраченного на его производство общественно необходимого труда.

В том случае, когда спрос и предложение находятся в равновесии, цена товара представляет собой денежное выражение стоимости. Однако такой идеальный случай на капиталистическом рынке никогда не может иметь места в силу анархии капиталистического способа производства. Стоимость есть важнейшая экономическая категория, хотя и не вечная. Особенно важное значение понятие стоимости имеет для анализа общественных отношений при капитализме. Сущность этих общественных отношений невозможно познать глубоко без понятия стоимости. Но понятие стоимости не могло бы возникнуть без абстракции. К. Маркс вывел его именно путем абстракции. Вот что он говорит по этому поводу: «...при анализе экономических форм нельзя пользоваться ни микроскопом, ни химическими реактивами. То и другое должна заменить сила абстракции» (К. Маркс, Капитал, т. 1, предисловие к первому изданию).

История дает множество примеров предвидения с помощью научной абстракции. В. И. Ленин в своем произведении «Что такое «друзья народа» и как они воюют против социал-демократов?», написанном им еще в 1894 году (В. И. Ленин, Сочинения, т. 1, 1958) на основе научной революционной теории предвидел неизбежность социалистической революции в России. Гениальность этого величайшего предвидения В. И. Ленина подтвердила Великая Октябрьская социалистическая революция.

Д. И. Менделеев на основе открытого им периодического закона предсказал свойства трех еще не открытых химических элементов. Вскоре после этого (с 1875 до 1886г.) все эти три элемента были открыты. Предсказанные Д. И. Менделеевым свойства этих элементов подтвердились с большой точностью.

Изучая неправильность в движении Урана, французский астроном Леверье с помощью вычислений установил существование за пределами орбиты Урана другой, еще никому не известной планеты. Леверье указал момент времени и место на небесном своде, где должна была находиться эта планета. Точно в указанный момент времени и точно в указанном им месте была действительно обнаружена берлинским астрономом Галле в сентябре 1846 года неизвестная планета (позже названная Нептуном).

В заключение приведем замечательное высказывание В. И. Ленина о значимости абстракции. «Абстракция *материи, закона* природы, абстракция *стоимости* и т. д., одним словом *все* научные (правильные, серьезные, не вздорные) абстракции отражают природу глубже, вернее, *полнее*» (В. И. Ленин. Полн. собр. соч., изд. 5, М., Госполитиздат, т. 29, 1963, стр. 152).

Возвращаясь к математике, заметим, что абстракция в математике, так же как и во всякой другой науке *, не означает отрыва науки от материальной действительности. Например, запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется именно в неразрывной связи с запросами производства, техники и естествознания.

Запросы производства и техники приводят к рождению в математике новых идей, новых методов. Усилиями ученых эти идеи и методы теоретически развиваются, обобщаются и после этого в свою очередь становятся на службу дальнейшему прогрессу техники и производства. Между техникой и наукой (в частности, математикой) происходит непрестанное чередующееся взаимодействие. Практика двигает вперед науку, наука двигает вперед практику.

Например, созданная промышленностью сложная аппаратура обеспечила физикам возможность проведения таких экспериментов, которые после теоретической обработки привели к открытию атомной энергии. В свою очередь физика атома сыграла огромную роль для дальнейшего развития техники. Например, современная металлургия, создающая новые сплавы с заданными свойствами, была бы немыслимой без исследования атомной структуры кристаллов.

Чередующееся взаимодействие наблюдается не только между практикой и наукой, но и между самими науками. Например, новые задачи, возникавшие в физике при изучении колебательных процессов, повлияли на развитие в математике теории дифференциальных уравнений. Достижения же по теории дифференциальных уравнений становились реальным орудием для разрешения в физике вопросов по теории колебаний, не только раньше возникших, но и более сложных, новых.

Новые методы и идеи в математике возникают не только из потребностей производства или других наук, но и из внутренних проблем самой математики (например, геометрия Лобачевского, теория функций комплексного переменного и многое другое).

Созданное великим Лобачевским в первой половине XIX века новое, более широкое понимание предмета геометрии привело в конце XIX и начале XX века к перестройке всей системы математических знаний. То более широкое понятие пространства,

---

* Без абстракции не может существовать и развиваться никакая наука.

которое возникло в геометрии Лобачевского, в дальнейшем оказалось тесно связанным с развитием физики, в первую очередь теории относительности (начало этой теории положено Эйнштейном). Взаимосвязь, установленная в этой теории между массой и энергией, явилась основой всего учения об атомной энергии.

Вся история развития наук ярко свидетельствует о том, что обогащение математики, физики, химии, астрономии и других областей естествознания происходило в тесной взаимосвязи, в условиях взаимного воздействия достижений одних наук на успехи в других.

2. О возникающих у учащихся ошибочных взглядах на математику

В заключение сделаем еще несколько замечаний с целью помочь учащемуся правильно определить свое отношение к математике.

Еще до сих пор среди части учащихся существует представление об алгебре и математике вообще как о науке сухой, скучной, как бы уже полностью законченной и застывшей, как о науке, оторванной от жизни. Такое представление является совершенно неправильным, ошибочным, основанным на незнании сути дела. Напротив, математика есть живая, непрестанно развивающаяся наука, теснейшим образом связанная с жизнью, с практической деятельностью людей. Ежегодно издаются тысячи работ по математике, в которых ставятся и решаются все новые и новые теоретические и практические задачи.

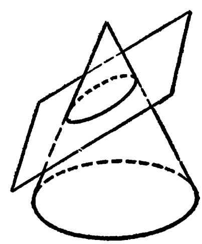


Рис. 1.

Особенно замечательно, что даже самые абстрактные математические теории, возникшие из внутренних потребностей самой математики, без непосредственных толчков со стороны естествознания и техники, находят тем не менее плодотворные применения. Чтобы подтвердить это, приведем несколько примеров, исторических и близких к современности.

1. Древнегреческие математики изучали свойства эллипса (эллипс — замкнутая линия, возникшая как сечение конической поверхности плоскостью, рис. 1), а спустя более тысячи лет Кеплер использовал их идеи для определения траекторий планет.

2. В 1858 году через Атлантический океан был проложен первый телеграфный кабель. Оказалось, что один сигнал (точка или тире) передавался по этому кабелю в виде множества путаных знаков, исключавшего возможность что-либо разобрать.

Казалось, что огромные средства и труд, затраченные на сооружение кабеля, пропали безвозвратно. И вот выдающийся английский физик Уильям Томсон делает из математической теории теплопроводности, созданной знаменитым французским математиком Фурье еще в 1808 году и английским математиком Грином в 1828 году, такие практические выводы, при помощи которых удается фактически бездействующий кабель превратить в кабель, работающий совершенно нормально.

3. Математическая теория Пуассона о равновесии компасной стрелки на протяжении целых 40 лет не находила практического применения. Между тем из-за погрешностей в показаниях компаса корабли нередко терпели аварии. И только после того как в 1862 году на протяжении лишь одного месяца у берегов Ирландии из-за неправильных показаний компаса погибли два океанских парохода, ученые и специалисты обратились к теории Пуассона. На базе этой теории были разработаны практические способы устра-

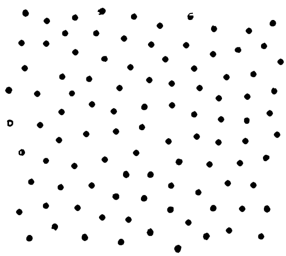


Рис. 2.

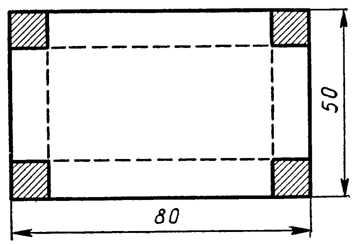


Рис. 3.

нения погрешностей в показаниях морских компасов. Таким образом математическая теория Пуассона помогла повысить безопасность мореплавания.

4. Мнимые числа появились на свет в алгебре, и долгое время их реальный смысл оставался непонятным. Однако после того как была создана из чисто математических интересов абстрактная теория функций комплексного переменного, или, выражаясь доступно, теория «мнимых функций», оказалось, что эта теория является реальным средством решения задач естествознания и техники. Так, основная теорема Н. Е. Жуковского о подъемной силе крыла самолета доказывается как раз средствами этой теории.

5. Теории, разработанные для расчета движения планет под действием притяжения к Солнцу и между собой, оказались применимыми к решению вопросов, связанных с волновой качкой корабля.

Теория качки корабля при любом волнении создана впервые выдающимся русским ученым академиком А. Н. Крыловым. Путем труднейших математических исследований и расчетов им определены усилия, возникающие в различных частях корабля при его качке.

6. Английский физик Максвелл с помощью чисто математических исследований вывел, что могут существовать электромаг-

нитные волны и что они должны распространяться со скоростью света. Этот вывод Максвелла толкнул на поиски электромагнитных волн чисто электрического происхождения. Такие волны были открыты Герцем. А вскоре А. С. Попов нашел средства возбуждения, передачи и приема электромагнитных колебаний и положил тем самым начало всей радиотехнике.

Таких примеров можно было бы привести еще очень много.

Но надо заметить, что все современные математические теории, имеющие важные приложения в естествознании и технике, связаны с высшей математикой, связаны так или иначе с дифференциальным и интегральным исчислениями. Но это обстоятельство не умаляет значения самой элементарной математики. Во-первых, элементарная математика является основой всех математических дисциплин (операции, производимые в этих дисциплинах, неразрывно связаны с операциями элементарной математики). Во-вторых, имеется немало и таких практических и теоретических задач, для решения которых достаточны лишь средства элементарной математики. Для иллюстрации приведем несколько таких задач. (Решения этих задач мы здесь не приводим и не предлагаем их решать учащемуся. Мы хотим лишь убедить учащегося в том, что даже с помощью только одной элементарной математики можно решить множество интересных задач.)

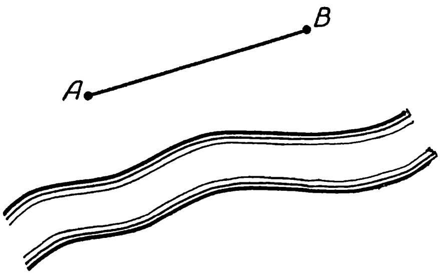


Рис. 4.

Задача 1. Путем наблюдения с берега моря определить скорость корабля (движущегося прямолинейно и равномерно).

Задача 2. На плоскости расположены произвольным образом 100 точек. Найти центр и радиус наименьшего круга, охватывающего собой все эти точки (рис. 2).

Задача 3. Дан прямоугольный лист железа размерами 80×50 *см* (рис. 3). Требуется вырезать около всех его углов одинаковые квадраты так, чтобы после загибания остающихся кромок получилась открытая сверху коробка наибольшей вместимости.

Задача 4. Не переходя реки, определить расстояние между пунктами A и B, расположенными за рекой (рис. 4).

Задача 5. Доказать, что во всяком выпуклом многограннике сумма числа вершин и числа граней всегда на две единицы больше, чем число ребер (теорема Эйлера о многогранниках). Приведем иллюстрацию. В кубе (рис. 5) 8 вершин, 6 граней и 12 ребер. Сумма чисел 8 и 6 действительно на 2 больше, чем 12.

В пятиугольной пирамиде (рис. 6) 6 вершин, 6 граней и 10 ребер. Сумма чисел 6 и 6 действительно на 2 больше, чем 10.

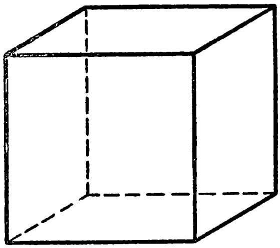


Рис. 5.

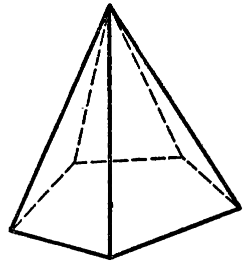


Рис. 6.

Задача 6. Доказать, что любое натуральное число есть сумма не более чем четырех квадратов. Например:

$$15 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2;$$
$$30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1^2 + 2^2 + 5^2;$$
$$74 = 1^2 + 1^2 + 6^2 + 6^2 = 1^2 + 3^2 + 8^2 = 3^2 + 4^2 + 7^2 = 5^2 + 7^2;$$
$$100 = 1^2 + 1^2 + 7^2 + 7^2 = 1^2 + 3^2 + 3^2 + 9^2 = 1^2 + 5^2 + 5^2 + 7^2 = $$
$$= 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2;$$
$$555 = 1^2 + 7^2 + 12^2 + 19^2 = 1^2 + 5^2 + 23^2.$$

Задача 7. Доказать, что сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n}$$

при достаточно большом значении целого положительного числа n может стать более любого числа, например более миллиарда, а сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

будет оставаться меньше 2, сколь большим ни брали бы мы число n.

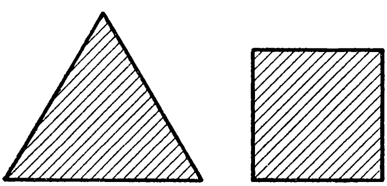


Рис. 7.

Задача 8. Разрезать равносторонний треугольник прямолинейными разрезами на 5 таких частей, из которых можно было бы составить квадрат, равновеликий этому равностороннему треугольнику (рис. 7).

Математические решения задач о превращении одних фигур с помощью прямолинейных разрезов в другие, им равновеликие, применяются на практике в целях наиболее экономной раскройки промышленных материалов (листового железа, кожи и других материалов).

В конце книги в приложении указана литература, в которой можно найти решения этих восьми задач. Разумеется, изучать эти решения удобнее после приобретения соответствующих знаний по алгебре, геометрии и тригонометрии.

Существует еще одно не совсем правильное представление о математике, а именно: часто считают, что для понимания и изучения математики требуются какие-то особые способности. В действительности это неверно. По совершенно справедливому мнению академика А. Н. Колмогорова, «обычные средние человеческие способности вполне достаточны, чтобы при хорошем руководстве или по хорошим книгам не только сознательно усвоить математические знания, преподающиеся в средней школе, но и разобраться, например, в началах дифференциального и интегрального исчислений» (А. Н. Колмогоров, О профессии математика, «Советская наука», 1954). Изучить основы математики не труднее, чем основы какой-либо другой науки. В этом каждый может убедиться сам, если только станет приобретать математические знания шаг за шагом, соблюдая строгую последовательность в усвоении материала.

Мы сами являемся свидетелями того, как ежегодно десятки тысяч молодых людей, не ставивших себе задачу стать математиками, все же достаточно хорошо овладевают основами математики и становятся квалифицированными инженерами, техниками, агрономами или руководителями крупных предприятий.

Математика и свойственный ей стиль мышления представляют собой существенный элемент общей культуры современного человека, даже если он не занимается деятельностью в области точных наук или техники.

3. Об инициативном подходе к изучению математики

К изучению или решению всякого заслуживающего внимания вопроса надо подходить инициативно. Поясним это на простых примерах.

Пример 1. Пусть требуется вычислить сумму всех целых чисел от 1 до 1000, т. е. следующую сумму:

$$1+2+3+4+5+\ldots+996+997+998+999+1000.$$

Вычислять эту сумму путем последовательного прибавления каждого последующего слагаемого очень неудобно, так как на это потребуется много времени. Поэтому должна возникнуть мысль о том, нельзя ли определить эту сумму каким-нибудь косвенным рациональным способом.

Проявив наблюдательность, можно заметить, что: сумма двух крайних слагаемых равна 1001; сумма второго слагаемого и предпоследнего тоже равна 1001; сумма третьего слагаемого от начала и третьего от конца опять равна 1001 и т. д.

Легко видеть, что таких пар слагаемых будет 500. Следовательно, вся сумма равна произведению

$$1001\cdot 500,$$

т. е. равна 500500.

Пример 2. На прямой линии (рис. 8) найти такую точку, чтобы сумма ее расстояний до двух точек A и B, лежащих по одну сторону этой прямой, была бы наименьшей.

Выбор местоположения искомой точки на глаз не может гарантировать нам точность ответа. Находить положение искомой точки путем проб и измерений невозможно, так как такие пробы исчерпать нельзя. Значит, для решения поставленной задачи надо искать какое-то логическое суждение.

Нетрудно заметить, что путь по ломаной линии AOB будет такой же, как и по ломаной линии AOC, где точка C есть точка, симметричная точке B относительно данной прямой. Но путь AOC будет самым коротким, если линия AOC окажется не ломаной, а прямой. Значит, искомая точка должна находиться на пересечении данной прямой с прямой, соединяющей точку A с точкой C, которая расположена симметрично точке B относительно данной прямой (рис. 9).

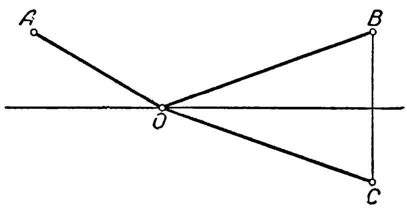


Рис. 8.

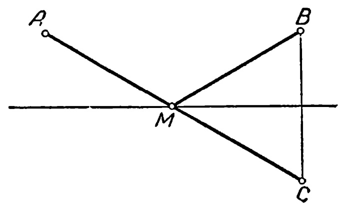


Рис. 9.

Пример 3. Пусть нужно найти следующую сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{998\cdot 999}+\frac{1}{999\cdot 1000}.$$

Человек, не проявляющий инициативы и изобретательности, станет вычислять эту сумму приведением всех дробей к общему знаменателю. Совершенно очевидно, что, действуя так, он даже не сможет довести вычисления до конца из-за необычайной их громоздкости. Но ищущий, инициативный человек может догадаться, хотя бы после некоторых размышлений, что каждое слагаемое данной суммы можно заменить разностью двух дробей. Действительно,

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\quad \ldots$$

$$\ldots\ \frac{1}{998\cdot 999}=\frac{1}{998}-\frac{1}{999};\quad \frac{1}{999\cdot 1000}=\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}.$$

Благодаря этому наша первоначальная сумма примет вид:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{998}-\frac{1}{999}\right)+\left(\frac{1}{999}-\frac{1}{1000}\right).$$

Раскрыв скобки, мы увидим, что эта сумма равна

$$1 - \frac{1}{1000}, \text{ т. е. равна дроби } \frac{999}{1000}.$$

В заключение приведем несколько высказываний о математике, принадлежащих выдающимся деятелям науки, искусства и философии.

«Я глубоко почитаю математику, потому что знакомые с нею видят в ней средство к пониманию всего существующего». (Бхаскара — индийский ученый XII века.)

«Математика есть лучшее и даже единственное введение в изучение природы». (Д. И. Писарев — русский писатель и критик.)

«Многие, которым не представлялось случая более узнать математику, считают ее наукой сухой. В сущности же это наука, требующая наиболее фантазии, и один из первых математиков нашего столетия говорил совершенно верно, что нельзя быть математиком, не будучи поэтом в душе». (С. В. Ковалевская — выдающийся русский математик, первая в мире женщина-профессор.)

«В математике есть своя красота, как в живописи и поэзии». (Н. Е. Жуковский — великий русский ученый.)

«Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков служит средством еще более совершенным, более точным и ясным, чтобы передавать другому понятия, которые он приобрел, истину, которую он открыл». (Н. И. Лобачевский — великий русский математик.)

В настоящее время математика празднует триумф в познании действительности и подчинении природы человеку. С помощью математики вычисляются орбиты искусственных спутников Земли и Солнца, траектории межпланетных кораблей и межконтинентальных ракет, рассчитываются плотины, гидроэлектростанции, атомные элекростанции и другие гигантские сооружения современной техники, достигается автоматизация производства в крупных масштабах, удается давать долгосрочные прогнозы погоды, решать сложнейшие проблемы экономического планирования и проникать в тончайшие особенности строения вещества.

Римские цифры и алфавиты

В математике широко применяются латинские и греческие буквы для различных обозначений. Поэтому учащемуся, приступающему к изучению алгебры, необходимо предварительно ознакомиться с алфавитами этих букв, чтобы в дальнейшем по мере надобности усвоить их полнее и лучше.

Эти алфавиты, а также сведения о римских цифрах даны на следующих двух страницах.

Для обозначения того или иного века (до или после нашей эры), для нумерации глав в книгах и в некоторых других случаях иногда употребляют еще и до сих пор римские цифры.

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ			ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ		
Курсивные	Прямые	Название	Строчные	Прописные	Название
			α	Α	а́льфа
a A	a A	а	β	Β	бе́та
b B	b B	бэ	γ	Γ	га́мма
c C	c C	цэ	δ	Δ	де́льта
d D	d D	дэ	ε	Ε	эпсило́н
e E	e E	э	ζ	Ζ	дзе́та
f F	f F	эф	η	Η	эта
g G	g G	же	ϑ	Θ	тэта
h H	h H	аш	ι	Ι	ио́та
i I	i I	и	κ	Κ	ка́ппа
j J	j J	жи	λ	Λ	ла́мбда
k K	k K	ка	μ	Μ	ми
l L	l L	эль	ν	Ν	ни
m M	m M	эм	ξ	Ξ	кси
n N	n N	эн	ο	Ο	омикро́н
o O	o O	о	π	Π	пи
p P	p P	пэ	ρ	Ρ	ро
q Q	q Q	ку	σ	Σ	сигма
r R	r R	эр	τ	Τ	та́у
s S	s S	эс	υ	Υ	ипсило́н
t T	t T	тэ	φ	Φ	фи
u U	u U	у	χ	Χ	хи
v V	v V	вэ	ψ	Ψ	пси
w W	w W	дубль-вэ	ω	Ω	оме́га
x X	x X	икс			
y Y	y Y	игрек			
z Z	z Z	зэт			

Римских цифр всего семь:

I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100,
D = 500, M = 1000.

Числа первых двух десятков записываются так;

I,	II,	III,	IV,	V,	VI,	VII,	VIII,	IX,	X,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
XI,	XII,	XIII,	XIV,	XV,	XVI,	XVII,	XVIII,	XIX,	XX,
11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20.

Если рядом стоят одинаковые цифры, то они складываются. Например:

$$\mathrm{III} = 3;$$
$$\mathrm{XXX} = 30;$$
$$\mathrm{CCC} = 300.$$

Если бóльшая цифра предшествует меньшей, то они также складываются. Например:

$$\mathrm{VI} = 6; \qquad \mathrm{XVI} = 16;$$
$$\mathrm{XI} = 11; \qquad \mathrm{XII} = 12;$$
$$\mathrm{XV} = 15; \qquad \mathrm{XXVII} = 27;$$
$$\mathrm{CCCXV} = 315.$$

Если же бóльшая цифра следует за меньшей, то из большей вычитается меньшая. Например:

$$\mathrm{IV} = 4; \qquad \mathrm{IX} = 9;$$
$$\mathrm{XL} = 40; \qquad \mathrm{XLI} = 41;$$
$$\mathrm{XCV} = 95.$$

Записывать большиé числа с помощью римских цифр крайне неудобно.

Что такое алгебра

Алгебра есть одна из важных математических дисциплин. Элементарная алгебра, так же как и арифметика, есть учение о числах и действиях над ними. Но элементарная алгебра это далеко не то же самое, что арифметика. В алгебре понятие числа значительно расширяется. Возникают числа отрицательные, иррациональные, чисто мнимые и комплексные. Расширяется также и понятие о математических действиях над числами. Кроме первых четырех действий, в алгебре изучаются еще и другие действия (возведение в степень, извлечение корня и логарифмирование).

Еще одна важная особенность алгебры заключается в том, что в ней для обозначения чисел и величин употребляются преимущественно буквы.

Все эти особенности алгебры приводят к появлению в ней более общих и более эффективных способов решения задач по сравнению со способами арифметическими. Таким образом, расширяются наши возможности решать трудные задачи. Действительно, в алгебре легко решаются многие такие задачи, которые с помощью только одной арифметики решить трудно, а нередко и невозможно. В качестве примера приведем одну задачу.

Пусть имеется длинная стена, и пусть мы хотим огородить прямоугольную площадку, примыкающую к стене. Для этого достаточно поставить ограду лишь с трех сторон, так как четвертой стороной будет служить сама стена (рис. 10).

Теперь допустим, что общая длина всех трех частей ограды должна быть равной 224 *м*.

Если мы сделаем части ограды, примыкающие к стене, равными по длине 1 *м*, то часть, расположенная против стены, должна будет иметь длину 222 *м*. В этом случае площадь участка окажется равной (222·1) *кв.м*, т.е. 222 *кв. м*.

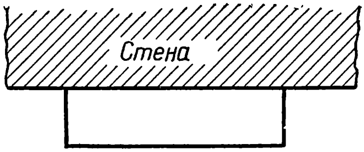


Рис. 10.

Если же мы сделаем части ограды, примыкающие к стене, равными по длине 10 *м*, то часть ограды, расположенная против стены, должна будет иметь длину 204 *м*. В этом случае площадь участка окажется равной (204·10) *кв.м*, т.е. 2040 *кв.м*.

Рассмотрим еще несколько случаев выбора размеров участка и все эти случаи запишем в форме таблицы:

Длина каждой части ограды, примыкающей к стене, в *м*	Длина части ограды, расположенной против стены, в *м*	Площадь участка, в *кв. м*
20	184	3680
30	164	4920
40	144	5760
50	124	6200
60	104	6240
70	84	5880
80	64	5120
...	...	...

Рекомендуется проверить эту таблицу.

Из этой таблицы видно, что при различных выборах размеров прямоугольника площадь участка получается различной, то большей, то меньшей, несмотря на то что общая длина всей ограды остается неизменно равной 224 *м*.

При этих обстоятельствах возникает вопрос: как надо выбрать размеры прямоугольника, чтобы площадь участка оказалась наибольшей?

Решить эту задачу с помощью арифметики мы не можем. Найти же точный ответ путем проб (испытаний), как это мы делали выше, невозможно, так как таким пробам не было бы конца. С помощью же алгебры эту задачу решить можно, как это мы увидим на стр. 87.

Таких задач, которые решаются с помощью алгебры и не могут решаться с помощью только одной арифметики, очень много.

Современная алгебра, т. е. алгебра в широком смысле слова, есть наука о разных системах абстрактных объектов и возможными законами действий над ними (высшая алгебра, алгебра матриц, топологическая алгебра). Наиболее значительные достижения в так называемой топологической алгебре принадлежат крупнейшему советскому математику, действительному члену Академии наук СССР Л. С. Понтрягину. Написанная им книга «Математическая теория оптимальных процессов» является основой для решения практических вопросов автоматического управления производственными процессами, движением ракет и космических кораблей.

Алгебра в современном смысле этого слова не является наукой законченной, раз навсегда построенной. Напротив, она непрестанно обогащается новыми идеями, развивается по все новым и новым направлениям и приобретает все более и более значительные применения в жизни.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ГЛАВА I

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Было время, когда люди не знали никаких других чисел, кроме натуральных 1, 2, 3, 4, 5, 6 и т. д. В дальнейшем стали возникать такие задачи, которые нельзя было решать с помощью только натуральных чисел. Это привело к появлению новых чисел, а именно дробных. (Под дробным числом мы понимаем здесь

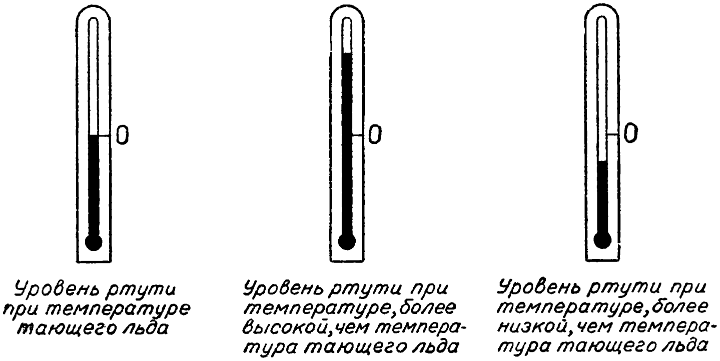


Рис. 11.

отношение натуральных чисел.) Присоединение дробных чисел к целым значительно увеличило круг задач и вопросов, решаемых в арифметике.

Однако все целые и дробные числа оказались опять недостаточными, потребовалось ввести новые числа, а именно положительные и отрицательные.

Один случай употребления положительных и отрицательных чисел общеизвестен. Например, вместо того чтобы о температуре сказать «десять градусов тепла», или «десять градусов выше нуля», говорят: «$+10°$» (читают: «плюс 10 градусов»). Вместо того чтобы сказать «десять градусов холода», или «десять градусов ниже нуля», говорят: « — 10°» (читают: «минус 10 градусов»).

Здесь $+10$ выступает в качестве положительного числа, а -10 — в качестве отрицательного.

В рассмотренном примере положительные и отрицательные числа появились в связи с тем, что измерение температуры приходится производить в двух противоположных направлениях от температуры тающего льда. Температура тающего льда принимается за нулевую (рис. 11).

Таких величин, измерение которых приходится производить в двух противоположных направлениях, имеется немало. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Расстояние от ст. Бологое по Октябрьской железной дороге можно измерять как в сторону Москвы, так и в сторону Ленинграда (рис. 12).

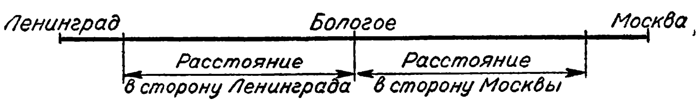


Рис. 12.

Пример 2. Отклонение маятника от вертикального положения можно измерять как в сторону, противоположную движению часовой стрелки (вправо), так и в сторону движения часовой стрелки (влево) (рис. 13).

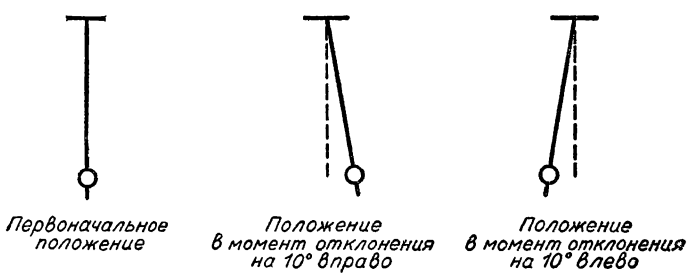


Рис. 13.

Пример 3. Поворот колеса можно измерять как в сторону, противоположную движению часовой стрелки, так и в сторону движения часовой стрелки (рис. 14).

Пример 4. Время можно измерять как в сторону будущего, так и в сторону прошедшего по отношению к тому или иному избранному моменту времени. Например, время по отношению к полуночи (т. е. к моменту 0 часов) можно измерять в двух противоположных направлениях. Можно отмечать момент времени, наступающий спустя 3 часа после полуночи, но можно отмечать и момент времени за 3 часа до полуночи. Первый момент будет соответствовать 3 часам текущего дня, а второй — 21 часу предшествующего дня.

Календарное время до сих пор почти во всех странах мира измеряется в ту и другую сторону с момента начала нашей эры.

Теперь перейдем к тому, чтобы дать определения положительным и отрицательным числам.

Пусть мы имеем какую-либо величину, измерение которой приходится производить в двух противоположных направлениях. Одно из этих направлений, безразлично какое, принято называть положительным, а другое — отрицательным. Например, направление от ст. Бологое в сторону Москвы мы можем принять за

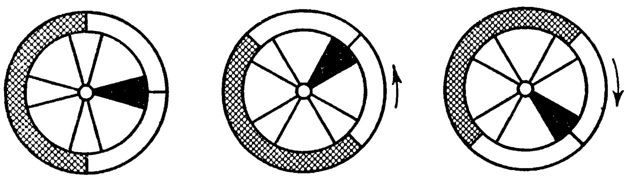


Рис. 14.

положительное. Тогда направление от ст. Бологое в сторону Ленинграда мы должны будем считать отрицательным.

Результат измерения расстояния от ст. Бологое в сторону Москвы, т. е. в положительном направлении, мы будем выражать числом со знаком + (плюс) впереди и называть положительным числом. Результат же измерения расстояния от ст. Бологое в сторону Ленинграда, т. е. в отрицательном направлении, мы будем выражать числом со знаком — (минус) впереди и называть отрицательным числом.

Обобщая изложенное, дадим следующее определение.

Если величина допускает измерение в двух противоположных направлениях, то результат ее измерения в положительном направлении выражается числом со знаком + (плюс) впереди и называется положительным числом, а результат измерения в отрицательном направлении выражается числом со знаком — (минус) впереди и называется отрицательным числом.

Приведем примеры.

Пример 1. Примем за положительное направление вращения вращение против хода часовой стрелки. Тогда фраза «Колесо повернулось на $+2\frac{1}{2}$ оборота» будет означать, что колесо совершило $2\frac{1}{2}$ оборота против хода часовой стрелки. Фраза же «Колесо повернулось на $-2\frac{1}{2}$ оборота» будет означать, что колесо совершило $2\frac{1}{2}$ оборота по ходу часовой стрелки.

Пример 2. Примем за положительное направление отсчет времени в сторону будущего с момента начала эры. Тогда фраза «Событие произошло в $+1147$ году» будет означать, что событие произошло в 1147 году после начала нашей эры. Фраза же «Событие произошло в -754 году» будет означать, что событие произошло в 754 году до начала нашей эры (рис. 15).

Итак, символами $+1$, $+2$, $+\frac{2}{8}$ и т. д. обозначаются положительные числа, а символами -1, -2, $-\frac{2}{8}$ — отрицательные числа.

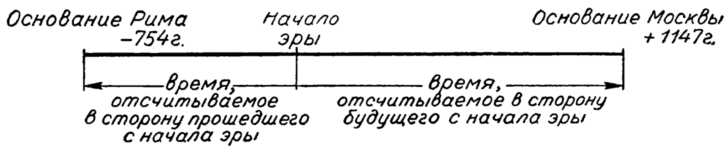


Рис. 15.

Для краткости принято записывать положительные числа без знака $+$ (плюс) впереди. Например, под числами 5; 12; $3\frac{1}{2}$; 0,14 следует понимать числа $+5$; $+12$; $+3\frac{1}{2}$; $+0{,}14$.

Замечание о нуле. Ставить перед числом нуль какой-либо знак ($+$ или $-$) не имеет смысла, так как символы $+0$, -0 и 0 представляют собой одно и то же. Среди положительных и отрицательных чисел нуль занимает особое место; нуль есть число, не относящееся ни к положительным, ни к отрицательным числам.

§ 2. ЧИСЛОВАЯ ОСЬ

Положительным и отрицательным числам можно придать наглядность с помощью числовой оси. Возьмем прямую X_1X с начальной на ней точкой O, с выбранным положительным направлением и примем длину некоторого отрезка за единицу.

Эту прямую условимся называть осью (рис. 16).

Отложим по оси X_1X от точки O единицу длины вправо и влево 1, 2, 3, 4, 5 и т. д. раз. Концы полученных отрезков, расположенных справа, отметим с помощью положительных чисел $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, $+5$ и т. д., а расположенных слева — с помощью отрицательных чисел -1, -2, -3, -4, -5 и т. д. (рис. 16).

Изображением числа нуль будет точка O. Таким образом, каждое целое число (положительное, отрицательное и нуль) изобразится одной и только одной точкой оси X_1X.

Чтобы изобразить на оси X_1X дробное число, например $\frac{2}{7}$, разделим единицу длины на семь равных частей и две такие части отложим вправо от начальной точки O.

Чтобы отметить на оси X_1X отрицательное дробное число, например $-\frac{3}{8}$, разделим единицу длины на восемь равных частей и три такие части отложим влево от начальной точки O. Так же поступим и со всяким другим дробным или смешанным

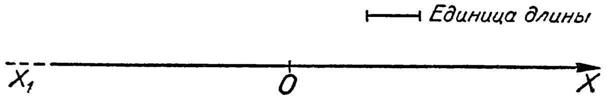


Рис. 16.

числом. Таким образом, и каждое дробное число, как положительное, так и отрицательное, изобразится одной и только одной точкой оси X_1X.

Когда мы говорим, что число изображается точкой, то это не следует понимать так, что точка и число представляют собой одно и то же. Напротив, точка и число — это совершенно различные понятия. Поэтому, когда мы говорим, что данная точка есть изображение числа, например $-12\frac{1}{4}$, то это значит, что эта точка находится на расстоянии $12\frac{1}{4}$ единицы длины влево от начальной точки O.

Числовой осью называется прямая, точки которой изображают числа (положительные, отрицательные и нуль).

Напомним, что числовая ось имеет выбранную на ней начальную точку, выбранное положительное направление и единицу длины.

Вместо того чтобы говорить «точка соответствует числу $-\frac{3}{8}$», говорят просто «точка $-\frac{3}{8}$» и т. п.

Число, которое изображается данной точкой, называется координатой этой точки.

§ 3. ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА

Отсчитаем 50 *км* от ст. Бологое в сторону Москвы и те же 50 *км* в сторону Ленинграда. Полученные числа $+50$ и -50 называются противоположными.

Определение. ***Два числа называются противоположными, если соответствующие им точки числовой оси лежат по разные стороны от начальной точки на одинаковом расстоянии от нее.***

Например, числа $+5\frac{3}{4}$ и $-5\frac{3}{4}$ противоположны. Если данное число 7, то ему противоположным будет -7. Если данное число

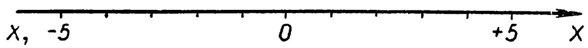


Рис. 17.

-7, то ему противоположным будет 7. Если данное число нуль, то ему противоположным будет также нуль.

На рисунке 17 изображены точки, соответствующие противоположным числам $+5$ и -5.

§ 4. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА ЧИСЛА

При решении различных вопросов, в которых встречаются положительные и отрицательные числа, мы обязаны, как правило, учитывать направление отсчета величин, изображаемых этими числами.

Например, решим такую задачу: «Локомотив прошел от ст. Бологое $+120$ *км*, а затем еще -140 *км*. Определить местоположение локомотива после двух этих пробегов». (Как и раньше, будем считать положительным направлением направление от ст. Бологое в сторону Москвы.) Для решения этой задачи нам необходимо учитывать направление движения локомотива как в первом, так и во втором случае.

Сначала локомотив прошел 120 *км* от ст. Бологое в сторону Москвы, а затем прошел 140 *км* в обратную сторону, т. е. в сторону Ленинграда. Очевидно, что после этих двух пробегов локомотив оказался на расстоянии 20 *км* от ст. Бологое в сторону Ленинграда.

Таким образом, для решения этой задачи нам пришлось учитывать направления движения локомотива как в первом, так и во втором случае.

Однако встречаются и такие задачи, для решения которых совершенно не нужно учитывать направление отсчета. Например, решим такую задачу: «Локомотив прошел сперва $+120$ *км*, а затем еще -140 *км*. Определить общий пробег локомотива в километрах». Для определения общего пробега достаточно сложить два положительных числа 120 и 140, т. е. нет никакой надобности учитывать направления движения локомотива. Очевидно, что общий пробег локомотива составляет 260 *км.*

Если бы локомотив прошел сперва -120 *км*, а затем еще -140 *км*, то общий пробег опять составил бы 260 *км.*

Таким образом, при решении этой задачи нам совершенно не нужно было учитывать направления отсчета. Вместо отрицательных чисел мы брали числа положительные, противоположные этим отрицательным числам. Например, вместо числа -120 мы брали число 120.

Все это побуждает нас ввести новое важное понятие, а именно понятие абсолютной величины числа.

Определение. ***Абсолютной величиной положительного числа называется само это число. Абсолютной величиной отрицательного числа называется число, ему противоположное.***

Абсолютной величиной числа нуль называется само число нуль.

Обратим внимание на то, что абсолютная величина всякого, отрицательного числа есть число положительное.

Примеры. Абсолютная величина числа $+5$ (или 5) есть $+5$ (или 5).

Абсолютная величина числа -5 есть число $+5$ (или 5).

Противоположные числа имеют одинаковую абсолютную величину. Например, числа $+10$ и -10 имеют одну и ту же абсолютную величину, равную $+10$ или 10.

Абсолютная величина любого числа, например числа $+7$, обозначается символом $|+7|$.

Символ $\left|-15\frac{1}{4}\right|$ обозначает абсолютную величину числа $-15\frac{1}{4}$.

Таким образом, можно писать

$$|+8|=8;\quad |-8|=8;\quad \left|-15\frac{1}{4}\right|=15\frac{1}{4}.$$

$$|-1|=1;\quad |0|=0.$$

§ 5. СЛОЖЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Для указания действия сложения в алгебре употребляется тот же знак $+$ (плюс), что и в арифметике.

Правила сложения положительных и отрицательных чисел устанавливаются по определению, а потому не подлежат доказательству.

Как складывать положительные числа, известно из арифметики, например:

$$(+20)+(+30)=20+30=50.$$

Прежде чем формулировать правила сложения для остальных случаев, мы станем рассматривать задачи, решения которых подскажут нам целесообразные определения этих правил.

Пусть колесо повернулось на $-20°$, иначе говоря, оно повернулось на $20°$ по ходу часовой стрелки; пусть после этого оно повернулось еще на $-30°$. В результате этих двух поворотов колесо отклонится от первоначального положения по ходу часовой стрелки на $50°$, т. е. на $-50°$. Следовательно, если мы хотим, чтобы результат этих двух поворотов находился при помощи сложения, то мы должны определить это действие так, чтобы

$$(-20)+(-30)=-50.$$

Правило 1. ***Чтобы сложить два отрицательных числа, надо сложить их абсолютные величины и перед полученной суммой поставить знак минус,*** например:

$$(-3)+(-17)=-20; \quad \left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{19}{12}.$$

Пусть колесо повернулось на $-20°$, а затем еще на $+12°$. В результате этих поворотов колесо окажется отклоненным от первоначального положения на $8°$ по ходу часовой стрелки, иначе говоря, на $-8°$. Следовательно, если мы хотим, чтобы результат этих двух поворотов колеса находился при помощи сложения, то мы должны определить это действие так, чтобы

$$(-20)+(+12)=-8.$$

Правило 2. ***Чтобы сложить два числа, из которых одно положительное, а другое отрицательное и которые имеют разные абсолютные величины, надо из большей абсолютной величины вычесть меньшую и перед полученным результатом поставить знак того из слагаемых, у которого абсолютная величина больше.***

Например:

$$(+25)+(-10)=+15; \quad (-25)+(+10)=-15;$$
$$(-1{,}01)+(+1{,}001)=-0{,}009.$$

Правило 3. ***Сумма двух противоположных чисел равна нулю,***

например:

$$(+10)+(-10)=0.$$

Сумма двух непротивоположных чисел отлична от нуля.

Следствие. *Сумма двух чисел равна нулю лишь тогда, когда эти числа противоположные.*

Правило 4. ***Если одно из слагаемых равно нулю, то сумма равна другому слагаемому,*** например:

$$(-7)+0=-7;\ 0+0=0.$$

Сумму, например, $(+8)+(-12)$ можно записать и так:

$$8+(-12).$$

Сложение трех и более чисел. *Чтобы найти сумму трех и более чисел, достаточно к первому числу прибавить второе, затем к полученному результату прибавить третье и т. д.*, например:

$$(+20)+(-12)+(-15)+(+3)=(+8)+(-15)+(+3)=$$
$$=(-7)+(+3)=-4.$$

Не останавливаясь на доказательствах, примем к сведению, что законы сложения остаются в силе и для всех положительных и отрицательных чисел.

1. Переместильный, или коммутативный, закон сложения:

$$(+12)+(-15)=(-15)+(+12).$$

2. Сочетательный, или ассоциативный, закон сложения:

$$(-5)+(-8)+(+7)=(-5)+[(-8)+(+7)].$$

Остается в силе для положительных и отрицательных чисел и следующее следствие:

При вычислении суммы любого числа слагаемых можно произвольно переставлять эти слагаемые, а также произвольно разбивать их на группы и каждую группу слагаемых заменять их суммой.

Пример.

$$(-11)+(+19)+(-89)+(-9)=(-11)+(-89)+$$
$$+[(+19)+(-9)]=(-100)+(+10)=-90.$$

В частности, чтобы прибавить сумму, можно прибавить одно за другим все входящие в нее слагаемые, например:

$$(+10)+[(-4)+(+7)+(-2)]=(+10)+(-4)+(+7)+(-2).$$

Таким образом, чтобы прибавить сумму, можно прибавить одно за другим все входящие в нее слагаемые. Например:

$$50+[(-8)+15+(-40)]=50+(-8)+15+(-40)=17.$$

§ 6. ВЫЧИТАНИЕ

Вычитание есть действие, обратное сложению.

Пусть имеется два каких-нибудь числа.

Вычесть из первого числа второе — это значит найти такое третье число, сумма которого со вторым даст первое. (Здесь первое число называется уменьшаемым, второе — вычитаемым и третье — разностью.)

Правило вычитания нельзя устанавливать по определению, так как оно вытекает из правила сложения и определения действия вычитания.

Пусть требуется из числа $+10$ вычесть число -8, т. е. найти разность

$$(+10)-(-8).$$

Здесь 10 есть уменьшаемое, а -8 вычитаемое.

Искомая разность должна быть таким числом, чтобы от прибавления его к вычитаемому получилось уменьшаемое. Легко проверить, что таким числом будет $+18$. Это число $+18$ мы можем получить путем прибавления к уменьшаемому числа, противоположного вычитаемому. Поэтому разность

$$(+10)-(-8)$$

представляет собой то же самое число, что и сумма

$$(+10)+(+8).$$

Отсюда вытекает следующее правило вычитания.

Правило. ***Чтобы вычесть из одного числа другое, достаточно к первому прибавить число, противоположное второму.***

Примеры:

$$\begin{aligned}
(+10)-(-\ 8)&=(+10)+(+\ 8)=+18\\
(-15)-(-10)&=(-\ 5)+(+10)=-\ 5\\
(-15)-(-25)&=(-15)+(+25)=+10\\
(-15)-(+25)&=(-15)+(-25)=-40.
\end{aligned}$$

Таким образом, разность чисел всегда можно представить в виде соответствующей суммы, т. е. вычитание сводить к сложению.

Выше, в четвертом равенстве, мы получили, что

$$(-15)-(+25)=-40.$$

Вычитание здесь сделано правильно. В самом деле, если мы сложим числа $+25$ и -40, то получим -15, т. е. как раз уменьшаемое.

Также можно проверять правильность произведенного вычитания и во всех других случаях.

Проиллюстрируем действие вычитания на практических примерах.

Пример 1. Пусть температура одного тела равна $+10^\circ$, а другого -8°. Чтобы найти разность между температурой первого тела и температурой второго, мы должны из $+10^\circ$ вычесть -8°. Выполняя это действие, получим

$$(+10)-(-8)=(+10)+(+8)=+18.$$

Этот результат соответствует действительности. В самом деле, если температура одного тела 10° выше нуля, а другого 8° ниже

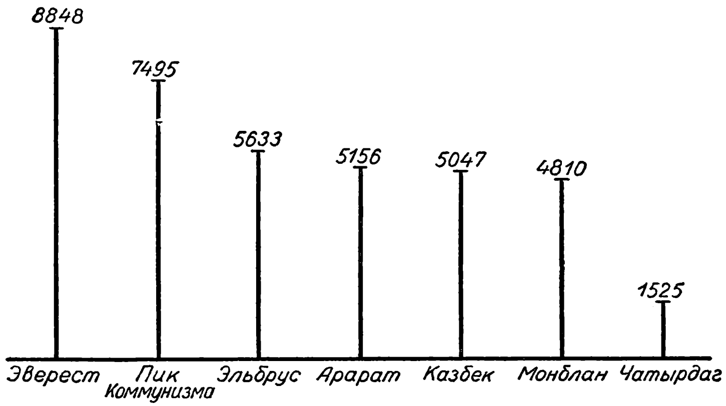


Рис. 18.

нуля, то скачок от одной температуры к другой действительно составляет 18°.

Рассмотрим тот же пример, поменяв местами уменьшаемое и вычитаемое. Пусть температура первого тела -8°, а второго $+10^\circ$. Тогда разность между температурой первого тела и второго будет

$$(-8)-(+10)=(-8)+(-10)=-18.$$

И здесь скачок от одной температуры к другой равен 18°.

Обратив внимание на знаки двух последних разностей, заметим следующее. Когда уменьшаемым служит число, выражающее более высокую температуру, а вычитаемым — более низкую, то разность оказывается числом положительным, а именно:

$$(+10)-(-8)=+18.$$

Когда же, наоборот, уменьшаемым служит число, выражающее более низкую температуру, а вычитаемым — более высокую, то разность оказывается числом отрицательным.

Действительно,

$$(-8)-(+10)=-18.$$

Пример 2. На рисунке 18 изображены высоты известных гор с помощью вертикальных отрезков. Числа, проставленные над каждым вертикальным отрезком, выражают в метрах высоту соответствующей горы над уровнем моря. Выразим с помощью положительных и отрицательных чисел высоты этих гор, но не по отношению к уровню моря, а по отношению к уровню вершины Арарата, т. е. приняв уровень вершины Арарата равным нулю.

На рисунке 19 высоты тех же гор уже выражены с помощью положительных и отрицательных чисел.

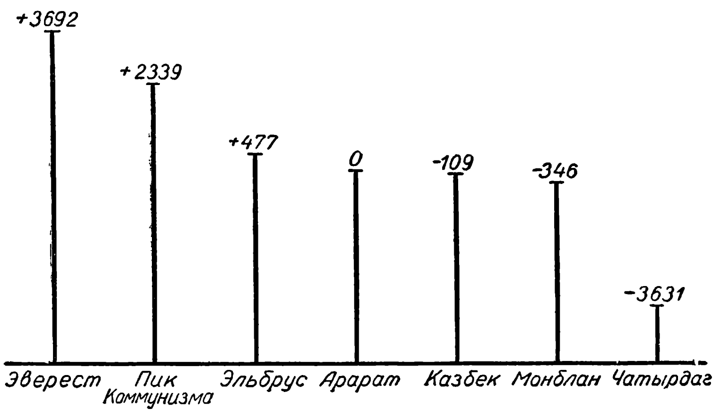


Рис. 19.

Вычтем из числа $(+3692)$ число (-346):

$$(+3692)-(-346)=(+3692)+(+346)=4038.$$

Число $+4038$ показывает, что Эверест выше Монблана на 4038 *м*.

Эверест — высочайшая вершина земного шара; находится в Азии на Главном Гималайском хребте.

Пик Коммунизма — высшая точка Памира; находится в Азии, на территории СССР.

Эльбрус — высшая точка Кавказского хребта.

Арарат находится в Турции вблизи столицы Армении — Еревана.

Казбек находится на территории Грузинской ССР.

Монблан — высшая точка Западной Европы; находится на границе Франции, Италии и Швейцарии.

Чатырдаг находится в Крыму.

В заключение сделаем следующее важное замечание.

Введение отрицательных чисел делает выполнимым действие вычитания во всех случаях.

Например:

$$5-7=5+(-7)=-2;\ 0-7=0+(-7)=-7;$$

$$0{,}01-0{,}1=0{,}01+(-0{,}1)=-0{,}09;$$

$$2-15=-13.$$

§ 7. УМНОЖЕНИЕ

Как умножаются положительные числа, известно из арифметики. Например:

$$(+30)\cdot(+20)=30\cdot 20=600.$$

Теперь нам надо выяснить, как же следует умножать два отрицательных числа или два числа, из которых одно положительное, а другое отрицательное.

С этой целью рассмотрим одну из задач, решение которой подскажет нам целесообразное правило умножения положительных и отрицательных чисел для всех случаев. В качестве такой

Рис. 20.

задачи рассмотрим задачу, в которой требуется вычислить работу, произведенную силой. Но прежде чем формулировать эту задачу, изложим необходимые предварительные сведения.

Пусть к твердому телу, расположенному на прямой X_1X, приложены силы, действующие по этой прямой X_1X в двух противоположных направлениях (рис. 20). Силу, действующую вправо, условимся выражать положительным числом, а влево — отрицательным. Под действием таких сил тело может перемещаться по прямой X_1X. Перемещение тела вправо будем выражать положительным числом, а влево — отрицательным.

Если перемещение тела происходит вдоль той же прямой, по которой действует сила, то произведение силы на перемещение называется работой, произведенной этой силой.

В том случае, когда направление силы совпадает с направлением перемещения, работу, произведенную этой силой, естественно считать положительной, в противном случае — отрицательной.

В самом деле, когда сила действует в направлении, противоположном перемещению, то она является силой, тормозящей движение, а потому естественно считать работу, производимую ею, отрицательной.

Таким образом, здесь нам приходится иметь дело с тремя величинами: силой, перемещением и работой.

Обратим внимание на то, что каждая из этих величин может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Теперь поставим следующую задачу.

Задача. К твердому телу, расположенному на прямой X_1X, приложены две силы: -12 *кг* и $+4$ *кг*, действующие по этой же прямой X_1X. Пусть под действием этих сил тело переместилось вдоль прямой X_1X на -5 *м*. Найти работу, произведенную каждой силой в отдельности.

Решение. Работа, произведенная первой силой, будет положительной и равной 60 *кгм* (килограммометрам), так как направление ее действия совпадает с направлением происшедшего перемещения. Поэтому

$$(-12)\cdot(-5)=+60.$$

Работа, произведенная второй силой, будет отрицательной, равной -20 килограммометрам, так как направление ее действия противоположно направлению происшедшего перемещения. Поэтому

$$(+4)\cdot(-5)=-20.$$

Рассматривая решения только что разобранной задачи и других подобных задач, естественно прийти к принятию следующих правил:

1. ***Произведение двух отрицательных чисел равно произведению их абсолютных величин.***

2. ***Произведение двух чисел, из которых одно положительное, а второе отрицательное, равно отрицательному числу, абсолютная величина которого равна произведению абсолютных величин сомножителей.***

3. ***Произведение двух чисел равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю.***

Приведем примеры на все эти правила.

$$\begin{array}{ll}
(-5)\cdot(-4)=+20; & (+5)\cdot\ 0=0;\\
(+5)\cdot(-4)=-20; & (-5)\cdot\ 0=0;\\
(-5)\cdot(+4)=-20; & 0\cdot\ (+5)=0;\\
 & 0\cdot\ (-5)=0.
\end{array}$$

Следуя изложенному правилу умножения, мы всегда будем получать правильный результат. Подтвердим сказанное еще на одном примере.

Пример 1. Пусть паровоз движется без остановок с постоянной скоростью по Октябрьской железной дороге и пусть в нуль часов, т. е. в полночь, он проходит ст. Бологое (рис. 21).

Расстояние от ст. Бологое до паровоза в сторону Москвы будем выражать положительным числом; тогда расстояние в сторону Ленинграда мы обязаны будем выражать числом отрица-

Рис. 21.

тельным. Скорость паровоза условимся выражать положительным числом, если движение паровоза совершается по направлению от Ленинграда к Москве, и отрицательным числом в противном случае. Момент времени после момента нуль часов будем выражать положительным числом, а момент времени до момента нуль часов — числом отрицательным.

Схема железнодорожных часов с обозначением отрицательного отсчета времени

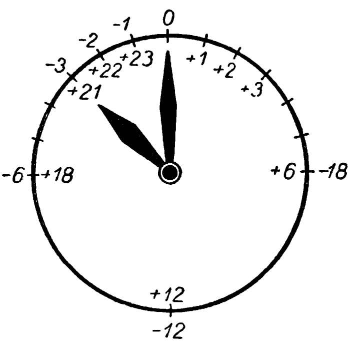


Рис. 22.
На схеме изображено положение стрелок в —3 часа.

Таким образом, в этом примере нам приходится иметь дело с тремя величинами: р а с с т о я н и е м, с к о р о с т ь ю и в р е м е н е м. Обратим внимание на то, что каждая из этих величин является величиной, отсчет которой ведется в двух противоположных направлениях. Таким образом, каждая из этих трех величин может иметь как положительные, так и отрицательные значения.

Вспомним, что в нуль часов, т. е. в полночь, паровоз проходит ст. Бологое и предположим для определенности, что скорость паровоза равна —20 *км* в час, а время равно — 3 часам. Это значит, что паровоз движется по направлению от Москвы к Ленинграду и что момент времени, который мы рассматриваем, есть момент, предшествующий на 3 часа моменту нуль часов (рис. 22).

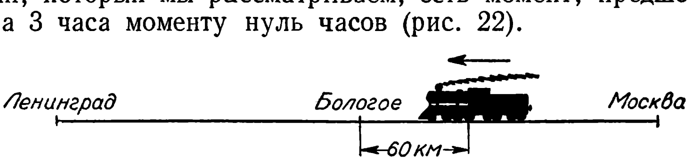


Рис. 23. Положение в —3 часа

Очевидно, что в 3 часа паровоз находился от ст. Бологое на расстоянии 60 *км* в сторону Москвы (рис. 23).

С другой стороны мы знаем, что для отыскания расстояния от ст. Бологое до паровоза достаточно скорость —20 *км* умножить на время -3 часа. Выполняя это умножение по установленному правилу, получим

$$(-20)\cdot(-3)=+60.$$

Число $+60$ как раз свидетельствует о том, что паровоз находится от ст. Бологое на расстоянии 60 *км* в сторону Москвы, что в точности согласуется с действительностью.

Рекомендуется рассмотреть этот пример при других выбранных значениях скорости и момента времени.

Произведение трех и более чисел

Чтобы найти произведение трех и более чисел, достаточно первое умножить на второе, затем полученный результат умножить на третье и т. д. Например:

$$(-3)\cdot(+4)\cdot(-5)=(-12)\cdot(-5)=+60.$$

Основные свойства умножения

1. ***Произведение чисел не меняется от перемены мест множителей*** (переместительный или коммутативный закон умножения). Например:

$$(+5)\cdot(-3)=(-3)\cdot(+5).$$

2. ***Произведение не изменится, если часть множителей заменить их произведением*** (сочетательный или ассоциативный закон умножения). Например:

$$(+5)\cdot(-3)\cdot(-2)=(+5)\cdot[(-3)\cdot(-2)].$$

3. ***Произведение суммы чисел на число равно сумме произведений слагаемых на это число*** (распределительный или дистрибутивный закон умножения). Например:

$$[(+5)+(-3)]\cdot(-2)=(+5)\cdot(-2)+(-3)\cdot(-2).$$

Из этих свойств вытекает следующее правило.

Правило. ***Произведение любого числа множителей не изменится, если произвольно переставлять множители, а также если их произвольно разбивать на группы и каждую группу множителей заменять их произведением.***

(Доказательство этого правила, а также законов умножения опускается для облегчения курса.)

Пример:

$$(-19)\cdot(+43)\cdot\left(-\frac{1}{23}\right)\cdot(-2)\cdot\left(-\frac{1}{19}\right)\cdot(-23)=$$
$$=\left[(-19)\cdot\left(-\frac{1}{19}\right)\right]\cdot\left[\left(-\frac{1}{23}\right)\cdot(-23)\right]\cdot(+43)\cdot(-2)=$$
$$=1\cdot 1\cdot(-86)=-86.$$

§ 8. ДЕЛЕНИЕ

Деление есть действие обратное умножению.

Пусть имеется два каких-нибудь числа. ***Разделить первое на второе — это значит найти такое третье число, произведение которого на второе равно первому.*** (Здесь первое число называется делимым, второе — делителем и третье — частным.)

Правило деления нельзя устанавливать по определению, так как оно вытекает из правила умножения и определения действия деления. Исходя из правила умножения и определения действия деления, легко вывести следующие правила деления.

Правило. ***Абсолютная величина частного равна частному от деления абсолютной величины делимого на абсолютную величину делителя. При этом частное будет положительным, если делимое и делитель оба положительны или оба отрицательны. Частное будет отрицательным, если из двух чисел — делимого и делителя — одно положительно, а другое отрицательно. Частное равно нулю, если делимое равно нулю, а делитель отличен от нуля.***

Деление невозможно, если делитель равен нулю.

Примеры: $(+20):(+5)=+4$; $(-20):(-4)=+5$;
$(+20):(-4)=-5$; $(-20):(+4)=-5$.

Правильность деления можно проверить умножением делителя на частное. Очевидно, что

$$\frac{-20}{-1}=+20; \qquad \frac{+0{,}001}{-20}=-0{,}00005;$$
$$\frac{-0{,}001}{0{,}0000001}=-10000; \qquad \frac{-1}{-0{,}001}=+1000.$$

Упражнения. Найти значения следующих выражений:

1. $(-8)+(-5)+(+11)+(-4)$; Отв. -6.
2. $(-8)+(+5)-(-11)$; Отв. $+8$.
3. $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$; Отв. $-\frac{8}{27}$.
4. $\frac{+20}{-4}-\frac{+27}{-3}\cdot(-2)+\frac{-90}{-5}$. Отв. -5.

Несколько замечаний, относящихся к четырем действиям над числами

В выражении $(+3)+(-10)$ знак $+$, стоящий между скобками, есть знак действия сложения, остальные же знаки $(+)$ и $(-)$ являются не знаками действий, а лишь знаками, характеризующими направление отсчета.

Когда два числа, имеющие перед собой знаки $+$ или $-$, соединяются между собой с помощью знака сложения или вычитания, то сами эти положительные или отрицательные числа записываются в скобках.

Выражение $(+3)-(-10)$ есть разность между числами $+3$ и -10.

Выражение $(+3)\cdot(-10)$ или $+3\cdot -10$ есть произведение чисел $+3$ и -10.

Выражение $(+3):(-10)$, или $+3:-10$, или $\frac{+3}{-10}$ есть частное.

§ 9. ОСОБЕННОСТИ ЧИСЕЛ 0 И 1

Особенности нуля

Нуль есть единственное число, обладающее следующими свойствами:

1. ***Если одно из двух слагаемых есть нуль, то сумма равна другому слагаемому.*** Например:

$$(+7)+0=+7.$$

2. ***Если один из множителей есть нуль, а остальные несколько множителей какие угодно числа, то произведение также будет равно нулю.*** Например:

$$(-19)\cdot(+8)\cdot 0=0.$$

Следствие. ***Если делимое есть нуль, а делитель не нуль, то частное будет представлять собой также нуль.*** Например:

$$\frac{0}{5}=0.$$

3. ***Деление на нуль невозможно.*** Например, выражения

$$\frac{5}{0} \text{ и } \frac{0}{0}$$

смысла не имеют.

Символ $\frac{5}{0}$ не представляет собой никакого числа, так как произведение любого числа на нуль будет равно нулю, между тем как делимое отлично от нуля.

Бессмысленно спрашивать, во сколько раз 5 больше нуля.

Символ $\frac{0}{0}$ не представляет собой определенного числа, так как произведение любого числа на нуль будет равно нулю.

Бессмысленно спрашивать, во сколько раз нуль больше нуля.

Особенность положительной единицы

Положительная единица есть единственное число, обладающее следующим свойством.

Если один из двух множителей есть +1, то произведение равно другому множителю, каким бы числом он ни был. Например:

$$(+8)\cdot(+1)=+8;\ (-8)\cdot(+1)=-8;\ 0\cdot(+1)=0.$$

Следствие. ***Если делитель равен +1, то частное равно делимому.*** Например:

$$\frac{-7}{+1}=-7.$$

§ 10. ПОНЯТИЯ «БОЛЬШЕ» И «МЕНЬШЕ» ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ

В математике употребляются специальные знаки $>$ и $<$, заменяющие слова «больше» и «меньше». Например, пишут $10>3$ (читают «десять больше трех»), $7<8$ (читают: «семь меньше восьми»). Острие знака неравенства ставится в сторону меньшего числа.

Выражение «не меньше» заменяется знаком $\geqslant$, который читается: «больше или равно».

Выражение «не больше» заменяется знаком $\leqslant$, который читается: «меньше или равно».

Знак $\neq$ читается не равно. Например, $3\neq 4$ (три не равно четырем).

Знаки $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ называются знаками неравенств.

Понятия «бо́льше» и «меньше» применимы и к положительным и к отрицательным числам.

Возьмем на числовой оси две точки, соответствующие двум положительным числам (например, 10 и 15). Тогда той из них, которая расположена правее, соответствует число большее, чем той, которая расположена левее.

Число 15 больше, чем число 10 $(15>10)$.

Это правило распространяется по определению на всю числовую ось в применении к положительным и отрицательным числам.

Из двух чисел бо́льшим считается то, изображение которого на числовой оси располагается правее изображения другого числа, например:

$$+5>0;\ +5>-1;\ -2>-5;\ 0>-1.$$

Отсюда вытекает, что:

1. *Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа*, например:

$$7>0;\quad 7>-20.$$

2. *Нуль больше всякого отрицательного числа*, например:

$$0 > -10.$$

3. *Из двух отрицательных чисел больше то, у которого абсолютная величина меньше*, например:

$$-5 > -7 \text{ (ведь } |-5| < |-7|).$$

Точка числовой оси, соответствующая числу -5, расположена правее точки, соответствующей числу -7.

Изложенное о сравнении чисел проиллюстрируем на примере.

Рассмотрим два показания термометра: $-8°$ и $-10°$. По данному выше определению -8 больше, чем -10.

В нашем примере это означает, что температура $-8°$ более высокая, чем температура $-10°$.

Аналогично можно истолковать и следующие неравенства:

$$0 > -2; \quad 2 > -5 \text{ и т. д.}$$

Сравнение чисел приобретает еще большую наглядность, если числовую ось расположить вертикально (рис. 24).

Из двух чисел будет бóльшим то, изображение которого на этой числовой оси выше.

На этой числовой оси любое положительное число расположено выше нуля и выше всякого отрицательного числа. Нуль расположен выше всякого отрицательного числа. Из двух отрицательных чисел выше расположено то из них, которое меньше по абсолютной величине.

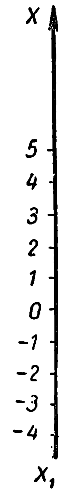


Рис. 24.

О выражениях вида $+(+a)$; $+(-a)$; $-(+a)$; $-(-a)$.

Условимся считать, что знак плюс, поставленный перед каким-нибудь числом, оставляет это число без изменения. Например:

$$+(-5) = -5; \qquad +(+5) = +5 = 5.$$

Условимся считать, что знак минус, поставленный перед каким-нибудь числом, изменяет это число на число, ему противоположное. Например:

$$-(-5) = +5 = 5; \qquad -(+5) = -5.$$

Очевидно, что

$$-[-(-5)] = -5; \qquad -\{-[-(-5)]\} = +5;]$$
$$-[+(-13)] = +13.$$

Из всего изложенного о положительных и отрицательных числах мы можем заметить, что положительные и отрицательные числа возникли под влиянием следующих двух потребностей:

потребности изображать с помощью чисел результаты измерения величин в двух противоположных направлениях и из потребности сделать действие вычитание выполнимым всегда.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Что называется положительным числом?

Что называется отрицательным числом?

Какие два числа называются противоположными?

Что называется абсолютной величиной числа?

По какому правилу выполняется каждое из первых четырех действий над положительными и отрицательными числами?

Какое из двух данных чисел считается бо́льшим?

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найти суммы:

1) $(+1)+(-2)+(+3)+(-4)+(+5)+(-6)$; Отв. -3.

2) $\left(-85\frac{5}{6}\right)+\left(+98\frac{3}{11}\right)+\left(-14\frac{1}{6}\right)$. Отв. $-1\frac{8}{11}$.

2. Найти разности:

1) $\left(+2\frac{1}{3}\right)-\left(-1\frac{3}{4}\right)$; Отв. $4\frac{1}{12}$.

2) $(-123)-(-231)$. Отв. 108.

3. Вычислить

$(+50)-(-80)+(-20)+(+10)-(-5)$. Отв. 125.

4. Найти произведения:

1) $(-0{,}25)\cdot(+0{,}8)$; Отв. $-0{,}2$.

2) $(-0{,}125)\cdot(-0{,}8)$; Отв. $0{,}1$.

3) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)$; Отв. -120.

4) $(-837)\cdot(+43)\cdot\left(-27\frac{1}{2}\right)\cdot 0$. Отв. 0.

5. Найти частные:

1) $(-1000):(-8)$; Отв. 125.

2) $(-0{,}06):(+0{,}2)$; Отв. $-0{,}3$.

3) $0{,}01\cdot(-0{,}001)$; Отв. -10.

4) $\left(+3\frac{4}{7}\right):\left(-1\frac{17}{28}\right)$. Отв. $-2\frac{2}{9}$.

6. Найти значение выражений:

1) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)\right][(-22)-(-10)]$; Отв. 2.

2) $[1:(-0{,}1)]-[1:(-0{,}01)]$; Отв. 90.

3) $\frac{-12:3-8:2}{1-5}-5\cdot 0{,}4$. Отв. 0.

7. Даны числа 16,8; -3; 0; 1; $-3\frac{3}{7}$. Написать числа им противоположные.

8. Объяснить, почему $-1>-2$; $1>-1$; $0>-5$.

9. Даны два выражения:

$$(-101)\cdot(-102)\cdot(-103) \text{ и } (-0{,}125)\cdot(-0{,}84).$$

Не производя вычислений, установить, какое из них имеет большее значение. Отв. Второе.

10. Даны два выражения:

$$(-123)\cdot(-124)\cdot(-125) \text{ и } 19\cdot 37\cdot 43\cdot 0.$$

Не производя вычислений, установить, какое из них имеет большее значение. Отв. Второе.

11. Расположить 5; -5; 3; -3; 1; -1 в порядке их возрастания и отметить на числовой оси соответствующие им точки.

12. Найти произведение трех последовательных возрастающих целых чисел начиная с -3. Отв. -6.

13. Найти произведение четырех последовательных возрастающих целых чисел начиная с -3. Отв. 0.

14. Найти произведение трех последовательных убывающих целых чисел начиная с -3. Отв. -60.

15. Найти значение каждого из следующих выражений:

1) $-[-(-15)]$;
2) $-\{-[-(-15)]\}$;
3) $-[+(-15)]$;
4) $-\{+[-(-15)]\}$.

Отв. -15; 15; 15; -15.

16. Температура воздуха в комнате 18°C, а снаружи -12°C. Вычитая из числа 18 число -12, узнать, на сколько градусов температура в комнате выше температуры наружного воздуха.

17. Относительно уровня вершины Арарата высота Эльбруса выражается числом 477 *м*, а высота Монблана — числом -346 *м*. Вычитая из числа $+477$ число -346, узнать, на сколько метров Эльбрус выше Монблана. Отв. 823.

18. Под действием двух сил -10 *кГ* и $+3$ *кГ*, направленных вдоль оси X_1X, тело переместилось по этой оси на -12 *м*. Найти работу, произведенную каждой из данных сил. Отв. 120 и -36 *кГм*.

ГЛАВА II
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ФОРМУЛЫ
§ 1. УПОТРЕБЛЕНИЕ БУКВ ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧИСЕЛ

В алгебре числа обозначаются не только цифрами, но и буквами. Благодаря этому появляются новые способы решения задач. Однако начинающему изучать алгебру может показаться, что употреблять буквы для обозначения чисел не нужно, что это может привести к путанице. Такое отношение к буквенным обозначениям чисел является глубоко ошибочным. Алгебра как наука стала быстро и плодотворно развиваться только после того, как в нее было введено употребление букв для обозначения чисел и величин. Без буквенных обозначений был бы немыслим тот резкий скачок в развитии математических наук, который начался с XVII века. (Буквенное обозначение чисел было введено впервые лишь в XVI веке.)

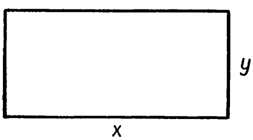


Рис. 25.

Сначала покажем на примерах, когда нет пользы обозначать число буквой и когда это делать полезно и даже необходимо.

Пример 1. Когда бригадир докладывает мастеру устно или письменно о количестве деталей, изготовленных его бригадой за смену, то он произносит наименование числа или записывает его цифрами. Например, говорит «сто двадцать» или записывает «120». В данном случае нет смысла число обозначать буквой.

Пример 2. Если же мы хотим назвать число рабочих данного завода, у которых разряд производственной квалификации повысится в течение текущего года, то мы можем это число обозначить какой-нибудь буквой, например a, так как мы еще не знаем, сколько таких рабочих окажется. Если таких рабочих окажется 19, то мы скажем, что $a=19$, если их окажется 6, то $a=6$, если же не окажется ни одного, то $a=0$.

Пример 3. Пусть мы хотим назвать числа, выражающие длину и ширину прямоугольного участка земли с общей границей 200 *м* и с площадью 2176 *кв. м* (рис. 25). Изобразить эти числа с помощью цифр мы не можем, так как еще не знаем ни длину, ни ширину участка. Значит, и в данном случае удобно будет обозначить длину, выраженную в метрах, например, буквой x (икс), а ширину — буквой y (игрек).

При этих обозначениях должны иметь место равенства:

$$x+y=100,$$
$$x\cdot y=2176.$$

Действительно, сумма длины и ширины равна половине общей границы, а произведение длины на ширину равно площади участка.

Если бы нам удалось найти длину и ширину участка, то оказалось бы, что в данном случае $x=68$, $y=32$.

Пример 4. Пусть электровоз движется без остановок со скоростью 80 *км* в час по железной дороге по направлению от Ленинграда к Москве и пусть в нуль часов (т. е. в полночь) проходит ст. Бологое. Расстояние от ст. Бологое в сторону Москвы будем считать положительным, а в сторону Ленинграда отрицательным. При этих условиях расстояние от ст. Бологое до электровоза будет все время изменяться, а потому не может быть выражено каким-нибудь одним числом. Целесообразно величину этого расстояния обозначить какой-нибудь буквой, например буквой S. Тогда через час после полуночи $S=80$; через 1 час 30 минут $S=120$ и т. д. За один час до полуночи $S=-80$; за 1 час 30 минут до полуночи $S=-120$ и т. д.

В алгебре любая буква, например a, может в одном случае обозначать собой отрицательное число -5, а в другом положительное число $+17\frac{1}{2}$ и т. д., т. е. под буквой a мы можем подразумевать, вообще говоря, любое известное или неизвестное число.

Наряду с этим буквы употребляются и для обозначения величин. Например, длину металлического стержня, подвергающегося нагреванию, можно обозначить буквой l. В каждый отдельный момент буква l будет обозначать число, определяющее длину стержня в этот момент. (Известно, что металлический стержень при нагревании удлиняется.)

Если буквой a обозначено число жильцов в доме, то a может обозначать лишь целое положительное число.

Если буквой a обозначена длина веревки, то a может обозначать лишь положительное число, не обязательно целое.

Если буквой a обозначена температура, то a может обозначать как положительное, так и отрицательное число.

Если длину прямоугольного участка мы обозначили буквой x, то его ширину должны будем обозначить уже какой-нибудь другой буквой, например y.

Знаки действий. Для указания первых четырех действий в алгебре употребляются те же знаки, что и в арифметике. При этом в качестве знака умножения применяется преимущественно точка, а не косой крест; в качестве знака деления употребляется преимущественно черта дроби, а не двоеточие.

Таким образом, сумма, разность, произведение, частное (а также и отношение) чисел, обозначенных буквами a и b, записывают следующим образом:

$$a+b,\ a-b,\ a\cdot b,\ \frac{a}{b}\ (\text{реже } a:b).$$

Скобки в алгебре употребляются так же, как и в арифметике: они определяют порядок действий в том смысле, что сначала надлежит выполнить действия, указанные внутри скобок.

Если при рассмотрении какого-либо вопроса одна и та же буква, например буква x, употребляется несколько раз, то под значением этой буквы во всех случаях мы должны мыслить одно и то же.

Например, если имеется частное $(x+2):(x+1)$ и если букве x, стоящей в делимом, мы припишем значение $+7$, то букве x, стоящей в делителе, мы обязаны будем приписать то же самое значение $+7$.

Для обозначения чисел общепринято употреблять буквы преимущественно латинского и греческого алфавитов. (Эти алфавиты помещены в конце вступительной статьи «Учащимся о математике».)

Возникает естественный вопрос: какие же обстоятельства, кроме указанных выше, побуждают нас к тому, чтобы употребление букв для обозначения чисел сделать систематическим и какая от этого получается польза? На этот вопрос очень трудно дать ответ, который, с одной стороны, был бы полным и конкретным, а с другой — оказался бы доступным пониманию лица, только что приступившего к изучению элементарной алгебры. Однако некоторые пояснения все же уместно сделать сейчас.

Пусть требуется решить, например, такую задачу. Смешали кофе двух сортов: 12 *кг* ценой по 4 руб. за 1 *кг* с 8 *кг* ценой по 4,5 руб. за 1 *кг*. Определить цену 1 *кг* смеси.

Решение этой задачи можно получить с помощью следующей последовательности действий:

1) $4\cdot 12=48$;	4) $12+8=20$;
2) $4{,}5\cdot 8=36$;	5) $84:20=4{,}2$.
3) $48+36=84$;	

На этом примере дана иллюстрация того, что решение всякой более или менее сложной арифметической задачи сводится к выполнению некоторой определенной последовательности действий над числами, данными в условии задачи. В итоге всех этих действий получается числовой ответ задачи. Если же мы эти действия не станем выполнять, а будем их только указывать, то в итоге получим некоторое арифметическое выражение, значение которого и будет ответом задачи.

Для сформулированной выше задачи получится следующее арифметическое выражение:

$$\frac{4\cdot 12+4{,}5\cdot 8}{12+8}.$$

Значение этого выражения равно 4,2. Следовательно, цена смеси 4,2 руб. за 1 *кг*.

Решение задачи, записанное в виде арифметического выражения, имеет то преимущество, что позволяет видеть в собранной форме ту последовательность действий, которая решает данную задачу.

Если мы изменим числа, данные в условии задачи, то полученная в написанном выше арифметическом выражении последовательность действий не изменится. Так, например, если смешать 85 *кг* кофе ценой по 3,5 руб. за 1 *кг* с 15 *кг* ценой по 4,5 руб. за 1 *кг*, то цена 1 *кг* смеси в рублях за 1 *кг* изобразится выражением:

$$\frac{3{,}5\cdot 85+4{,}5\cdot 15}{85+15}.$$

Решим эту же задачу в общем виде, т. е. в предположении, что количества и цены двух сортов кофе какие угодно.

Пусть смешали p *кг* кофе ценой в a руб. за 1 *кг* с q *кг* ценой в b руб. за 1 *кг*. Тогда цена смеси в рублях за 1 *кг* изобразится выражением:

$$\frac{a\cdot p+b\cdot q}{p+q}.$$

Конечно, числовое значение последнего выражения не будет определенным; оно будет зависеть от того, какие отдельные числовые значения мы станем давать буквам a, b, p и q.

Однако наряду с этим выражение

$$\frac{a\cdot p+b\cdot q}{p+q}$$

имеет то преимущество перед простым числовым ответом, что оно, во-первых, является общим решением задачи, т. е. решением при любых данных, и, во-вторых, позволяет видеть в собранной форме план или правило решения поставленной задачи.

При изменении значений букв a, b, p и q или даже при изменении значения одной из этих букв будет изменяться, вообще говоря, и значение выражения

$$\frac{a\cdot p+b\cdot q}{p+q}.$$

При $a=42$; $b=50$; $p=8$ и $q=2$
получим

$$\frac{42\cdot 8+50\cdot 2}{8+2}=\frac{436}{10}=43{,}6.$$

При $a=42$; $b=50$; $p=3$ и $q=2$ получим

$$\frac{42\cdot 3+50\cdot 2}{3+2}=\frac{226}{5}=45{,}2.$$

Рассмотрим несколько других примеров.

1. Пусть длина комнаты равна a *м*, а ширина — b *м*; тогда площадь комнаты в *кв м.* выразится произведением

$$a\cdot b.$$

2. Пусть магазин принял со склада m *м* сукна ценой по a руб. за 1 *м* и n *м* драпа ценой по b руб. за 1 *м*. Тогда стоимость принятого товара в рублях изобразится следующей суммой двух произведений:

$$a\cdot m+b\cdot n.$$

3. Пусть требуется найти $p\%$ от числа A.

Один процент числа A будет $\frac{A}{100}$, а p процентов от числа A изобразится выражением

$$\frac{A}{100}\cdot p.$$

4. Площадь поперечного сечения цилиндрической колонны равна S *кв. см*, а высота — h *м*. Пусть 1 *куб. см* материала колонны весит d *г*. Тогда вес колонны в тоннах представится выражением

$$\frac{S}{10000}\cdot h\cdot d,$$

так как S *кв. см* составляют $\frac{S}{10000}$ *кв. м* и 1 *куб. м* материала колонны весит d *т*.

Таким образом, буквенное обозначение чисел позволяет получать решение задач в общем виде и тем самым выражать в краткой форме весь ход решения задачи.

§ 2. СТЕПЕНЬ

Произведение, состоящее из одинаковых множителей, называется степенью.

Повторяющийся множитель называется **основанием степени**, а число всех одинаковых множителей называется **показателем степени**.

Например, произведение $7\cdot 7\cdot 7\cdot 7$ есть степень; основанием этой степени служит число 7, а показателем — число 4.

Произведение $4\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{2}\cdot 4\frac{1}{2}$ есть степень; основание этой степени равно $4\frac{1}{2}$, а показатель равен 3.

Степень кратко записывают так: пишут основание степени, а справа от него вверху пишут показатель степени.

Вместо $7\cdot7\cdot7\cdot7$ пишут 7^4.

Вместо $4\frac{1}{2}\cdot4\frac{1}{2}\cdot4\frac{1}{2}$ пишут $\left(4\frac{1}{2}\right)^3$.

Вместо произведения $x\cdot x\cdot x\cdot\ldots\cdot x$, в котором множитель x повторяется n раз, пишут x^n.

Здесь n — любое натуральное число.

Выражение x^n называется n-й (читается: «энной») степенью числа x. Здесь x есть основание степени, а n — показатель степени.

Убедитесь, что

$$1024=2^{10} \text{ и что } 190\,000\,000=19\cdot10^7.$$

Квадрат числа. Вторая степень числа a, т. е. $a\cdot a$, или a^2, называется квадратом числа a. Это объясняется тем, что степень a^2 выражает площадь квадрата со стороной a.

Куб числа. Третья степень числа a, т. е. $a\cdot a\cdot a$, или a^3, называется кубом числа a. Это объясняется тем, что степень a^3 выражает объем куба с ребром a.

Выражение a^2 читается: «a квадрат». Выражение a^3 читается: «a куб».

Первая степень числа. Выражение a^1 (читается: «a в первой степени») означает само число a, т. е. $a^1=a$. Показатель степени 1 обычно не пишется.

Примеры:

$$1^2=1;\ 2^2=4;\ 3^2=9;\ 4^2=16; 1^3=1;\ 2^3=8;\ 3^3=27;\ 4^3=64;$$
$$1^9=1;\ 2^9=512;\ (-5)^3=-125;\ (-5)^4=625;$$
$$38\,000\,000=38\cdot10^6.$$

Пользуясь законами умножения, переместительным и сочетательным, можно вместо выражения

$$a\cdot b\cdot a\cdot a\cdot b$$

написать $(a\cdot a\cdot a)\ (b\cdot b)$, или $a^3\cdot b^2$.

Действие, с помощью которого вычисляется значение степени, называется возведением в степень.

§ 3. КОЭФФИЦИЕНТ

Числовой множитель буквенного выражения называется числовым коэффициентом, а чаще просто коэффициентом.

Например, в выражениях

$$5\cdot x\cdot y;\quad 1{,}4\cdot a^2\cdot b;\ \frac{3}{4}\cdot b\cdot c^3$$

коэффициентами служат соответственно числа 5; 1,4; $\frac{3}{4}$.

В каждом из выражений

$$a;\ a\cdot b;\ a^2\cdot b^3$$

коэффициент равен 1, так как

$$a = 1 \cdot a;\ a \cdot b = 1 \cdot a \cdot b;\ a^2 \cdot b^3 = 1 \cdot a^2 \cdot b^3.$$

В каждом из выражений $-a$; $-a \cdot b$; $-a^2 \cdot b^3$ коэффициент равен -1.

Коэффициент «единица» обычно не пишется.

Для вычисления суммы нескольких одинаковых слагаемых достаточно одно из слагаемых умножить на их число, например,

$$7\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} \cdot 4 = 30;$$

$$\underbrace{19 + 19 + 19 + \ldots + 19}_{100\ \text{слагаемых}} = 19 \cdot 100 = 1900.$$

$$a + a + a = a \cdot 3 = 3 \cdot a.$$

Здесь число 3 является коэффициентом.

$$\underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{100\ \text{слагаемых}} = a \cdot 100 = 100 \cdot a.$$

Здесь число 100 является коэффициентом.

Таким образом, целые коэффициенты возникают при сложении одинаковых чисел.

Пользуясь коэффициентом, можно записывать суммы одинаковых слагаемых кратко в виде произведения.

Например, при любых значениях букв a и b можно сумму

$$a + a + a + a + a + b + b + b + b$$

записать кратко так:

$$5 \cdot a + 4 \cdot b.$$

Выражение, содержащее не целый коэффициент, например выражение $2\frac{3}{7}a$, нельзя толковать как сумму $2\frac{3}{7}$ слагаемых, так как число слагаемых является натуральным числом.

Если требуется записать произведение нескольких чисел, из которых одни выражены числами, другие — буквами, то сначала пишут произведение числовых множителей, затем — буквенные множители в алфавитном порядке. При этом знаки умножения опускаются (не пишутся). Например, произведение чисел

$$b;\ 8;\ a;\ x;\ \frac{5}{4};\ c$$

следует записать так:

$$10abcx.$$

Вместо $6cba$ следует писать $6abc$.

§ 4. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ И ЕГО ЧИСЛОВОЕ ЗНАЧЕНИЕ

В дальнейшем нам постоянно придется иметь дело с алгебраическими выражениями. Что же такое алгебраическое выражение?

Определение. ***Выражение, в котором указано, какие действия и в каком порядке надо произвести над данными числами, называется алгебраическим выражением.*** (Эти числа могут быть обозначены и буквами и цифрами.)

Примеры алгебраических выражений:

$$a+b;\ 7ab;\ (a+b)(b-a);\ \frac{S}{a+b};\ \frac{vt}{60};$$
$$ax^2+bx+c;\ x^3-1.$$

Примечание. Любую букву, обозначающую число, и любое число, изображенное с помощью цифр, принято считать в алгебре также алгебраическим выражением. Например, x; 0; 1; $\frac{1}{9}$; 7 суть алгебраические выражения.

Порядок действий. Если в алгебраическом выражении нет скобок, то сначала выполняется возведение в степень, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание.

Например, в выражении $x+pq$ сначала p умножается на q, а затем полученное произведение прибавляется к x; в выражении $(x+p)q$ сначала x складывается с p, а затем полученная сумма умножается на q; в выражении pq^2 сначала q возводится во вторую степень, а затем p умножается на полученный результат; в выражении $(pq)^2$ сначала p умножается на q, а затем полученный результат возводится во вторую степень; в выражении x^2+p^2 сначала x возводится во вторую степень, затем p возводится во вторую степень и, наконец, полученные степени складываются.

В выражении $\frac{ab}{pq}$ сначала выполняется умножение числа a на b, затем умножение p на q. Наконец, первое произведение делится на второе.

Числовое значение алгебраического выражения. Числовым значением алгебраического выражения при заданных значениях букв называется тот результат, который получится после замены букв их числовыми значениями и выполнения всех действий.

Приведем примеры.

Пусть под буквой a подразумевается число -5. Тогда

$$a=-5;\ -a=-(-5)=+5.$$
$$a^2=(-5)^2=(-5)\cdot(-5)=+25.$$
$$-a^2=-(-5)^2=-(-5)\cdot(-5)=-(+25)=-25.$$
$$a+a^2=(-5)+(-5)^2=(-5)+(+25)=+20.$$
$$a-a^2=(-5)-(-5)^2=(-5)-(+25)=(-5)+(-25)=$$
$$=-30.$$
$$a-a^3=(-5)-(-5)^3=(-5)-(-125)=(-5)+(+125)=$$
$$=+120.$$

Пусть $a=-5$ и $b=-3$.
Тогда

$$(a+b)(a-b)=[(-5)+(-3)][(-5)-(-3)]=(-8)\cdot(-2)=16.$$

$$a^2-b^2=(-5)^2-(-3)^2=25-9=16.$$

$$\frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}=\frac{(-5)^3+(-3)^3}{(-5)^2-(-5)(-3)+(-3)^2}=$$

$$=\frac{(-125)+(-27)}{25-15+9}=\frac{-152}{19}=-8.$$

$$a^2b^3=(-5)^2\cdot(-3)^3=25\cdot(-27)=-675.$$

$$a^3\cdot b^2=(-5)^3\cdot(-3)^2=(-125)\cdot 9=-1125.$$

Замечание. Выражение $+a$ или просто a может иметь положительное, отрицательное и нулевое значение. Например, при $a=-5$ выражение $+a$ имеет отрицательное значение -5.

Выражение $-a$ также может иметь положительное, отрицательное и нулевое значение. Например, при $a=-5$ выражение $-a$ имеет положительное значение $+5$.

Написанные ниже равенства

$$\begin{array}{ll}
a-(+b)=a+(-b); & a-(-b)=a+(+b); \\
(+a)\cdot(+b)=+ab; & +(+a)=a; \\
(+a)\cdot(-b)=-ab; & +(-a)=-a; \\
(-a)\cdot(+b)=-ab; & -(+a)=-a; \\
(-a)\cdot(-b)=+ab; & -(-a)=+a
\end{array}$$

справедливы при любых значениях букв a и b.

Справедливость каждого из этих равенств легко доказать путем рассмотрения в отдельности каждого из следующих возможных случаев:

$$\begin{array}{ll}
1)\ a>0 \text{ и } b>0; & 5)\ a=0 \text{ и } b\neq 0; \\
2)\ a<0 \text{ и } b<0; & 6)\ a\neq 0 \text{ и } b=0; \\
3)\ a>0 \text{ и } b>0; & 7)\ a=0 \text{ и } b=0. \\
4)\ a<0 \text{ и } b<0; &
\end{array}$$

Равенство $a=-a$ справедливо тогда и только тогда, когда $a=0$. (Два противоположных числа равны друг другу лишь тогда, когда каждое из них равно нулю.)

§ 5. ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БУКВ

Встречаются такие алгебраические выражения, которые теряют смысл при некоторых значениях входящих в них букв.

Примеры:

1. Выражение $\frac{1}{x}$ теряет смысл при $x=0$.

2. Выражение $\frac{1}{x^2-1}$ теряет смысл при $x=1$ и при $x=-1$.

3. Выражение $\frac{1}{a-2b}$ теряет смысл при $a=1$ и $b=\frac{1}{2}$, при $a=2$ и $b=1$ и при многих других парах значений букв a и b.

4. Выражение $\frac{x^2-25}{x-5}$ теряет смысл при $x=5$, так как при $x=5$ оно обращается в $\frac{0}{0}$.

Определение. ***Все такие значения букв, при которых данное выражение не теряет смысла, называются допустимыми для данного выражения.***

Примеры:

Допустимыми значениями для выражений

$$1+x^2;\quad 1-x^2;\quad (a+b)^2$$

являются любые значения входящих в них букв.

Допустимыми значениями

а) для $\frac{1}{x}$ являются все значения x, кроме $x=0$;

б) для $\frac{1}{x^2-1}$ — все значения x, кроме $x=1$ и $x=-1$;

в) для $\frac{x^2-25}{x-5}$ — все значения x, кроме $x=5$;

г) выражение $\frac{1}{x-x}$ не имеет ни одного допустимого значения буквы x.

Примечание. Значения буквы или букв, обращающие знаменатель дроби в нуль, заслуживают особого внимания. В этих случаях дробь теряет смысл.

Примеры:

Выражение $\frac{1}{(x-1)(x-2)}$ теряет смысл при $x=1$ и $x=2$.

Выражение $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ теряет смысл при $x=-1$ и $x=-2$.

§ 6. КРАТКОЕ НАЗВАНИЕ И ПОЛНАЯ СЛОВЕСНАЯ ФОРМУЛИРОВКА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Краткие названия.

1. Если в алгебраическом выражении последнее по порядку действие есть сложение, то выражение называется суммой.

Например, выражения

$$a+b;\ ab+8;\ a^2+b^2;\ a+b(x+y);\ a+b^2c^2;\ a+\frac{b}{2}$$

суть суммы.

2. Если последнее действие есть вычитание, то выражение называется разностью.

Например, выражения

$$2-a;\ 10-5a;\ a^2-b^2;\ a-\frac{2}{b};\ a-b(x+y)$$

суть разности.

3. Если в выражении последнее действие есть умножение, то это выражение называется **произведением**.

Например, выражения

$$ab;\ (a-b)\cdot c;\ a^3\cdot b^3$$

суть произведения.

Произведение, составленное из нескольких букв, принято записывать с соблюдением алфавитного порядка.

Например, вместо b^2c^3a пишут ab^2c^3.

4. Если в выражении последнее действие есть деление, то это выражение называется **частным**.

Например, выражения

$$\frac{a}{b};\ \frac{a+b}{a-b};\ \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

суть частные.

5. Если в выражении последнее действие есть возведение в степень, то это выражение называется **степенью**. Например, выражения

$$a^2;\ (a+b)^2;\ (ab)^3$$

суть степени.

Примечание. Если последнее действие есть возведение во вторую степень, то выражение называется квадратным, а если в третью, то кубом.

Например, выражение $(a+b)^2$ есть квадрат;
» » $(a-b)^3$ » куб;
» » $(ab)^3$ » куб.

Полные словесные формулировки

a^2+b^2 — сумма квадратов чисел a и b;
$(a+b)^2$ — квадрат суммы чисел a и b;
$(a+b)(a-b)$ — произведение суммы чисел a и b на их разность;
a^3-b^3 — разность кубов чисел a и b;
$(a-b)^3$ — куб разности чисел a и b;
$(a+b)^n$ — n-я степень суммы чисел a и b;
$\frac{a^2+b^2}{xy}$ — частное от деления суммы квадратов чисел a и b на произведение чисел x и y;
$3a^2b$ — утроенное произведение квадрата числа a на число b.

Обратим внимание на то, что полное название выражения a^2+b^2 мы начали со слова «сумма», потому что в этом выражении последнее действие есть сложение; полное название выражения $(a+b)^2$ мы начали со слова «квадрат», потому что в этом выражении последнее действие есть возведение в квадрат. Полное название выражения a^2-b^2 мы должны начинать со слова «разность», а выражение a^2b^2 — со слова «произведение».

Если бы последнее действие было деление, то мы должны были бы начинать формулировку со слова «частное».

Если n есть любое целое число, то выражение $2n$ есть общий вид четного числа, а выражение $(2n+1)$ есть общий вид нечетного числа.

Полагая $n=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \ldots$, получим, что

$$2n=0;\ \pm2;\ \pm4;\ \pm6;\ \ldots,$$
$$2n+1=1;\ 3;\ -1;\ 5;\ -3;\ -5;\ \ldots.$$

Запись выражений по данной словесной формулировке. Частное от деления суммы кубов чисел x и y на куб их суммы запишется так:

$$\frac{x^3+y^3}{(x+y)^3}.$$

Пятая степень суммы квадратов чисел x и y запишется так:

$$(x^2+y^2)^5.$$

Произведение трех последовательных четных чисел можно записать так:

$$2k(2k+2)(2k+4),$$

а произведение трех последовательных нечетных чисел — так:

$$(2k+1)(2k+3)(2k+5).$$

Если x есть цифра десятков, y — цифра единиц двузначного числа, то произведение этого двузначного числа на сумму его цифр запишется так:

$$(10x+y)(x+y).$$

§ 7. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СУММА

Выражение $7-4$ понимается в арифметике в единственном смысле, а именно как разность между числами 7 и 4.

В алгебре же это выражение можно понимать двояко:

либо как разность $(+7)-(+4)$,
либо как сумму $(+7)+(-4)$.

И в том и в другом случае результат равен 3.

Поэтому выражение $7-4$ можно считать краткой записью суммы $(+7)+(-4)$, или, что то же самое, суммы $7+(-4)$.

Аналогично можно считать выражение $7-3+12-4$ краткой записью суммы

$$(+7)+(-3)+(+12)+(-4),$$

или, что то же самое, суммы

$$7+(-3)+12+(-4).$$

Выражение $-a+b+c-d$ можно рассматривать как сумму четырех слагаемых: $-a$; $+b$; $+c$; $-d$, т. е. как сумму $(-a)+(+b)+(+c)+(-d)$, или, что то же самое, как сумму $(-a)+b+c+(-d)$.

Ввиду того что в алгебре разность можно рассматривать как сумму, то выражения $7-4$: $7-3+12-4$; $-a+b+c-d$ и им подобные называются алгебраическими суммами.

Слагаемые алгебраической суммы называются ее членами. Например, членами алгебраической суммы $a-b-c$ будут ее слагаемые a; $-b$; $-c$.

Члены алгебраической суммы можно переставлять в любом порядке, например:

$$a-b-c=-b+a-c=-b-c+a \text{ и т. д.}$$

До сих пор мы рассматривали лишь простейшую форму алгебраической суммы.

В более широком понимании алгебраической суммой называется запись, состоящая из чисел или алгебраических выражений, соединенных между собой знаками сложения и вычитания. Например, выражения

$$(-14)+(-3)-(-5)-(-4);$$
$$(-a)-(+b)+(-c)-(-d);$$
$$(-14)+(-3)-(-c)-(+d)$$

также считаются алгебраическими суммами.

Теперь покажем, как придать простейшую форму алгебраической сумме, записанной не в простейшей форме.

Возьмем, например, алгебраическую сумму

$$(-14)-(+8)+(+a)-(-b).$$

Пользуясь тем, что вычитание можно заменять сложением с числом, противоположным вычитаемому, мы можем нашу алгебраическую сумму записать так:

$$(-14)+(-8)+(+a)+(+b).$$

Следовательно, наша первоначальная сумма примет следующую простейшую форму:

$$-14-8+a+b.$$

Переход от выражения $(-14)+(-8)+(+a)+(+b)$ к выражению $-14-8+a+b$ достигается так: в выражении $(-14)+$ $+(-8)+(+a)+(+b)$ отбрасываются все знаки действия сложения и все скобки, а числа, находящиеся в скобках, записываются одно за другим с их знаками.

Примечание. Когда мы рассматриваем выражение $7-4$ как разность, то знак минус является знаком действия вычитания; в этом случае число 7 выступает в качестве уменьшаемого, а число 4 — в качестве вычитаемого. Когда же мы рассматриваем выражение $7-4$ как алгебраическую сумму, то знак минус перестает быть знаком действия вычитания. В этом случае число 7 выступает в качестве первого слагаемого, а в качестве второго слагаемого выступает число (-4).

Распределительный закон умножения распространяется и на алгебраическую сумму.

Пример:

$$(5-7-4)\cdot(-2)=[5+(-7)+(-4)]\cdot(-2)=$$
$$=5\cdot(-2)+(-7)\cdot(-2)+(-4)\cdot(-2)=-10+14+8=12,$$

или короче

$$(5-7-4)\cdot(-2)=-10+14+8=12.$$

Выражение $|a+b+c|$, в котором a, b и c — любые числа (положительные и отрицательные), представляет собой абсолютную величину алгебраической суммы.

Выражение же $|a|+|b|+|c|$, где a, b и c — любые числа, представляет собой сумму абсолютных величин.

§ 8. ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

Одночлен. Каждое выражение, представляющее собой произведение числового множителя и одного или нескольких буквенных множителей, относится к классу выражений, называемых одночленами.

Например, выражения

$$ab;\quad 5x^2y;\quad 7a(b+c)$$

суть одночлены.

Выражение, состоящее только из одной буквы, также считается одночленом. Одночленом считается и всякое отдельное число, записанное цифрой или цифрами. Например, выражения a; 7; 1; 0; -9; 725 и т. д. суть одночлены.

Многочлен. Алгебраическая сумма нескольких одночленов относится к классу выражений, называемых многочленами.

Например, выражения

$$a+b-c;\quad 3x-2y-z;\quad ab+ac+bc;\quad x^2-y^2$$

суть многочлены.

Одночлены, входящие в многочлен, называются его членами. Например, многочлен $7a+3b-5c-14$ составлен из членов $7a$, $3b$, $-5c$ и 14.

Обобщение определения одночлена и многочлена. При выполнении операций над алгебраическими выражениями нам часто бывает необходимо знать, является ли это выражение одночленом или многочленом.

Поэтому необходимо все алгебраические выражения разделить на два класса: на одночлены и многочлены.

Такое разделение легко сделать, приняв следующие определения одночлена и многочлена.

Одночленом называется всякое выражение, в котором последним по порядку действием является не сложение и не вычитание.

Например, выражения

$$(a+b+c)x;\ \frac{a+1}{a-1};\quad x^3;\quad (a+b)^2;\quad -abc;\quad 5a^2b^3$$

суть одночлены.

Многочленом называется всякое выражение, в котором последним по порядку действием является сложение или вычитание.

Например, выражения

$$a+1;\quad a-b;\quad a^2-b^2;\quad ab+c;\quad a^2+2ab+b^2;$$
$$-a+bc;\quad x^2-x-1;\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{a};\quad a^2b^2c^2+1$$

суть многочлены.

Выражение

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+kx+l,$$

в котором показатель степени n является натуральным числом и коэффициент a отличен от нуля, называется многочленом n-й степени относительно x.

Среди других многочленов этот многочлен занимает особо важное место.

Давая показателю степени n последовательно значения 1, 2, 3, 4 и т. д., получим многочлены первой, второй, третьей, четвертой и т. д. степени.

Эти многочлены могут быть записаны так:

$$\begin{aligned}&ax+b;\\ &ax^2+bx+c;\\ &ax^3+bx^2+cx+d;\\ &ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Любое алгебраическое выражение является либо одночленом, либо многочленом. Никаких других алгебраических выражений, кроме одночленов и многочленов, нет.

§ 9. ФОРМУЛЫ

Запись

$$A=B$$

называется равенством, а каждая из записей

$$A>B;\quad A\geqslant B;\quad A<B;\quad A\leqslant B \text{ — неравенством.}$$

Буква A представляет собой левую часть равенства (или неравенства), а B — правую.

Вместо букв A и B могут стоять какие-либо алгебраические выражения.

Равенства и неравенства могут быть верные или неверные, например:

$4+6=2\cdot 5$ — верное равенство;
$4+6=3\cdot 4$ — неверное равенство;
$4+6>9$ — верное неравенство;
$4+6>11$ — неверное неравенство.

Существуют равенства и неравенства, называемые формулами. Что же такое формула?

Формулой называется равенство или неравенство, выражающее зависимость или соотношение между величинами.

Приведем примеры.

Формула $S=ab$ выражает зависимость между тремя величинами, например между площадью S прямоугольника и длинами a и b его сторон.

Формула $F=ma$ выражает зависимость между силой F, массой m и ускорением a. (Эта формула изучается в физике.)

Формула $a<b+c$ выражает, например, соотношение между сторонами треугольника, а именно то, что одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Формулой называется также и равенство (или неравенство), выражающее какое-либо общее свойство чисел.

Приведем примеры.

Формула $ab=ba$ выражает общее свойство чисел, а именно то, что произведение двух чисел не меняется от перемены мест множителей.

Формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ выражает общее свойство чисел, а именно то, что квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа. (Вывод этой формулы дан на стр. 71 и 81.)

Формула $a^2+b^2>2ab$ выражает общее свойство чисел, а именно то, что сумма квадратов двух различных чисел больше удвоенного произведения этих чисел. (Эта формула выведена на стр. 88.)

Дополнение к вопросу о сравнении чисел. Из принятого определения о сравнении чисел вытекает следующее:

1. Если разность между числами A и B положительна, (т. е. $A-B>0$), то число A больше, чем число B, или, короче, $A>B$.

Например, разность между числами -3 и -5 положительна. При этом число -3 действительно больше, чем число -5.

2. Если разность между числами A и B отрицательна (т. е. $A-B<0$), то число A меньше, чем число B.

Например, разность между числами —5 и —3 отрицательна. При этом число —5 действительно меньше, чем число —3.

Таким образом, чтобы доказать, что $A > B$, достаточно убедиться, что разность $A - B$ есть число положительное.

Чтобы доказать, что $A < B$, достаточно доказать, что разность $A - B$ отрицательна.

§ 10. ПРЕДЛОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ПОНЯТИЕМ АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Как нам уже известно, абсолютной величиной положительного числа называется само это число. Абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему число.

Абсолютной величиной числа нуль называется само число нуль.

Абсолютная величина числа по определению никогда не может быть числом отрицательным, т. е. $|x| \geqslant 0$.

Знак $\geqslant$ читается так: «больше или равно».

Запись $(x-5)^2 \geqslant 0$ читается так: «$(x-5)^2$ больше или равно нулю». Здесь равенство нулю будет иметь место тогда и только тогда, когда $x=5$.

Запись $-x^2 \leqslant 0$ читается так: «$-x^2$ меньше или равно нулю». Здесь равенство нулю будет тогда и только тогда, когда $x=0$.

В том случае, когда буква x обозначает собой положительное число, верно следующее равенство:

$$|x| = x.$$

В том же случае, когда буква x представляет собой отрицательное число, будет верным следующее равенство: $|x| = -x$. Например,

$$|-5| = -(-5) = 5.$$

Сказанное можно записать короче так:

$$\text{если } x > 0, \text{ то } |x| = x;$$
$$\text{если } x < 0, \text{ то } |x| = -x.$$

Очевидно, что при любом значении буква a

$$|-a| = |a|,$$

т. е. два противоположных числа всегда имеют одинаковую абсолютную величину.

При любых значениях буквы a и b значения выражений $a-b$ и $b-a$ представляют собой числа противоположные, т. е.

$$|a-b| = |b-a|.$$

Легко понять, что

$$\left|-2\frac{1}{3}a^2b\right| = \left|2\frac{1}{3}a^2b\right|;$$
$$|-a^2| = |a^2| = a^2.$$

Равенство $|x|=x$ верно при всех положительных значениях x и при $x=0$ и несправедливо при всех отрицательных значениях x.

Равенство $|x|=-x$ верно при всех отрицательных значениях x и при $x=0$ и несправедливо при всех положительных значениях x.

Если $|x|<1$, то буква x может принимать только значения, заключающиеся между -1 и $+1$.

Если $|x|>1$, то x может принимать значения как больше $+1$, так и меньше -1.

Если $|x|\leqslant 1$, то это значит, что $-1\leqslant x\leqslant 1$, т. е, что x может принимать лишь значения от -1 до $+1$ включительно.

Если $|x|=1$, то либо $x=1$, либо $x=-1$.

Если $|2x-1|=10$, то либо $2x-1=10$, либо $2x-1=-10$.

Свойства абсолютных величин

Абсолютная величина алгебраической суммы. Очевидно, что

$$|3+4+11|=|3|+|4|+|11|;$$
$$|-3-4-11|=|-3|+|-4|+|-11|.$$

Обобщая это, замечаем, что если все числа a, b и c одновременно положительны или отрицательны, то

$$|a+b+c|=|a|+|b|+|c|.$$

Поскольку очевидно также, что

$$|10-3-14|<|10|+|-3|+|-14|$$

и

$$|-10+3+14|<|-10|+|3|+|14|,$$

путем обобщения устанавливаем, что если среди чисел a, b и c имеются и положительные и отрицательные, то

$$|a+b+c|<|a|+|b|+|c|.$$

Если считать, что буквы a, b и c суть любые числа, то правильна следующая запись:

$$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|.$$

Этот результат формулируется словами так:

Абсолютная величина алгебраической суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых.

Очевидно, что

$$|a-b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|.$$

Здесь знак равенства имеет место тогда, когда все числа a, $-b$ и c либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны. Если же среди чисел a, $-b$ и c имеются и положительные и отрицательные, то знак равенства отпадает и остается только знак «меньше» ($<$).

Абсолютная величина произведения. Очевидно, что

$$|(-5)\cdot(+3)|=15; \qquad |(-5)\cdot(-3)|=15.$$

Из определения произведения следует, что

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|,$$

т. е. ***абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин множителей.***

Абсолютная величина дроби. Докажем, что ***абсолютная величина дроби равна абсолютной величине числителя, деленной на абсолютную величину знаменателя,*** т. е.

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}.$$

Действительно,

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\left|a\cdot\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\left|\frac{1}{b}\right|=|a|\cdot\frac{1}{|b|}=\frac{|a|}{|b|},$$

что и требовалось доказать.

Примеры:

$$\left|\frac{+20}{-4}\right|=\frac{|+20|}{|-4|}; \qquad \left|\frac{-20}{-4}\right|=\frac{|-20|}{|-4|}.$$

Абсолютная величина степени. ***Абсолютная величина n-й степени числа равна абсолютной величине основания этой степени, возведенной в n-ю степень,*** т. е.

$$|a^n|=|a|^n.$$

Действительно,

$$|a^n|=|a\cdot a^{n-1}|=|a|\cdot|a^{n-1}|=|a|\cdot|a\cdot a^{n-2}|=|a|\cdot|a|\cdot|a^{n-2}|.$$

Продолжая этот процесс, мы получим в конце концов, что

$$|a^n|=\underbrace{|a|\cdot|a|\cdot|a|\ldots|a|}_{n\text{ раз}},$$

т. е. получим, что

$$|a^n|=|a|^n,$$

а это и требовалось доказать.

Примеры:

$$|(-5)^3|=|-5|^3;$$
$$|(a-b)^5|=|a-b|^5;$$
$$|(a-b)^2|=|a-b|^2=(a-b)^2.$$

Примеры:

1. Найти значение выражения

$$\left|a+\frac{1}{a}\right|$$

при следующих значениях буквы a:

$$1;\ -1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0{,}1;\ -0{,}1;\ 2;\ -2;\ 2\frac{1}{2};\ -2\frac{1}{2}.$$

Примечание. Выражение $\left|a+\frac{1}{a}\right|$ теряет смысл при $a=0$.

2. Найти значения выражения

$$\left|\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right|$$

при следующих парах значений букв a и b:

$$\begin{cases} a=3, \\ b=2; \end{cases} \quad \begin{cases} a=2, \\ b=3; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-3, \\ b=-2; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-2, \\ b=-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3, \\ b=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a=0, \\ b=3; \end{cases} \quad \begin{cases} a=3, \\ b=3; \end{cases} \quad \begin{cases} a=-3, \\ b=-3. \end{cases}$$

Примечание. Выражение $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ теряет смысл, если буквам a и b придать одновременно нулевые значения.

Замечание. Пусть $|q|<1$. Тогда значение выражения q^n окажется столь угодно близким к нулю при достаточно большом значении буквы n. Например:

$$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{13}\right|<0{,}000001;$$

$$\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{15}\right|<0{,}0000001.$$

С помощью числа 0,000001 мы оцениваем степень близости к нулю чисел

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{13};\ \left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{13}\right|.$$

Точки числовой оси, соответствующие числам

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{13};\ \left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{13}\right|,$$

располагаются первая слева и вторая справа от начальной точки числовой оси на одинаковом очень малом удалении от этой начальной точки. С помощью числа 0,0000001 мы можем оценить близость к нулю чисел $\left(-\frac{1}{3}\right)^{15}$ и $\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{15}\right|$.

3. Найти значения выражения

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

при следующих значениях буквы n:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12.$$

Оцените значение выражения $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ при $n=20$; $n=100$ и т. д. Найти значения выражения $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

при следующих значениях буквы n: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12. Оцените значение этого выражения при $n=20$; $n=21$; $n=100$; $n=101$ и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ

19. Записать кратко выражение

$$\frac{a+a+a+a+bbb}{aaaa+b+b+b}$$

и определить его значение при $a=-2$ и $b=-3$.

Отв. $\frac{4a+b^3}{a^4+3b}$; -5.

20. Буквой x обозначено число всех простых чисел начиная от 2 до 47 включительно.

Верно ли сказать, что в данном случае $x=15$?

Найдите значения выражений:

21. $\frac{a-b}{b-a}$ при $a=-5$, $b=-7$. Отв. -1.

22. $-p^3+p^2-p+1$ при $p=-3$. Отв. 40.

23. $\frac{1}{x}$ при $x=\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{10000}$ и т. д. Отв. 10; 100; 1000; 10 000 и т. д.

24. $1-x-x^2-x^3$ при $x=-\frac{1}{2}$. Отв. $1\frac{3}{8}$.

25. $\frac{a(1-q^n)}{1-q}$ при $a=8$, $q=-\frac{1}{2}$, $n=4$. Отв. 5.

26. $1-\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}-\frac{1}{q^3}$ при $q=-\frac{1}{2}$. Отв. 15.

27. $\frac{x^3}{0{,}009-x^2}$ при $x=-0{,}1$. Отв. 1.

28. $3xy^2-2x^2y$ при $x=-3$, $y=-4$. Отв. -72.

29. $\frac{a^2-a-56}{1+a}$ при $a=-7$. Отв. 0.

30. Какие значения x не являются допустимыми для выражения

$$\frac{1}{|x|-1}?$$

Отв. 1; -1.

31. Запишите частное от деления суммы кубов чисел x, y, z на утроенное произведение тех же чисел.

32. Запишите десятую степень разности чисел x и y.

33. Запишите сумму квадратов трех последовательных целых чисел в общем виде.

34. Цифра сотен трехзначного числа равна x, цифра десятков y, цифра единиц z. Запишите произведение этого трехзначного числа на сумму его цифр.

35. Проверить справедливость формулы

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$$

при $a=1$, $b=2$, $c=3$.

36. При каких значениях x будет верным равенство

$$|x|=5?$$

37. Может ли быть так, чтобы равенство $|a|=|b|$ было верным, а равенство $a=b$ неверным?

38. Что больше: a или $-a$?

38-а. Задача-шутка. Два лица движутся навстречу друг другу. Скорость первого пешехода равна a *м/сек*, тогда как второй шагает со скоростью b *м/сек*. В тот момент, когда расстояние между пешеходами составляло l *м*, комар вылетел со скоростью q *м/сек* от одного пешехода к другому. Повстречавшись с последним, он летит обратно к первому и т. д. Сколько метров пролетит комар до встречи пешеходов?

Отв. $\frac{lq}{a+b}$ *м*.

Вычислить ответ при $l=66$; $a=1$; $b=1{,}2$; $q=5$.

39. Самолет пролетел m мин. со скоростью v *км* в час, а затем еще n мин. со скоростью w *км* в час. Сколько километров пути пролетел самолет?

Отв. $\left(\frac{v}{60}\cdot m+\frac{w}{60}\cdot n\right)$ *км*.

40. Из пункта A и B выехали одновременно навстречу друг другу две автомашины, одна со скоростью v *км* в час, а другая со скоростью w *км* в час. Расстояние между пунктами A и B равно l *км*. Через сколько ча́сов после начала движения автомашины встретятся?

Отв. $\frac{l}{v+w}$ час.

Вычислить ответ при $l=236{,}25$; $v=45$ и $w=60$.

Отв. 2 часа 15 мин.

41. Один трактор может вспахать данный участок земли за m час.; а другой — за n час. Какую часть этого участка могут вспахать оба трактора за один час, если будут работать совместно?

Отв. $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)$ часть участка.

Вычислить ответ при $m=20$ и $n=30$.

Отв. $\frac{1}{12}$ часть участка.

42. Пароход должен был пройти расстояние l *км* со скоростью v *км* в час. Но по некоторым причинам он шел первую половину пути со скоростью, на h *км* в час меньшей, а вторую половину пути со скоростью, на h *км* в час большей, чем ему полагалось. Сколько часов затратил пароход на весь путь и на сколько часов опоздал?

Отв. 1) $\dfrac{\frac{l}{2}}{v-h}+\dfrac{\frac{l}{2}}{v+h}$; 2) $\dfrac{\frac{l}{2}}{v-h}+\dfrac{\frac{l}{2}}{v+h}-\dfrac{l}{h}$.

Вычислить ответ при $l=1440$, $v=18$ и $h=2$.

Отв. 1) 81 час.
2) Опоздал на 1 час.

43. Записать квадрат трехзначного числа, если цифра сотен равна a, цифра десятков b и цифра единиц c.

Отв. $(100a+10b+c)^2$.

44. Записать в общем виде число, делящееся на 3.

Отв. $3k$.

45. Записать в общем виде число, не делящееся на 3.

Отв. $3k\pm 1$.

46. Продукция птицефермы, себестоимость которой a руб., реализована за b руб. Определить полученный при этом доход птицефермы.

Отв. $(b-a)$ руб.

Вычислить ответ при $\begin{cases} 1)\ a=15\,300 \text{ и } b=18\,500. \\ 2)\ a=12\,400 \text{ и } b=11\,800. \end{cases}$

Отв. 1) 3200 руб. прибыли.
2) —600 руб., т. е. птицеферма потерпела убыток, равный 600 руб.

47. Проверить равенство

$$\frac{a-b}{b-a}=-1$$

при 1) $a=10$, $b=2$; 2) $a=10$, $b=-2$; 3) $a=-10$, $b=2$; 4) $a=-10$, $b=-2$.

48. При каких значениях буквы x справедливо равенство $x^2=1$?

Отв. При $x=1$ и при $x=-1$.

49. При каких значениях буквы x справедливо равенство

$$x^2-x=0?$$

Отв. При $x=0$ и при $x=1$.

ГЛАВА III

ДЕЙСТВИЯ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ И ПРАВИЛА ПРОСТЕЙШИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Материал, изложенный в § 1—7 настоящей главы, может показаться на первый взгляд скучным, малоинтересным. Но несмотря на это, его необходимо изучить самым внимательным образом, так как, не усвоив его, нельзя будет успешно изучать последующие части курса алгебры. Кроме того, мы увидим, что этот небольшой теоретический материал уже позволит нам решать методами алгебры многие интересные задачи. Рассмотрение некоторых таких задач дается в § 8 и 9 настоящей главы.

§ 1. ПОНЯТИЕ О ДЕЙСТВИЯХ НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ (БУКВЕННЫМИ) ВЫРАЖЕНИЯМИ

Пусть требуется сложить одночлены a и b. Выполнить это действие — вовсе не значит найти числовую величину результата сложения. Такую числовую величину можно было бы находить лишь тогда, когда были бы заданы числовые значения букв a и b. Но в данном случае числовые значения букв a и b нам не даны. Поэтому, если мы запишем выражение

$$a+b,$$

то это и будет означать, что мы сложили одночлены a и b, или, говоря иначе, записали их сумму.

Это замечание относится и к другим действиям над буквенными выражениями.

Например, записав выражение

$$(a+b+c)(p+q),$$

мы тем самым выполнили умножение многочлена $a+b+c$ на многочлен $p+q$, или, говоря иначе, записали их произведение.

Таким образом, выполнение действия над двумя алгебраическими выражениями состоит в соединении их знаком выполняемого действия, т. е. в составлении этим действием нового, третьего выражения.

Примеры:

Чтобы выполнить сложение многочленов

$$a+b+c \text{ и } p+q,$$

достаточно записать выражение

$$(a+b+c)+(p+q).$$

Чтобы выполнить деление этих же многочленов, достаточно записать выражение

$$\frac{a+b+c}{p+q}.$$

Чтобы выполнить вычитание, считая уменьшаемым одночлен $+5ab$, а вычитаемым одночлен $-7xy$, достаточно записать

$$(+5ab)-(-7xy).$$

Чтобы выполнить умножение многочлена $x+1$ на многочлен x^2-x+1, достаточно записать

$$(x+1)(x^2-x+1) \text{ и т. д.}$$

§ 2. ПОНЯТИЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ВЫРАЖЕНИЯ

В предыдущем параграфе мы говорили, что выполнение действия над двумя алгебраическими выражениями состоит в соединении их знаком выполняемого действия, т. е. в составлении этим способом третьего выражения.

Однако часто бывает полезным записанные таким образом третьи выражения представлять в других видах.

Например, записав $(5ab)\cdot(3ab)$, мы умножили одночлен $5ab$ на одночлен $3ab$. Но опираясь на переместительный и сочетательный законы умножения, получим, что

$$(5ab)\cdot(3ab)=15a^2b^2.$$

Это равенство справедливо при любых значениях букв a и b.

Переход от выражения $(5ab)\cdot(3ab)$ к выражению $15a^2b^2$ является примером преобразования.

Пусть имеется алгебраическое выражение

$$(a+2b)+(2a+3b),$$

являющееся суммой двух многочленов.

Опираясь на сочетательный и переместительный законы сложения, мы можем записать это выражение последовательно в следующих видах:

$$a+2b+2a+3b;$$
$$a+2a+2b+3b;$$

$$a+a+a+b+b+b+b+b;$$
$$(a+a+a)+(b+b+b+b+b);$$
$$3a+5b.$$

Выражения

$$(a+2b)+(2a+3b) \text{ и } 3a+5b$$

равны друг другу при любых значениях букв a и b.

Переход от выражения $(a+2b)+(2a+3b)$ к выражению $3a+5b$ также является примером преобразования.

Определение. ***Преобразовать данное выражение — значит составить новое выражение, равное данному при любых допустимых значениях входящих букв.***

Преобразования алгебраических выражений выполняются на основе двух законов сложения (см. стр. 32) и трех законов умножения (см. стр. 39).

Простейшие правила преобразований изложены в настоящей главе, а более сложные — в последующих главах.

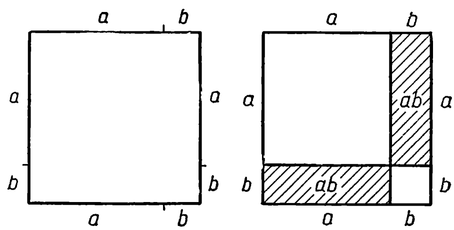


Рис. 26. Рис. 27.

Преобразования имеют очень важное значение. С их помощью решаются многочисленные разнообразные теоретические и практические задачи. Для иллюстрации приведем хотя бы один пример.

Рассматривая многочлен $x^2-8x+23$, трудно узнать то значение буквы x, при котором этот многочлен принимает наименьшее значение. Однако если бы мы умели выполнять преобразования, то могли бы данный многочлен преобразовать к виду

$$7+(x-4)^2$$

и сразу обнаружить, что его наименьшее значение, равное 7, получается при $x=4$.

Если бы мы умели выполнять преобразования, то легко убедились бы в том, что равенство, например,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

справедливо при любых значениях букв a и b.

Между прочим, этот результат легко доказать геометрически.

На рисунке 26 изображен квадрат, сторона которого составлена из суммы двух отрезков a *см* и b *см*, т. е. сторона равна $(a+b)$ *см*.

Этот квадрат разрезан на четыре части (на два одинаковых прямоугольника и два различных квадрата), как показано на рисунке 27.

Площадь S первоначального квадрата можно выразить двумя способами:

1) $S=(a+b)^2$, если пользоваться рисунком 26;

2) $S=a^2+2ab+b^2$, если пользоваться рисунком 27.

Отсюда следует, что равенство $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ справедливо при любых значениях букв a и b.

Возьмем, например, $a=8$ и $b=3$,
тогда

$$(a+b)^2=(8+3)^2=11^2=121;$$
$$a^2+2ab+b^2=8^2+2\cdot 8\cdot 3+3^2=64+48+9=121.$$

В следующих параграфах настоящей главы изложены правила основных, часто применяемых преобразований.

Некоторые из этих правил преобразований мы будем называть для краткости правилами действий.

Например, правило преобразования выражения

$$(3a^2b)\cdot(5ab^2)$$

к виду $15a^3b^3$ мы будем называть для краткости правилом умножения одночленов $3a^2b$ и $5ab^2$.

Правило преобразования выражения

$$(a+2b)+(3a+b)$$

к виду $4a+3b$ мы будем называть правилом сложения многочленов $a+2b$ и $3a+b$.

Правило преобразования выражения

$$a^5\cdot a^3$$

к виду a^8 мы будем называть правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями.

§ 3. ПОДОБНЫЕ ОДНОЧЛЕНЫ И ИХ ПРИВЕДЕНИЕ

Пусть в каждой коробке находится a спичек, а в каждой пачке b коробок; пусть, кроме того, в каждом ящике содержится a пачек и в каждом вагоне c ящиков.

При этих условиях можно, например, утверждать следующее:

$12a$	есть	число	спичек	в 12 коробках;
$8a$	»	»	»	в 8 коробках;
ab	»	»	»	в одной пачке;
$5ab$	»	»	»	в пяти пачках;
a^2b	»	»	»	в одном ящике;
$4a^2b$	»	»	»	в четырех ящиках;
a^2bc	»	»	»	в одном вагоне;
$10a^2bc$	»	»	»	в десяти вагонах.

Очевидно, что

$$12a+8a=20a;\quad 3ab+5ab=8ab;$$
$$7a^2b+4a^2b=11a^2b;\quad 2a^2bc+10a^2bc=12a^2bc.$$

Пусть на складе имеется запас спичек. Этот запас есть величина, могущая изменяться в других противоположных направлениях: он может увеличиваться и уменьшаться.

Фраза «Запас спичек на складе изменился на $+4a^2b$» будет означать, что на склад поступило 4 ящика спичек.

Фраза «Запас спичек на складе изменился на $-5a^2b$» означает, что со склада вывезли 5 ящиков спичек.

Пусть запас спичек на складе изменился первый раз на $+50a^2b$, второй раз на $-40a^2b$ и третий раз на $-30a^2b$. Тогда итоговое изменение будет

$$(+50a^2b)+(-40a^2b)+(-30a^2b),$$

т. е. составит $-20a^2b$, что означает уменьшение запаса спичек на 20 ящиков. Очевидно, что

$$12a+(-8a)=4a;$$
$$7ab+(-5ab)=+2ab;$$
$$7a^2b+(-3a^2b)+(-4a^2b)=0.$$

Определение. ***Одночлены называются подобными, если они отличаются друг от друга только числовыми коэффициентами или совсем не отличаются.***

Например, одночлены

$$+5a^2b; \quad -3a^2b; \quad +101a^2b$$

подобны.

Подобны между собой и следующие одночлены:

$$-0{,}02a\,(x-y)^2; \quad +\frac{3}{2}a\,(x-y)^2; \quad -a\,(x-y)^2.$$

Точно так же подобны следующие одночлены:

$$-8\frac{a-b}{a+b}; \quad +\frac{a-b}{a+b}; \quad -\frac{a-b}{a+b}.$$

Сумму нескольких подобных одночленов можно записать в виде одного одночлена. Например,

$$(-5a^2b)+(+9a^2b)+\left(-\frac{3}{2}a^2b\right)=+2\frac{1}{2}a^2b.$$

Определение. ***Операция замены суммы нескольких подобных одночленов одним одночленом называется приведением подобных одночленов.***

Теперь сформулируем правило приведения подобных одночленов и приведем его доказательство.

Если многочлен содержит несколько подобных членов, то их можно заменить одним членом, подобным каждому из них, приняв за его коэффициент алгебраическую сумму коэффициентов заменяемых членов.

Доказательство. Пусть имеется многочлен $10a^3b-12a^3b+$ $+19a^3b+x+y$. На основании распределительного закона

$$10a^3b-12a^3b+19a^3b=(10-12+19)\,a^3b=17a^3b.$$

Следовательно,

$$10a^3b-12a^3b+19a^3b+x+y=17a^3b+x+y.$$

Примеры:

1) $\underline{4x^2y}-\underline{\underline{3xy^2}}-\underline{2x^2y}-\underline{\underline{6xy^2}}=2x^2y-9xy^2;$

2) $\underline{\frac{1}{2}a}-\underline{\underline{5ab}}-\underline{\frac{1}{3}a}+\underline{\underline{2ab}}=\frac{1}{6}a-3ab.$

§ 4. СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ОДНОЧЛЕНОВ

1. Сложение

Пусть имеется несколько одночленов: $-5a$; $+12ab$; $-4a^2b$. Суммой этих одночленов будет следующее выражение:

$$(-5a)+(+12ab)+(-4a^2b).$$

Последнюю сумму можно записать в следующем простом виде:

$$-5a+12ab-4a^2b.$$

Отсюда вытекает правило:

Чтобы сложить одночлены, достаточно записать их один за другим с их знаками.

В соответствии с этим мы должны рассматривать, например, выражение $4x^3+5x^2y-7xy^2-10y^3$ как следующую сумму:

$$(4x^3)+(+5x^2y)+(-7xy^2)+(-10y^3).$$

Примечание: ***Два одночлена, отличающиеся только знаком, называются противоположными.*** Например, одночлены $5a^2bc$ и $-5a^2bc$ противоположны.

Сумма двух противоположных одночленов равна нулю. Например,

$$(-5a^2bc)+(+5a^2bc)=0.$$

2. Вычитание

Пусть имеются два одночлена: $-5a^2b$ и $+8ab^2$. Разностью этих одночленов будет следующее выражение:

$$(-5a^2b)-(+8ab^2).$$

Вычитание любого числа можно заменить прибавлением числа, противоположного вычитаемому. Поэтому разность

$$(-5a^2b)-(+8ab^2)$$

мы можем записать в виде суммы

$$(-5a^2b)+(-8ab^2).$$

Эту сумму, как мы только что условились, можно записать в виде

$$-5a^2b-8ab^2.$$

Отсюда вытекает следующее правило:

Чтобы вычесть одночлен, достаточно приписать его к уменьшаемому с противоположным знаком.

Например, разность между одночленами $+12a^2b^3$ и $-4x^2y^3$ равна $+12a^2b^3+4x^2y^3$.

3. Умножение

Пусть имеются два одночлена

$$-5ab^2c^3 \text{ и } 3abc^4x.$$

Произведением этих одночленов будет выражение

$$(-5ab^2c^3)\cdot(+3abc^4x).$$

На основании сочетательного и переместительного законов умножения мы можем это произведение записать в следующем виде:

$$(-5)\cdot(+3)\,a\,ab^2bc^3c^4x,$$

или в виде

$$-15a^2b^3c^7x.$$

Умножение одночленов выполняется на основании переместительного и сочетательного законов умножения.

Другие примеры умножения одночленов:

1) $(-3xy)(-8x)=24x^2y$;
2) $\left(-\frac{2}{3}a\right)6b\,(-a)=4a^2b$;
3) $[-0{,}2a^4(x+y)^3][-20ab\,(x+y)^2]=+4a^5b\,(x+y)^5$;
4) $x\cdot x^2\cdot x^3\cdot x^4=x^{10}$.

§ 5. СЛОЖЕНИЕ, ВЫЧИТАНИЕ И УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

1. Общие замечания

Под многочленом, например,

$$-3ab^2+5a^2b-7b^3$$

можно понимать следующую сумму одночленов:

$$(-3ab^2)+(+5a^2b)+(-7b^3),$$

так как всякий многочлен можно рассматривать как алгебраическую сумму. Исходя из этого, мы будем говорить, что многочлен

$$-3ab^2+5a^2b-7b^3$$

составлен из трех одночленов:

$$-3ab^2; +5a^2b \text{ и } -7b^3.$$

Эти одночлены называют членами многочлена

$$-3ab^2+5a^2b-7b^3.$$

Например, членами многочлена

$$a-b-c+d$$

являются следующие одночлены:

$$+a; \quad -b; \quad -c; \quad +d.$$

Два многочлена называются противоположными, если члены одного из них противоположны членам другого.

Например, многочлены $a-b-c+d$ и $-a+b+c-d$ являются противоположными.

2. Сложение

Пусть имеется какое-нибудь алгебраическое выражение A и многочлен $-a+b-c-d$. Суммой этих двух выражений называется выражение

$$A+(-a+b-c-d),$$

которое можно записать так:

$$A+[(-a)+(+b)+(-c)+(-d)].$$

На основании сочетательного закона сложения эту сумму можно переписать в виде

$$A+(-a)+(+b)+(-c)+(-d),$$

т. е. в виде

$$A-a+b-c-d.$$

Отсюда вытекает следующее правило:

Чтобы прибавить многочлен, достаточно приписать все его члены с их знаками.

Например:

$$A+(-x^2-y^2+z^2)=A-x^2-y^2+z^2;$$

$$a^2+2ab+b^2+(-a^2+2ab-b^2)=$$
$$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2=4ab.$$

Значения двух противоположных многочленов при любых числовых значениях входящих в них букв будут числами противоположными, так как сумма двух противоположных многочленов всегда равна нулю.

Например:

$$a-b-c+d+(-a+b+c-d)=$$
$$=a-b-c+d-a+b+c-d=0.$$

3. Вычитание

Пусть имеется какое-нибудь алгебраическое выражение A и многочлен $-a+b-c-d$. Разностью между этими выражениями будет выражение

$$A-(-a+b-c-d).$$

Вычитание любого числа можно заменить прибавлением числа, противоположного вычитаемому. Поэтому написанную выше разность можно представить в виде следующей суммы:

$$A+(+a-b+c+d),$$

которая равна выражению

$$A+a-b+c+d.$$

Отсюда вытекает правило:

Чтобы вычесть многочлен, достаточно приписать к уменьшаемому все его члены с противоположными знаками.

Например:

$$A-(-x^2-y^2+z^2)=A+x^2+y^2-z^2;$$
$$a+b+x+y-(-a+b-x+y)=$$
$$=a+b+x+y+a-b+x-y=2a+2x.$$

4. Умножение многочлена на одночлен

Пусть имеется многочлен $-a+b-c$ и одночлен $-m$. Произведением этих двух множителей будет выражение

$$(-a+b-c)\cdot(-m),$$

которое может быть записано в виде

$$[(-a)+(+b)+(-c)]\cdot(-m).$$

На основании распределительного закона умножения последнее произведение будет равно выражению

$$(-a)\cdot(-m)+(+b)\cdot(-m)+(-c)\cdot(-m),$$

т. е. выражению

$$am-bm+cm.$$

Отсюда вытекает следующее правило:

Чтобы умножить многочлен на одночлен, достаточно умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Например:

$$\begin{gathered}(-2ab+3a^2-4b^2)\cdot(-5ab)=\\=(-2ab)\cdot(-5ab)+(+3a^2)\cdot(-5ab)+(-4b^2)\cdot(-5ab)=\\=10a^2b^2-15a^3b+20ab^3.\end{gathered}$$

5. Умножение многочлена на многочлен

Пусть имеется два многочлена:

$$-a-b+c \text{ и } p-q.$$

Их произведением называется выражение

$$(-a-b+c)(p-q).$$

Рассматривая многочлен $p-q$ как некоторое число и опираясь на распределительный закон умножения, мы можем написанное выше произведение представить в следующем виде:

$$(-a)\cdot(p-q)+(-b)\cdot(p-q)+(+c)\cdot(p-q).$$

Опираясь на переместительный закон, перепишем последнее выражение в следующем виде:

$$(p-q)\cdot(-a)+(p-q)\cdot(-b)+(p-q)\cdot(+c).$$

Применяя еще раз распределительный закон умножения, получим

$$-ap+aq+(-bp+bq)+(cp-cq),$$

или

$$-ap+aq-bp+bq+cp-cq.$$

Итак, оказалось, что

$$(-a-b+c)\cdot(p-q)=-ap+aq-bp+bq+cp-cq.$$

Отсюда вытекает правило:

Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого и все полученные произведения сложить.

Например:

1) $(-5ab+a^2-4b^2)\cdot(-a-b)=$
$=5a^2b+5ab^2-a^3-a^2b+4ab^2+4b^3=$
$=-a^3+4a^2b+9ab^2+4b^3;$

2) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-x^2+x^2-x+x-1=x^3-1.$

§ 6. РАСКРЫТИЕ СКОБОК И ЗАКЛЮЧЕНИЕ В СКОБКИ

1. Раскрытие скобок

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак плюс, надо опустить этот знак плюс, опустить скобки и записать все члены, стоящие в скобках, с их знаками.

Это правило вытекает из правила сложения многочленов, сформулированного в § 9.

Примеры:

$$A+(-a-b+c)=A-a-b+c;$$
$$A+(x-y-z)=A+x-y+z.$$

Из правила вычитания многочлена вытекает правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак минус.

Чтобы раскрыть скобки, перед которыми стоит знак минус, надо опустить этот знак минус, опустить скобки и записать все члены, стоящие в скобках, со знаками, противоположными их знакам.

Примеры:

$$A-(-a-b-c)=A+a+b+c;$$
$$A-(+x-y-z)=A-x+y+z.$$

2. Заключение в скобки

При заключении данного многочлена в скобки перед ними нужно ставить либо знак плюс, либо знак минус по своему усмотрению.

Чтобы заключить многочлен в скобки с поставленным перед скобками знаком плюс, надо внутри скобок все члены многочлена записать с их знаками.

Пример:

$$-a+b-c=+(-a+b-c).$$

Чтобы заключить многочлен в скобки с поставленным перед скобками знаком минус, надо внутри скобок записать все его члены с противоположными знаками.

Это правило следует из правила вычитания многочленов, сформулированного в § 5 настоящей главы.

Пример:

$$-a+b-c=-(a-b+c).$$

Примечание. В скобки можно заключать и часть членов многочлена.

Примеры:

1) $-a+b-c=-a+(b-c)$;
2) $-a+b-c=-a-(-b+c)$;
3) $a^2-2ab+b^2-x^2+2xy-y^2=-(-a^2+2ab-b^2)-$
$-(x^2-2xy+y^2)$;
4) $a^2-x^2+2xy-y^2=a^2-(x^2-2xy+y^2)$.

УПРАЖНЕНИЯ

50. Записать без скобок следующие суммы:

1) $8+(-11)+(-5)+(+14)$;
2) $1+(-a)+(-b)+(+c)+(-d)$.

51. Записать без скобок следующие алгебраические суммы:

1) $-5+(-9)-(-13)-(+8)$;
2) $a-(-b)+(-c)-(+d)$.

52. Записать в виде суммы каждое из выражений:

1) $15-9$; 2) $a-b-c$;
3) $x-y$; 4) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$.

53. Сделать приведение подобных членов:

1) $3x^2-4x+1-x^2+3x-7$;
2) $\left(-\frac{1}{4}xy\right)-\left(-\frac{2}{3}x^2y^2\right)+(+xy)+\left(-\frac{1}{2}x^2y^2\right)$.

54. Найти суммы многочленов:

1) $m+n$ и $m-n$;
2) $a^2+2ab+b^2$ и $a^2-2ab+b^2$;
3) $a^2+2ab+b^2$ и $-a^2+2ab-b^2$;
4) $5x^2-5x+4$ и $-4x^2+5x-4$;
5) $4a^m-3b^n$ и $5a^m+2b^n$.

55. Найти разности многочленов:

1) $m+n$ и $m-n$;
2) $a^2+2ab+b^2$ и $a^2-2ab+b^2$;
3) $a^2+2ab+b^2$ и $-a^2+2ab-b^2$;
4) $5x^2-5x+4$ и $-4x^2+5x-4$.

56. Найти произведения многочленов:

1) a^2-a+1 и $a+1$;
2) x^2+xy+y^2 и x^2-xy+y^2;
3) $3x+7y$ и $2x-5y$.

57. Раскрыть скобки и сделать приведение подобных членов:

1) $6x-[-(2x-1)-7x]$;
2) $2(5x-4y+1)-3(3x-3y+1)$;

3) $a+b+c-[-(a-b-c)]$;

4) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

58. Заключить в скобки крайние члены многочлена a^2-b^2+ $+2bc-c^2$ со знаком плюс, а средние со знаком минус перед скобками.

59. В выражении $a+(-b+c-d)$ изменить знак перед скобками на противоположный.

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАДРАТА СУММЫ И КВАДРАТА РАЗНОСТИ

Квадрат суммы. Выражение $(a+b)^2$ есть квадрат суммы чисел a и b.

По определению степени выражение $(a+b)^2$ представляет собой произведение $(a+b)(a+b)$.

Но $(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2$.

Следовательно,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

т. е. *квадрат суммы двух чисел ранен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа,* например:

$$(20+3)^2=20^2+2\cdot 20\cdot 3+3^2.$$

Формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ верна при любых значениях букв a и b. Она выражает некоторое общее свойство чисел, т. е. свойство, присущее всем числам.

Многочлен $a^2+2ab+b^2$ называется разложением квадрата суммы.

Квадрат разности.

$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2.$$

Следовательно,

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

Эта формула читается так:

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

Многочлен $a^2-2ab+b^2$ называется разложением квадрата разности.

Во всяком равенстве

$$A=B,$$

A называется левой частью равенства, а B — правой.

В формулах

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

левые части равенства — одночлены, а правые — многочлены.

Эти формулы остаются в силе при замене букв a и b любыми выражениями.

Примеры:

$$(x+5)^2=x^2+2\cdot x\cdot 5+5^2=x^2+10x+25;$$
$$(x+1)^2=x^2+2x+1;$$
$$(2a+3b)^2=4a^2+12ab+9b^2;$$
$$(a-8)^2=a^2-16a+64;$$
$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^2=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{9}y^2.$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2};$$
$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2=\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2};$$
$$[(a+b)+(c+d)]^2=(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2.$$

§ 8. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Задача 1. Найти значение выражения $a^2+2ab+b^2$ при $a=65{,}79$ и $b=34{,}22$.

Прямое вычисление было бы громоздким. Если же мы преобразуем данное выражение к виду $(a+b)^2$, то искомое значение найдется легко. Оно будет равно

$$(65{,}79+39{,}22)^2, \text{ т. е. равно } 10\,000.$$

Задача 2. Найти наименьшее значение многочлена

$$x^2-8x+23$$

и указать, при каком значении буквы x оно получается.

Решить поставленную задачу путем испытаний различных значений буквы x нельзя, так как таким испытаниям нет конца. А вот с помощью преобразования ее решить легко. Преобразуем данный многочлен следующим образом:

$$x^2-8x+23=x^2-8x+16-16+23=(x-4)^2+7.$$

Отсюда видно, что искомое наименьшее значение равно 7 и получается оно при $x=4$.

Остается пояснить, как мы выполняли нужное нам преобразование.

Мы прибавили и отняли число 16. Этим мы не изменили значение данного многочлена. Возникает вопрос: почему мы выбрали именно число 16? Ведь можно было прибавить и отнять любое другое число. Мы взяли число 16 не случайно. Этим мы образовали выражение $x^2-8x+16$, которое преобразовывается в квадрат разности, а именно в выражение $(x-4)^2$. Число же 16 мы получили следующим образом: мы взяли из многочлена $x^2-8x+23$ коэффициент -8, стоящий у первой степени буквы x; разделили его на два и полученное частное возвысили в квадрат.

Выполним подобное преобразование еще на нескольких примерах.

а) $x^2+3x+10=x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+10=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+7\frac{3}{4}$.

Наименьшее значение получается при $x=-\frac{3}{2}$.

б) Рассмотрим многочлен $3x^2+5x+12$. Этот многочлен отличается от ранее рассмотренных тем, что здесь коэффициент при x^2 отличен от 1.

Пользуясь распределительным законом умножения, мы получим, что

$$3x^2+5x+12=3\left(x^2+\frac{5}{3}x+4\right).$$

Но $x^2+\frac{5}{3}x+4=x^2+\frac{5}{3}x+\frac{25}{36}-\frac{25}{36}+4=\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+3\frac{11}{36}$.

Поэтому

$$3x^2+5x+12=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+3\frac{11}{36}\right].$$

Наименьшее значение получается при $x=-\frac{5}{6}$.

Замечание. Многочлены $x^2-8x+23$ и $3x^2+5x+12$ наибольшего значения не имеют, а наименьшее значение имеют.

Задача 3. Число a разбить на два слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых имела наименьшее значение.

Обозначим первое слагаемое буквой x. Тогда вторым слагаемым будет $a-x$, а суммой квадратов этих слагаемых будет

$$x^2+(a-x)^2.$$

Имеем:

$$x^2+(a-x)^2=2x^2-2ax+a^2=2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{2}\right).$$

Но

$$x^2-ax+\frac{a^2}{2}=x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{2}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

Отсюда видно, что искомое наименьшее значение получается при условии, что оба слагаемых одинаковы, т. е. когда каждое из них равно $\frac{a}{2}$.

Задача 4. Число 14 требуется разбить на три части так, чтобы вторая часть была вдвое больше первой и чтобы сумма квадратов всех трех частей имела наименьшее значение.

Решение. Пусть первая часть есть x, тогда вторая часть будет $2x$, а третья $(14-3x)$. Сумма квадратов всех трех частей изобразится выражением $x^2+4x^2+(14-3x)^2$ или выражением $14x^2-84x+196$, которое можно записать и в следующем виде:

$$14(x^2-6x+14).$$

Теперь остается найти такое значение буквы x, при котором многочлен $x^2-6x+14$ приобретает наименьшее значение. Для этого опять выполним целесообразное преобразование:

$$x^2-6x+14=x^2-6x^2+9-9+14=(x-3)^2+5.$$

Отсюда

$$14(x^2-6x+14)=14(x-3)^2+70.$$

Искомое наименьшее значение получится при $x=3$. Следовательно, число 14 надо разбить на три следующие части: 3; 6; 5.

При такой разбивке вторая часть будет вдвое больше первой и сумма квадратов всех трех частей будет иметь наименьшее значение, равное 70.

Задача 5. Из пунктов A и B (рис. 28) по указанным стрелками направлениям выходят одновременно пароход и яхта; скорость парохода 36 *км* в час, а яхты 12 *км* в час. Расстояние между пунктами A и B равно 130 *км*. Узнать, через сколько часов расстояние между пароходом и яхтой окажется наименьшим.

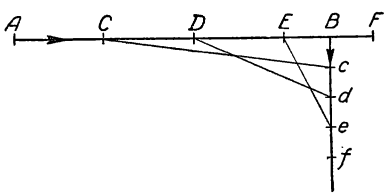


Рис. 28.

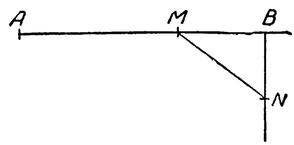


Рис. 29.

На рисунке 28 точки C, D, E и F обозначают положения парохода через один, два, три и четыре часа после начала движения.

Точки c, d, e и f обозначают положения яхты в те же моменты времени.

Cc — есть расстояние между пароходом и яхтой через один час;
Dd — расстояние через два часа:
Ee — расстояние через три часа и т. д.

Решение. Отметим точками M и N положения парохода и яхты через x часов после их выхода из пунктов A и B (рис. 29). Тогда

$$AM=36x \text{ км}; \quad BN=12x \text{ км};$$
$$MB=(130-36x) \text{ км},$$

а MN будет представлять собой расстояние между пароходом и яхтой. Фигура MBN есть треугольник с прямым углом при вершине B.

На основании теоремы Пифагора *

$$(MN)^2=(130-36x)^2+(12x)^2.$$

Для решения задачи достаточно узнать, при каком значении буквы x выражение $(130-36x)^2+(12x)^2$ имеет наименьшее значение. Преобразуем это выражение:

$$(130-36x)^2+(12x)^2=$$
$$=130^2\cdot-2\cdot130\cdot36x+1296x^2+144x^2=$$
$$=1440x^2-2\cdot130\cdot36x+130\cdot130=1440\left(x^2-\frac{13}{2}x+\frac{130\cdot130}{1440}\right)=$$
$$=1440\left[\left(x-\frac{13}{4}\right)^2+\frac{130\cdot130}{1440}-\frac{169}{16}\right].$$

Последнее выражение имеет наименьшее значение при $x=\frac{13}{4}$. Значит, расстояние между пароходом и яхтой окажется наименьшим спустя $3\frac{1}{4}$ часа, т. е. спустя 3 часа 15 мин. после их выхода из пунктов A и B.

Задача 6. Может ли выражение $x^2-2xy+3y^2-2x-10y+20$ принимать отрицательные значения?

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$x^2-2xy+3y^2-2x-10y+20=x^2-2(y+1)x+3y^2-$$
$$-10y+20=x^2-2(y+1)x+(y+1)^2-(y+1)^2+3y^2-$$
$$-10y+20=[x-(y+1)]^2-y^2-2y-1+3y^2-10y+20=$$
$$=(x-y-1)^2+2y^2-12y+19=(x-y-1)^2+2y^2-12y+18+1=$$
$$=(x-y-1)^2+2(y^2-6y+9)+1=$$
$$=(x-y-1)^2+2(y-3)^2+1.$$

Выражение $(x-y-1)^2+2(y-3)^2+1$ не может принимать отрицательных значений ни при каких значениях букв x и y (положительных, отрицательных и нулевых). Поэтому и данное выражение $x^2-2xy+3y^2-2x-10y+20$ не может принимать отрицательных значений.

Задача 7. Узнать, при каких значениях букв x и y выражение $x^2-2xy+6y^2-12x+2y+45$ принимает наименьшее значение.

---

* Во всяком треугольнике с прямым углом квадрат стороны, лежащей против прямого угла, равен сумме квадратов остальных сторон. Под термином «квадрат стороны» следует понимать квадрат числа, выражающего длину стороны.

Решение. Преобразуем данное выражение следующим образом:

$$x^2-2xy+6y^2-12x+2y+45=x^2-2(y+6)x+6y^2+$$
$$+2y+45=x^2-2(y+6)y+(y+6)^2-(y+6)^2+6y^2+2y+$$
$$+45=[x-(y+6)]^2-y^2-12y-36+6y^2+2y+45=$$
$$=(x-y-6)^2+5y^2-10y+9=(x-y-6)^2+5y^2-10y+$$
$$+5+4=(x-y-6)^2+5(y^2-2y+1)+4=(x-y-6)^2+$$
$$+5(y-1)^2+4.$$

Это выражение имеет наименьшее значение лишь тогда, когда одновременно $y-1=0$ и $x-y-6=0$, т. е. при $y=1$ и $x=7$.

Задача 8. Найти наибольшее значение многочлена

$$-2x^2+16x-19$$

и указать, при каком значении буквы x оно получается.

По распределительному закону имеем:

$$-2x^2+16x-19=-2\left(x^2-8x+\frac{19}{2}\right).$$

Но

$$x^2-8x+\frac{19}{2}=x^2-8x+16-16+9\frac{1}{2}=(x-4)^2-6\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$-2x^2+8x-19=-2\left[(x-4)^2-6\frac{1}{2}\right]=13-2(x-4)^2.$$

Отсюда видно, что искомое наибольшее значение равно 13 и получается оно при $x=4$.

Выполним подобное преобразование еще на одном примере:

$$-x^2+14x-44\frac{1}{2}=-\left(x^2-14x+44\frac{1}{2}\right).$$

Но

$$x^2-14x+44\frac{1}{2}=x^2-14x+49-49+44\frac{1}{2}=(x-7)^2-4\frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$-x^2+14x-44\frac{1}{2}=-\left[(x-7)^2-4\frac{1}{2}\right]=4\frac{1}{2}-(x-7)^2.$$

Замечание. Многочлены $-2x^2+8x-19$ и $-x^2+14x-44\frac{1}{2}$ наименьшего значения не имеют, а наибольшее значение имеют.

Задача 9. Имеется материал, из которого можно сделать забор длиной 224 *м*. Пусть мы хотим использовать этот материал для того, чтобы огородить вдоль длинной стены с трех сторон прямоугольную площадку (рис. 30).

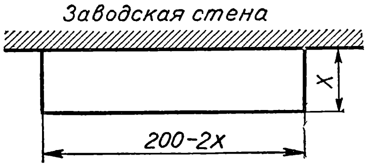


Рис. 30.

Спрашивается, каковы должны быть стороны прямоугольника, чтобы площадь участка оказалась наибольшей.

Решение. Обозначим буквой x в метрах длину одной из двух одинаковых частей забора. Тогда длина третьей части забора будет равна $(224-2x)$ *м*; а площадь участка в квадратных метрах $(224-2x)\cdot x$. (На рисунке 30 ошибочно написано 200).

Имеем: $$(224-2x)\,x=-2x^2+224x=-2(x^2-112x).$$

Но
$$x^2-112x=x^2-112x+56^2-56^2=(x-56)^2-3136.$$

Поэтому
$$(224-2x)\,x=-2\left[(x-56)^2-3136\right]=6272-2\,(x-56)^2.$$

Отсюда видно, что наибольшая площадь, равная 6272 *кв. м*, получится при $x=56$. Следовательно, длины трех частей забора надо взять равными 56 *м*, 56 *м* и 112 *м*.

Задача 10. Найти наибольшее значение многочлена

$$-x^2+2xy-4y^2+2x+10y-3$$

и указать те значения букв x и y, при которых оно получается. (См. решение задачи 7. Ответ: наибольшее значение 10 при $x=3$, $y=2$.)

Задача 11. Разбить число a на два слагаемых так, чтобы их произведение имело наибольшее значение.

Обозначим первое слагаемое буквой x. Тогда вторым слагаемым будет $a-x$, а их произведением

$$x\,(a-x).$$

Имеем:
$$x\,(a-x)=-x^2+ax=-(x^2-ax).$$

Но
$$x^2-ax=x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}.$$

Поэтому
$$x\,(a-x)=-\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\right]=\frac{a^2}{4}-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2.$$

Отсюда видно, что искомое наибольшее значение получится при $x=\frac{a}{2}$, т. е. тогда, когда оба слагаемых одинаковы. Само искомое наибольшее значение будет равно $\frac{a^2}{4}$.

Задача 12. Доказать, что сумма квадратов двух различных чисел больше их удвоенного произведения, т. е. что

$$a^2+b^2>2ab,$$

где a и b — любые различные числа.

Доказательство. Чтобы доказать, что a^2+b^2 больше, чем $2ab$, достаточно доказать, что разность между a^2+b^2 и $2ab$ положительна (см. стр. 61).

Преобразуем эту разность:

$$(a^2+b^2)-2ab=a^2+b^2-2ab=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Но выражение $(a-b)^2$ имеет положительное значение, так как числа a и b различные. Разность между a^2+b^2 и $2ab$ положительна. А это и значит, что $a^2+b^2>2ab$, что и требовалось доказать.

Таких задач, которые решаются с помощью алгебраического преобразования, можно было бы привести сколько угодно. Отсюда видно, сколь велика роль алгебраических преобразований.

УПРАЖНЕНИЯ

60. Пользуясь формулой $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$, найти значения выражений:

1) $29^2+2\cdot 29\cdot 21+21^2$; 2) $\left(14\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot 14\frac{1}{3}\cdot 4\frac{1}{3}+\left(4\frac{1}{3}\right)^2$;

3) $13^2-26\cdot 17+17^2$.

61. Пользуясь формулой $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$, найти значения выражений:

1) $57^3+3\cdot 57^2\cdot 43+3\cdot 57\cdot 43^2+43^3$; 2) $11^3-3\cdot 11^2+3\cdot 11-1$.

62. Пользуясь формулой $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, найти произведение $203\cdot 197$.

63. Пользуясь правилом умножения многочленов, раскрыть скобки и сделать приведение подобных членов:

1) $(a+3)^2-(a+2)^2$;
2) $(x+2)^3-(x+1)^3$;
3) $(a+9)(a-9)-(a+10)(a-10)$;
4) $(x^2+2x+4)(x-2)-(x-1)^3$;
5) $(a+b-2)^2-(a+b+1)(a-b-2)$.

64. Узнать, при каком значении буквы x многочлен x^2+x+1 имеет наименьшее значение.

Отв. $-\frac{1}{2}$.

65. Узнать, при каком значении буквы x многочлен $1+x-x^2$ имеет наибольшее значение.

Отв. $\frac{1}{2}$.

66. Узнать, при каком значении буквы x выражение $(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2$ имеет наименьшее значение.

Отв. 2.

67. Узнать, при каком значении буквы x выражение $(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$ имеет наименьшее значение.

Отв. $x=\frac{a+b+c}{3}$.

68. Каковы должны быть размеры (измерения) прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, чтобы он имел наибольшую полную поверхность, если сумма длин всех его ребер равна 256 *см*?

69. Может ли многочлен

$$4x^2-4xy+2y^2-12x-4y+37$$

принимать отрицательные значения?

70. При каких значениях букв x и y многочлен

$$x^2-2xy+2y^2-10x+10y+27$$

принимает наименьшее значение?

71. При каких значениях букв x и y многочлен

$$71+10x+14y-x^2-2xy-2y^2$$

принимает наибольшее значение?

72. Найти сумму кубов двух чисел, зная, что сумма этих чисел равна 10, а сумма их квадратов равна 60.

73. Найти сумму четвертых степеней двух чисел, зная, что сумма этих чисел равна 10, а сумма их квадратов равна 60.

74. Парадокс*. Пусть числа a и b отличны от нуля и при этом $a=b$. Умножив обе части данного равенства на число

---

* Слово «парадокс» происходит от греческого слова Παράδοξ — неожиданное, странное.

Парадоксом называется явление или высказывание, противоречащее по видимости или в действительности общепринятому мнению или даже здравому смыслу, а также рассуждения, приводящие к результатам, внутренне противоречивым или неожиданным. В форме парадокса можно выразить как истинные, так и ложные мысли.

Различают парадоксы физические, математические, литературные и логические. В настоящей книге приведены парадоксы только математические и при этом лишь самого простейшего типа, а именно, такие парадоксы, в которых в процессе рассуждений получается неверный результат из-за замаскированной ошибки.

b, получим $ab=b^2$. Взяв два равенства

$$a^2=a^2$$

и

$$ab=b^2$$

и произведя соответствующие вычитания, найдем, что

$$a^2-ab=a^2-b^2.$$

Перепишем это равенство в следующем виде:

$$a(a-b)=(a+b)(a-b).$$

Отсюда следует, что

$$a=a+b.$$

Но, как мы условились в самом начале, $b=a$. Поэтому

$$a=a+a, \text{ или } a=2a.$$

Разделив левую и правую части последнего равенства на число a, получим $1=2$.

Объясните, где ошибка в наших рассуждениях.

§ 9. ПРОСТЕЙШИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Подготовительные примеры

1. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $x-8=0$ становится верным.

Разность двух чисел равна нулю лишь тогда, когда эти числа одинаковые. Поэтому $x=8$.

2. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $x+8=0$ становится верным.

Сумма двух чисел равна нулю лишь тогда, когда эти числа противоположны. Поэтому $x=-8$.

3. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $x+3=20$ становится верным.

Одно из двух слагаемых равно разности между суммой и другим слагаемым. Поэтому $x=20-3$, т. е. $x=17$.

4. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $x-3=20$ становится верным.

Уменьшаемое равно вычитаемому плюс разность. Поэтому $x=20+3$, т. е. $x=23$.

5. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $5x=20$ становится верным.

Один из множителей равен произведению, деленному на другой множитель. Поэтому $x=\frac{20}{5}$, т. е. $x=4$.

6. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $\frac{x}{6}=12$ становится верным.

Делимое равно делителю, умноженному на частное. Поэтому $x=6\cdot 12$, т. е. $x=72$.

7. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $\frac{72}{x}=12$ становится верным.

Делитель равен делимому, деленному на частное. Поэтому $x=72:12$, т. е. $x=6$.

8. Найти такие значения буквы x, при которых равенство $(x-4)(x-7)(x-13)=0$ становится верным.

Решение. Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а остальные множители какие-либо числа. Поэтому наше равенство будет верным либо когда $x-4=0$, либо когда $x-7=0$, либо, наконец, когда $x-13=0$, т. е. данное нам равенство становится верным при $x=4$, $x=7$ и, наконец, при $x=13$. Ни при каких других значениях буквы x данное равенство верным не будет.

9. Найти такое значение буквы x, при котором равенство $2x=3x$ становится верным.

Решение. При всяком значении буквы x, отличном от нуля, $2x$ не равно $3x$. При $x=0$ как $2x$ равно нулю, так и $3x$ равно нулю. Следовательно, равенство $2x=3x$ будет верным тогда и только тогда, когда $x=0$.

Уравнение и его корень

В каждой из девяти предыдущих задач мы встречались с таким равенством, которое оказывалось верным при одних числовых значениях буквы x и неверным при прочих значениях. Например, равенство $x-8=0$ является верным лишь при $x=8$; равенство $(x-1)(x-2)(x-3)=0$ является верным при $x=1$, $x=2$, $x=3$ и неверным при всех прочих значениях буквы x.

Подобные равенства называются уравнениями.

В уравнении $x+5=12$ буква x называется неизвестной величиной или просто неизвестной.

В уравнении $2y+3=15$ буква y есть неизвестная величина, или неизвестное число, или просто неизвестное.

В уравнении $\frac{1}{N+1}=0{,}008$ неизвестное обозначено буквой N.

То числовое значение неизвестного, при котором уравнение становится верным равенством, называется корнем уравнения или решением уравнения. Например, уравнение $x+5=12$ имеет корень 7, уравнение $\frac{1}{N+1}=0{,}008$ имеет корень 124; уравнение $(x-1)(x-2)=0$ имеет два корня 1 и 2.

Не всякое уравнение имеет корень. Например, уравнение $\frac{1}{x}=0$ не имеет ни одного корня.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или убедиться в их отсутствии.

Примеры простейших уравнений

Решить уравнение:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=13.$$

Решение. Произведение частного на делитель равно делимому. Поэтому

$$13\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)=1, \text{ или } 13-\frac{13}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Вычитаемое равно уменьшаемому минус разность. Следовательно,

$$\frac{13}{1+\frac{1}{x}}=13-1, \text{ т. е. } \frac{13}{1+\frac{1}{x}}=12.$$

Делитель равен делимому, деленному на частное, т. е.

$$1+\frac{1}{x}=\frac{13}{12}.$$

Одно из двух слагаемых равно сумме минус другое слагаемое. Поэтому

$$\frac{1}{x}=\frac{13}{12}-1, \text{ т. е. } \frac{1}{x}=\frac{1}{12}.$$

Отсюда

$$x=12.$$

2. Решить уравнение:

$$(x+1)(x+2)-(x-1)(x-3)=160.$$

Перемножив двучлены, получим

$$(x^2+3x+2)-(x^2-4x+3)=160.$$

Раскрыв скобки, получим

$$x^2+3x+2-x^2+4x-3=160,$$

или

$$7x-1=160.$$

Уменьшаемое равно вычитаемому плюс разность. Поэтому

$$7x=1+160,$$

или

$$7x=161.$$

Один из двух множителей равен произведению, деленному на другой множитель. Поэтому

$$x=\frac{161}{7},$$

или

$$x=23.$$

Решение задач при помощи уравнений

Задача 1. Квартальная плата за пользование телефоном взимается в сумме 7,5 руб., если абонент пользуется только одним телефонным аппаратом. Если же у абонента два аппарата под одним телефонным номером, то с него взыскивается 10,5 руб. за квартал. От 1042 абонентов банк принял 7899 руб. Сколько было абонентов, пользующихся двумя аппаратами?

Решение. Пусть было x абонентов, пользующихся двумя аппаратами. Тогда абонентов, пользующихся только одним аппаратом, было $1042-x$.

Абоненты, пользующиеся двумя аппаратами, внесли $10{,}5\,x$ руб. Абоненты же, пользующиеся только одним аппаратом, внесли $7{,}5\,(1042-x)$ руб.

Все абоненты вместе внесли $[10{,}5x+7{,}5\,(1042-x)]$ руб. Но по условию задачи от всех абонентов банк принял 7899 руб. Следовательно, буква x должна иметь такое значение, при котором равенство $10{,}5x+7{,}5\,(1042-x)=7899$ становится верным.

Раскрыв скобки, получим $10{,}5x+7{,}5\cdot 1042-7{,}5x=7899$, сделав приведение подобных членов, будем иметь $3x+7815=7899$. Пользуясь свойствами действий, получим:

$$3x=7899-7815;\ 3x=84;$$

$$x=\frac{84}{3};\quad x=28.$$

Итак, абонентов, пользующихся двумя аппаратами, было 28.

Задача 2. Найти такое целое положительное число, чтобы произведение двух следующих за ним целых чисел оказалось больше произведения двух ему предшествующих на 600.

Решение. Обозначим искомое число буквой x. Тогда произведение двух следующих за ним целых чисел будет

$$(x+1)\,(x+2),$$

а произведение двух ему предшествующих целых чисел будет $(x-1)\,(x-2)$. По условию задачи разность между этими произведениями должна быть равной числу 600. Поэтому буква x должна иметь такое значение, при котором равенство

$$(x+1)(x+2)-(x-1)(x-2)=600$$

становится верным.

Теперь задача свелась к тому, чтобы найти такое значение буквы x, при котором последнее равенство становится верным, т. е. к тому, чтобы решить полученное уравнение.

Раскрыв скобки, получим $x^2+3x+2-x^2+3x-2=600$. Сделав приведение подобных членов, будем иметь $6x=600$. Отсюда $x=100$.

Итак, искомым числом является число 100.

Покажем применение уравнений к решению еще одной такой задачи, которую можно было бы решить значительно проще, чисто арифметическим путем.

Задача 3. В двух домах 48 окон, в одном из них на 2 окна больше, чем в другом. Сколько окон в каждом доме?

Число окон в первом доме обозначим буквой x; тогда число окон во втором доме изобразится выражением $x+2$, а число окон в обоих домах будет $x+(x+2)$.

По условию задачи в обоих домах 48 окон. Поэтому

$$x+(x+2)=48.$$

Отсюда

$2x+2=48$; $2x=48-2$; $2x=46$ и, наконец,

$$x=23.$$

Значит, в первом доме 23 окна, а во втором 25.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить каждое из следующих уравнений:

75. $7x-25=10$.

76. $\frac{x-5}{3}=12$.

77. $2(10-x)=1$.

78. $\frac{1}{1{,}2-x}=10$. Отв. 1,1

79. $\frac{3}{1+a}=2$. Отв. $\frac{1}{2}$.

80. $1-\frac{1}{u}=\frac{2}{3}$. Отв. 3.

81. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}=0{,}52$. Отв. 12.

82. $x=x+1$. Отв. Уравнение не имеет ни одного корня.

83. $\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4}}{0,7}=1.$ Отв. $1\frac{1}{19}$.

84. Задача. В трех домах 540 окон. Во втором доме окон в два раза больше, чем в первом, а в третьем на 40 окон больше, чем во втором. Сколько окон в каждом доме?

Отв. 100; 200; 240.

85. Задача. На птицеферме было гусей в два раза больше, чем уток. Через некоторое время число гусей увеличилось на 20 %, а число уток на 30%. При этом оказалось, что число гусей и уток увеличилось всего на 8400 голов. Узнать, сколько стало на птицеферме гусей и сколько уток?

Отв. 28 800 и 15 600.

86. Задача. Отец старше сына на 24 года, а через 5 лет будет старше его в 5 раз. Сколько лет сыну в настоящее время?

Отв. 1 год.

ГЛАВА IV

ПОСЛЕДУЮЩИЕ ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ПОНЯТИЕ О ТОЖДЕСТВЕ

§ 1. ДЕЙСТВИЯ НАД СТЕПЕНЯМИ

Умножение степеней с одинаковыми основаниями. Очевидно, что

$$a^m \cdot a^n = (\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{m}) \cdot (\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n}).$$

По сочетательному закону умножения

$$(\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{m}) \cdot (\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n}) = (\overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}^{m+n}) = a^{m+n}.$$

Следовательно,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Итак, *при умножении степеней с одинаковыми основаниями их показатели складываются.*

Например:

$$(+2)^3 \cdot (+2)^4 = (+2)^{3+4} = (+2)^7;$$

$$\left(-3\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-3\frac{1}{2}\right)^9;$$

$$a^5 \cdot a^7 = a^{12}; \quad a \cdot a^7 = a^8;$$

$$(x+y)^5 \cdot (x+y)^6 = (x+y)^{11};$$

$$\frac{2a+3b}{2a-3b} \cdot \left(\frac{2a+3b}{2a-3b}\right)^2 = \left(\frac{2a+3b}{2a+3b}\right)^3.$$

Возведение произведения в степень

Чтобы возвысить произведение в степень, можно возвысить в эту степень каждый множитель в отдельности и полученные степени перемножить.

Иначе говоря, степень произведения равна произведению тех же степеней множителей. Действительно,

$$(ab)^n = (ab)(ab)(ab)\ldots(ab).$$

По сочетательному закону умножения

$$(ab)(ab)(ab)\dots(ab) = ababab\dots ab.$$

По переместительному закону

$$ababab\dots ab = aaaa\dots abbb\dots b.$$

По сочетательному закону

$$aaa\dots abbb\dots b = (aaa\dots a)(bbb\dots b).$$

Поэтому

$$(ab)^n = a^n b^n,$$

что и требовалось доказать.

Примеры:

$$(abc)^2 = a^2b^2c^2; \qquad (5ab)^3 = 125a^3b^3;$$

$$(2\cdot 3\cdot 4)^2 = 2^2 3^2 4^2; \qquad \left(2\frac{1}{2}xy\right)^3 = \frac{125}{8}x^3y^3.$$

Поменяв местами правую и левую части равенства $(ab)^n = a^n b^n$, получим:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n,$$

т. е. произведение степеней с одинаковыми показателями равно степени с тем же показателем и основанием, равным произведению оснований данных степеней.

Примеры:

$$a^5b^5c^5 = (abc)^5; \qquad \frac{1}{8}x^3y^3 = \left(\frac{1}{2}xy\right)^3;$$

$$9b^2c^2 = (3bc)^2; \qquad 2^3\cdot 3^3 = (2\cdot 3)^3.$$

Возведение частного в степень

Чтобы возвысить частное в степень, достаточно возвысить в эту степень делимое и делитель и первый результат разделить на второй.

Короче говоря, степень частного равна частному степеней. Действительно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\dots\frac{a}{b} = \frac{aaa\cdots a}{bbb\cdots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Поменяв местами левую и правую части равенства $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, получим, что

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,$$

т. е. частное степеней с одинаковыми показателями равно степени с тем же показателем и основанием, равным частному оснований данных степеней.

Возведение степени в степень

Чтобы возвысить степень числа в новую степень, достаточно возвысить это число в степень, показатель которой равен произведению показателей степеней.

Действительно,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overset{\cdots}{m+m+m+\cdots+m}} = a^{mn}.$$

Примеры:

$(a^3)^2 = a^6$; $[(x-y)^2]^5 = (x-y)^{10}$; $(-2a^4b^2c)^4 = 16a^{16}b^8c^4$;

$(4^2)^3 = 4^6$; $\left[\frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}\right]^5 = \frac{(a+b)^{10}}{(a-b)^{15}}$.

$(5a^2b^3)^3 = 125a^6b^9$;

УПРАЖНЕНИЯ

87. Найти значения выражений:

$(0{,}9)^3$; $(-2)^{10}$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$; $(-0{,}1)^5$; $\left(-3\frac{3}{4}\right)^2$; $\left(1+\frac{1}{3}\right)^3$; $-(-2)^4$; $-(-2)^5$.

88. Считая, что k есть натуральное число, найти значение каждого из следующих выражений:

1) $(-1)^{2k}$; 2) $(-1)^{2k+1}$ и 3) $(-1)^k$.

89. Записать в краткой форме выражения:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a;\ x \cdot x^2;\ a^3 \cdot a^4 \cdot a^5;$$
$$(a+b)^2 (a+b)^3;\ a \cdot a^{10};$$
$$\frac{x+y}{x-y} \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{10}.$$

90. Проверить равенства:

1) $(abc)^2 = a^2b^2c^2$ при $a=2$, $b=3$, $c=4$;

2) $(a^2)^3 = a^6$ при $a=2$.

91. Произведение $(a^2)^3 \cdot (a^5)^2$ записать в виде степени.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ УМНОЖЕНИЯ

В предыдущей главе были выведены две основные формулы умножения:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (см. стр. 81).

Кроме этих формул, необходимо запомнить еще и следующие:

3) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Эта формула читается так:

Куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа.

4) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Читается так:

Куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа.

5) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Читается так:

Произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.

6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.

Читается:

Произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел.
(Здесь неполным квадратом разности чисел a и b названо выражение a^2-ab+b^2. Это название условное; оно принято потому, что выражение a^2-ab+b^2 имеет некоторое сходство с выражением $a^2-2ab+b^2$.)

7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Читается:

Произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел.
(Здесь неполным квадратом суммы чисел a и b названо выражение a^2+ab+b^2.)

8) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Квадрат многочлена равен сумме квадратов всех его членов, сложенной с удвоенными произведениями каждого члена на каждый из последующих.

Все эти формулы легко выводятся путем умножения многочленов и приведения подобных членов.

Например:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=$$
$$=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$$
$$=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$
$$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)=a^2+ab+ac+$$
$$+ab+b^2+bc+ac+bc+c^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

Остальные пять формул предлагается учащемуся вывести самостоятельно.

Формула 8 верна для любого многочлена. Например,
$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+$
$+2bc+2bd+2cd.$

Применим формулу 8 к частным случаям.
$(a-b-2)^2=a^2+(-b)^2+(-2)^2+2a(-b)+$
$+2a(-2)+2(-b)\cdot(-2)=a^2+b^2+4-2ab-4a+4b;$
$(2x-3y+z-1)^2=4x^2+9y^2+z^2+1-12xy+$
$+4xz-4x-6yz+6y-2z.$

Формулу 8 можно вывести еще и так:
$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+$
$+c^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2=a^2+b^2+c^2+$
$+2ab+2ac+2bc.$

Во всяком равенстве

$$A=B,$$

A называется левой частью равенства, а B — правой.

Обратим внимание на то, что во всех основных формулах умножения левая часть есть одночлен, а правая — многочлен.

Примеры применения основных формул умножения

1) $(12+5)^2=12^2+2\cdot12\cdot5+5^2;$
2) $(5x+3y)^2=25x^2+30xy+9y^2;$
3) $(a^3+b^3)^2=a^6+2a^3b^3+b^6;$
4) $[(-8)+(-5)]^2=(-8)^2+2(-8)\cdot(-5)+(-5)^2;$
5) $(5+4)^3=5^3+3\cdot5^2\cdot4+3\cdot5\cdot4^2+4^3;$
6) $(x-1)^3=x^3-3\cdot x^2\cdot1+3\cdot x\cdot1^2-1^3=x^3-3x^2+3x-1;$
7) $(17+5)\cdot(17-5)=17^2-5^2;$
8) $[(-5)+(-3)]\cdot[(-5)-(-3)]=(-5)^2-(-3)^2;$
9) $(5x+3y)(5x-3y)=25x^2-9y^2;$
10) $[(a+b)+x]\cdot[(a+b)-x]=(a+b)^2-x^2;$
11) $(5+3)(5^2-5\cdot3+3^2)=5^3+3^3;$
12) $[(-5)+(-3)]\cdot[(-5)^2-(-5)\cdot(-3)+(-3)^2]=$
$=(-5)^3+(-3)^3=-152;$
13) $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)=8a^3+27b^3;$
14) $(9-4)(9^2+9\cdot4+4^2)=9^3-4^3;$
15) $[(a+b)-(x+y)][(a+b)^2+(a+b)(x+y)+(x+y)^2]=$
$=(a+b)^3-(x+y)^3;$
16) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)=a^6+b^6;$
17) $(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)=[(x^2+a^2)+ax]\cdot[(x^2+a^2)-$
$-ax]=(x^2+a^2)^2-a^2x^2=x^4+a^2x^2+a^4;$
18) $(3+4+5)^2=3^2+4^2+5^2+2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot5;$
19) $[(-3)+(+4)+(-5)]^2=(-3)^2+(+4)^2+(-5)^2+$
$+2\cdot(-3)\cdot(+4)+2\cdot(-3)\cdot(-5)+2\cdot(+4)\cdot(-5);$
20) $(x+y-z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz.$

Рекомендуется самостоятельно убедиться, что

$$(a-b)^2=(b-a)^2 \text{ и } (a-b)^3=-(b-a)^3.$$

Основные формулы умножения многократно применяются при решении задач и в дальнейшем.

§ 3. ТОЖДЕСТВА И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Тождества

Опираясь на правила действий, изложенные в главе III, легко убедиться, что равенство

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

справедливо при любых значениях входящих в него букв.

То же самое можно сказать, например, и относительно каждого из следующих равенств:

$$(x^2-xy+y^2)(x+y)=x^3+y^3;$$
$$(x+3)^2+1=x^2+6x+10;$$
$$(a+b)^2-a^2-2ab-b^2=0;$$
$$(x+1)(x-2)=x^2-x-2;$$
$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2;$$
$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(ay+bx)^2;$$
$$x^2-25=(x+5)(x-5).$$

Равенство же

$$\frac{x^2-25}{x-5}=x+5$$

справедливо при всех значениях буквы x, кроме $x=5$. (При $x=5$ правая часть принимает значение 10, а левая теряет смысл.)

Равенство

$$\frac{x^4-1}{x^2-1}=x^2+1$$

справедливо при всех значениях буквы x, кроме $x=1$ и $x=-1$. (При $x=1$ и при $x=-1$ левая часть теряет смысл.)

Равенство

$$\frac{x}{x^3+x}=\frac{x^2}{x^4+x^2}$$

справедливо при любых значениях буквы x, кроме $x=0$. (При $x=0$ обе части этого равенства теряют смысл.)

Определение. ***Равенство, справедливое при любых значениях букв, допустимых* для его левой и правой частей, называется тождеством.***

---

* См. стр. 54.

Любое из приведенных выше равенств является тождеством.

Тождеством называется также справедливое равенство, не содержащее букв (числовое тождество).

Равенство, составленное из двух совершенно одинаковых выражений, конечно, тоже является тождеством, например равенство

$$a+b+c=a+b+c.$$

Но подобное тождество не содержит ничего интересного; оно говорит лишь о том, что всякое выражение равно самому себе.

Тождество, в котором левая и правая части совершенно одинаковы, назовем тривиальным. (Прилагательное, «тривиальный» происходит от латинского слова «trivialis», что означает «мало содержательный», «элементарный до очевидности», «мало интересный».)

Тривиальные тождества не представляют интереса; тождества же нетривиальные, напротив, представляют большой интерес. С их помощью решаются многочисленные теоретические и практические задачи. Заметим, кроме того, что каждое нетривиальное тождество выражает собой некоторое определенное свойство чисел. Например, тождество

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

говорит о том, что произведение суммы двух любых чисел на их разность равняется разности квадратов этих чисел. Поясним это на примере.

Возьмем два каких-нибудь числа, скажем, $+10$ и -7; их сумма будет $+3$, а их разность $+17$. Произведение суммы на разность будет $+51$.

С другой стороны, квадрат первого числа будет $+100$, а квадрат второго $+49$. Разность этих квадратов дает снова то же самое число $+51$.

Тождество

$$a+b=b+a$$

нетривиальное; оно выражает имеющий важное значение переместительный закон сложения.

Определение. ***Два выражения, равные друг другу, при любых допустимых значениях входящих в них букв, называются тождественно равными.***

Примеры тождественно равных выражений:

1) $(a+b)(a-b)$ и a^2-b^2; 3) $x^2+6x+10$ и $(x+3)^2+1$;

2) $(x-3)(x-5)$ и $x^2-8x+15$; 4) $\frac{x^4-1}{x^2-1}$ и x^2+1.

Легко видеть, что не всякие два выражения будут тождественно равными. Например, выражения $2a+1$ и $a+7$ не будут тождественно равными. Их значения отличаются друг от друга, например, при $a=0$.

Теперь можно сказать следующее: преобразовать данное выражение — значит составить новое выражение, тождественно равное данному.

Если в тождестве заменить какую-либо букву произвольным алгебраическим выражением, то получится опять же тождество. Например, заменяя в тождестве

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

букву x выражением $(a+b)$, а букву y выражением ab, получим новое тождество

$$[(a+b)+ab]^2=(a+b)^2+2(a+b)ab+(ab)^2.$$

Каждым тождеством можно пользоваться двояко. Например, на основании тождества

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

можно выражение $(a+5)^2$ заменить выражением

$$a^2+10a+25;$$

а в другом случае, скажем, выражение

$$4a^2+12ab+9b^2$$

полезно заменить выражением

$$(2a+3b)^2.$$

Пусть требуется вычесть из выражения $(a+b)^2$ выражение a^2+b^2. В этом случае целесообразно выражение $(a+b)^2$ заменить выражением $a^2+2ab+b^2$ и тогда легко увидеть, что разность

$$(a+b)^2-(a^2+b^2)$$

равна $2ab$.

Пусть требуется вычислить значение выражения

$$326^2+2\cdot 326\cdot 674+674^2.$$

В этом случае для получения ответа целесообразно заменить данный многочлен выражением

$$(326+674)^2$$

и этим самым гораздо легче обнаружить, что искомым ответом будет число 1 000 000.

Для того чтобы уметь применять тождество двояко, надо уметь и формулировать его двояко. Например, тождество

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

формулируется так: ***произведение суммы двух алгебраических выражений на их разность равно разности квадратов этих же алгебраических выражений.***

Если же мы перепишем наше тождество в виде

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

то его придется формулировать иначе, а именно: ***разность квадратов двух алгебраических выражений равна произведению суммы этих же выражений на их разность.***

§ 4. ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ И ОДНОЧЛЕНОВ

Деление степеней

При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, если показатель степени делимого больше показателя степени делителя. Например,

$$a^{12} : a^5 = a^{12-5} = a^7.$$

Справедливость этого легко доказать умножением

$$a^7 \cdot a^5 = a^{12}.$$

Оговорка, требующая, чтобы показатель степени делимого был больше показателя степени делителя, необходима. В самом деле, мы не можем писать

$$a^3 : a^3 = a^0 \text{ и } a^3 : a^5 = a^{-2},$$

так как символы a^0 и a^{-2} пока для нас смысла не имеют. Вопрос об этих символах будет рассмотрен на странице 126. Пока же равенство $a^m : a^n = a^{m-n}$ мы можем писать лишь при условии, что $m > n$, где m и n — натуральные числа.

Примечание. Равенство $a^{12} : a^5 = a^7$ является верным при всяком значении буквы a, кроме $a = 0$. При $a = 0$ выражение $a^{12} : a^5$ обращается в $\frac{0}{0}$, т. е. не имеет смысла, в то время как выражение a^7 обращается в нуль.

Деление одночленов

Правило деления одночленов проще всего уяснить на примерах. Поэтому приведем несколько примеров, в которых деление уже выполнено.

1) $(10a^5b^5c^5) : (2a^2b^2c^2) = 5a^3b^3c^3$;
2) $[-12a^5(x + y)^4] : [-6a^2(x + y)] = 2a^3(x + y)^3$;
3) $(10a^5b^5c^5) : (2a^2c^2) = 5a^3b^5c^3$;
4) $(-35a^5b^5x^5) : (5a^2b^2) = -7a^3b^3x^5$;
5) $(-35a^5b^5x^5) : (5a^2b^2x^5) = -7a^3b^3$.

Верность этих равенств легко доказывается умножением частного на делитель.

Пусть имеются два целых алгебраических выражения. Говорят, что первое из них делится на второе нацело, если существует такое третье целое выражение, произведение которого на второе выражение дает первое. Например, $15a^4b^3$ делится нацело на $2a^2b^2$, так как существует целое выражение $\frac{15}{2}a^2b$, от умножения которого на $2a^2b^2$ получается $15a^4b^3$.

Если делитель содержит хоть одну букву, которую делимое вовсе не содержит или содержит с меньшим показателем, то деление нацело невозможно.

Например, $12a^2b^3$ не делится нацело на $4abc$; $12ab^3$ не делится нацело на $4a^2b$.

Если даны два таких одночлена, что каждое буквенное выражение, входящее во второй одночлен, входит и в первый и притом с не меньшим показателем, чем во второй, то при делении первого одночлена на второй получается целый одночлен. При этом числовой коэффициент частного получается делением числового коэффициента делимого на числовой коэффициент делителя.

Каждое буквенное выражение, входящее в делимое и не входящее в делитель, переходит в частное с неизменным показателем.

Например, $15a^9x^3 : 5a^2 = 3a^7x^3$.

Каждое буквенное выражение, входящее в делимое с большим показателем, чем в делитель, входит в частное с показателем, равным разности его показателей в делимом и делителе.

Буквенное выражение, входящее в делимое и в делитель с одинаковыми показателями, вовсе не входит в результат деления (в частное).

Например, $15a^9x^3 : 5a^2x^3 = 3a^7$.

§ 5. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ

Из арифметики известно, что наибольшим общим делителем произведений

$$2^2\cdot 5\cdot 7^2;\ \ 2^4\cdot 5^3\cdot 7^4;\ \ 2^2\cdot 5^2\cdot 7^2\cdot 11$$

будет

$$2^2\cdot 5\cdot 7^2.$$

По аналогии с этим наибольшим общим делителем произведений

$$1)\ a^3bc^2;\qquad 2)\ a^4b^3c^4;\qquad 3)\ a^2b^2c^2d$$

будет выражение

$$a^2bc^2.$$

Наибольшим общим делителем произведений

1) $12a^3(b+c)^4$; 2) $-18a^2(b+c)^2$; 3) $24a(b+c)^3$

будет выражение

$$6a(b+c)^2.$$

Наибольшим общим делителем таких произведений, как, например,

$$ab,\ ac \text{ и } bc,$$

принято считать единицу.

Упражнение. Найти частное от деления каждого из одночленов

$$35x^3(y+z)^4;\ -42x^2(y+z)^2;\ 56x(y+z)^3$$

на их общий наибольший делитель.

§ 6. ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН

Частное от деления многочлена на одночлен равно сумме частных, полученных от деления на этот одночлен каждого члена многочлена, т. е.

$$(a-b+c):m=(a:m)+(-b:m)+(c:m).$$

Правильность произведенного преобразования вытекает из того, что

$$[(a:m)+(-b:m)+(c:m)]\cdot m=a-b+c.$$

Примеры:

1) $(6a^2b^3-15ab^4+9a^3b^2):3ab^2=2ab-5b^2+3a^2$;

2) $(3a^2b^3-15ab^4+9a^3b^2):45ab^2=\frac{1}{15}ab-\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{5}a^2$;

3) $(6a^2b^3-15ab^4+c):3ab^2=2ab-5b^2+\frac{c}{3ab^2}$.

В первых двух примерах результатом деления оказалось целое алгебраическое выражение, а в третьем дробное.

Замечание. ***Многочлен, не содержащий подобных членов, делится нацело на одночлен тогда и только тогда, когда каждый его член делится нацело на этот одночлен.***

Многочлен всегда делится нацело на наибольший общий делитель его членов.

Например, многочлен

$$6a^2b^3-15ab^4+9a^3b^2$$

состоит из следующих членов:

$$6a^2b^3; \quad -15ab^4; \quad 9a^3b^2.$$

Наибольший общий делитель этих членов есть $3ab^2$. Частное от деления многочлена $6a^2b^3-15ab^4+9a^3b^2$ на $3ab^2$ будет $2ab-5b^2+3a^2$, т. е. действительно целое выражение.

§ 7. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОЖИТЕЛИ

Мы уже видели некоторые применения алгебраических преобразований к решению задач.

В настоящем параграфе излагается еще одно специальное преобразование, которое называется разложением многочлена на множители.

Разложение целого многочлена на целые множители есть такая операция, с помощью которой мы представляем данный многочлен в виде произведения, тождественно равного данному многочлену, причем множители этого произведения должны быть некоторыми новыми целыми выражениями.

Приведем сначала несколько примеров уже выполненного разложения многочленов на множители:

$$ax+bx+cx=x(a+b+c);$$
$$x^2+7x+12=(x+3)(x+4);$$
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y);$$
$$x^4-1=(x^2+1)(x+1)(x-1);$$
$$x^4+4=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2).$$

В верности каждого из этих равенств легко убедиться путем перемножения множителей, стоящих в его правой части. Однако сама операция разложения многочлена на множители, т. е. отыскание произведения, равносильного данному многочлену, не всегда является легкой задачей.

Существует четыре основных способа разложения многочленов на множители:

1) вынесение за скобки;
2) группировка;
3) применение основных формул умножения;
4) введение новых вспомогательных членов.

Кроме этих четырех основных способов, существуют и другие, специальные, которые изложены в последующих разделах курса алгебры.

Вынесение общего множителя за скобки

Этот способ заключается в следующем. Данный многочлен заменяют произведением общего наибольшего делителя всех его членов на частное, полученное от деления данного многочлена на этот общий делитель. Этот общий наибольший делитель называется множителем, выносимым за скобки.

Примеры:

1) $ax+ay+az=a(x+y+z)$;
2) $15ab^2-12a^2b=3ab(5b-4a)$;
3) $x^4+x^3-x^2=x^2(x^2+x-1)$;
4) $-ax-bx-cx=-x(a+b+c)$;
5) $a(x^2+y^2)+b(x^2+y^2)=(x^2+y^2)(a+b)$;
6) $a^2(x-y)-ab(x-y)+b^2(x-y)=(x-y)(a^2-ab+b^2)$;
7) $a(px+qx)+b(py+qy)=ax(p+q)+by(p+q)=$ $=(p+q)(ax+by)$;
8) $m(2x-y)-n(y-2x)=m(2x-y)+n(2x-y)=$ $=(2x-y)(m+n)$.

Примечание. За скобки можно выносить и любой множитель. Например,

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right), \quad \text{или} \quad a+b=x\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right).$$

Последние два примера существенно отличаются от всех предыдущих. Во всех предыдущих примерах в скобках получались целые выражения, а в последних двух дробные.

Разложение на множители способом группировки

Этот способ заключается в следующем. Члены многочлена разбиваются на две или несколько групп с таким расчетом, чтобы каждую группу было бы возможно преобразовать в произведение, и так, чтобы эти произведения имели бы общий множитель. После этого применяется способ вынесения за скобки общего наибольшего делителя вновь образовавшихся членов.

Примеры:

1) $ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=$ $=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y)$;
2) $ax+bx-ay-by=(ax+bx)-(ay+by)=$ $=x(a+b)-y(a+b)=(a+b)(x-y)$;
3) $ax+bx+ay+by+az+bz=(ax+bx)+(ay+by)+$ $+(az+bz)=x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)=$ $=(a+b)(x+y+z)$;
4) $ax+bx+ay+by+az+bz=(ax+ay+az)+$ $+(bx+by+bz)=a(x+y+z)+b(x+y+z)=$ $=(x+y+z)(a+b)$;
5) $ax-bx-ay+by=(ax-bx)-(ay-by)=x(a-b)-$ $-y(a-b)=(a-b)(x-y)$;
6) $x^2+4yz-xy-4xz=x^2-xy-4xz+4yz=(x^2-xy)-$ $-(4xz-4yz)=x(x-y)-4z(x-y)=(x-y)(x-4z)$;
7) $(a+b)^2-5a-5b=(a+b)^2-(5a+5b)=(a+b)^2-$ $-5(a+b)=(a+b)[(a+b)-5]=(a+b)(a+b-5)$.

Разумеется, что способ группировки является пригодным не ко всякому многочлену.

Например, он не пригоден к многочлену $x^2+3x+2x+2$. (Способ разложения таких многочленов на множители изложен на стр. 271.)

Многочлен $ax+ay+bx^2+by^2$ тоже нельзя разложить на множители способом группировки, но его и вообще нельзя разложить на целые множители.

Применение основных формул умножения

В тех случаях, когда многочлен, подлежащий разложению на множители, имеет форму правой части какой-либо основной формулы умножения, то его разложение на множители достигается применением соответствующей основной формулы умножения, записанной в обратном порядке. Например, из формулы

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

следует, что

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

т. е. ***разность квадратов двух выражений равна произведению суммы этих выражений на их разность.***

Примеры:

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

$9x^2-4y^2=(3x)^2-(2y)^2=(3x+2y)(3x-2y)$;

$x^2-1=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$;

$(a+b)^2-(x+y)^2=[(a+b)+(x+y)][(a+b)-$
$-(x+y)]=(a+b+x+y)(a+b-x-y)$;

$a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=$
$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$;

$(x+2y)^2-9z^2=(x+2y+3z)(x+2y-3z)$.

Из формулы

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

следует, что

$$a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2,$$

т. е. ***если многочлен содержит три члена, из которых два представляют собой квадраты, а третий член есть плюс (или минус) удвоенное произведение оснований этих квадратов, то этот многочлен можно заменить квадратом суммы (или квадратом разности).***

Квадрат суммы или квадрат разности представляет собой по существу произведения. Поэтому применением основных формул умножения в данном случае мы по существу достигаем цели разложения многочлена на множители.

Аналогично применяют и остальные основные формулы умножения.

Примеры:

$a^2+2ax+x^2=(a+x)^2$; $a^2+10a+25=(a+5)^2$;

$(a+b)^2+2(a+b)x+x^2=[(a+b)+x]^2=(a+b+x)^2$;

$(a+b)^2+2(a+b)(x+y)+(x+y)^2=$
$=[(a+b)+(x+y)]^2=(a+b+x+y)^2$;

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$;

$x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$;

$a^3+6a^2+12a+8=(a+2)^3$;

$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$;

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

$a^3+8=a^3+2^3=(a+2)(a^2-2a+4)$;

$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$;

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

Введение новых вспомогательных членов

Способ введения новых вспомогательных членов заключается в том, что данный многочлен заменяется другим многочленом, ему тождественно равным, но содержащим иное число членов, причем это делается с таким расчетом, чтобы можно было применить к полученному многочлену способ группировки.

Примеры:

1) $x^2+7x+12=x^2+3x+4x+12=x(x+3)+4(x+3)=(x+3)(x+4)$;

2) $x^2-x-12=x^2-4x+3x-12=x(x-4)+3(x-4)=(x-4)(x+3)$;

3) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$;

4) $2x^2+10x+12=2x^2+4x+6x+12=2x(x+2)+6(x+2)=(x+2)(2x+6)=2(x+2)(x+3)$;

5) $x^3+x^2+4=x^3+8+x^2-4=(x^3+2^3)+(x^2-2^2)=(x+2)(x^2-2x+4)+(x+2)(x-2)=(x+2)[(x^2-2x+4)+(x-2)]=(x+2)(x^2-x+2)$.

Некоторые более сложные примеры

1) $2bc+a^2-b^2-c^2=a^2-b^2+2bc-c^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-(b-c)^2=[a+(b-c)][a-(b-c)]=(a+b-c)(a-b+c)$;

2) $a^6-b^6=(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$;

3) $x^3-3x^2-3x+1=x^3+1-3x^2-3x=(x^3+1)-(3x^2+3x)=(x+1)(x^2-x+1)-3x(x+1)=(x+1)[(x^2-x+1)-3x]=(x+1)(x^2-4x+1)$;

4) $(ax - by)^2 + (bx + ay)^2 = a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2 +$
$+ b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + b^2x^2 + a^2y^2 =$
$= (a^2x^2 + b^2x^2) + (a^2y^2 + b^2y^2) = x^2(a^2 + b^2) + y^2(a^2 + b^2) =$
$= (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;

5) $x^4 - 21x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 25x^2 = (x^2 + 2)^2 - (5x)^2 =$
$= (x^2 + 2 + 5x)(x^2 + 2 - 5x) = (x^2 + 5x + 2)(x^2 - 5x + 2)$;

6) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + z^3 - 3x^2y -$
$- 3xy^2 - 3xyz = (x + y)^3 + z^3 - (3x^2y + 3xy^2 + 3xyz) =$
$= (x + y + z)[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2] - 3xy(x + y + z) =$
$= (x + y + z)[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2 - 3xy] =$
$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$;

7) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = [(x + y + z)^3 - x^3] -$
$- (y^3 + z^3) = [(x + y + z) - x][(x + y + z)^2 +$
$+ x(x + y + z) + x^2] - (y^3 + z^3) = (y + z)(x^2 + y^2 + z^2 +$
$+ 2xy + 2xz + 2yz + x^2 + xy + xz + x^2) -$
$- (y + z)(y^2 - yz + z^2) =$
$= (y + z)[3x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 3xz + 2yz - (y^2 - yz + z^2)] =$
$= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz) =$
$= (y + z)[3x(x + y) + 3z(x + y)] =$
$= (y + z)(x + y)(3x + 3z) = 3(x + y)(y + z)(z + x)$;

8) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = [(a - b)^3 + (b - c)^3] +$
$+ (c - a)^3 = [(a - b) + (b - c)][(a - b)^2 - (a - b)(b - c) +$
$+ (b - c)^2] + (c - a)^3 = (a - c)[(a - b)^2 - (a - b)(b - c) +$
$+ (b - c)^2] - (a - c)^3 = (a - c)[(a - b)^2 - (a - b)(b - c) +$
$+ (b - c)^2 - (a - c)^2] = (a - c)(a^2 - 2ab + b^2 - ab + ac +$
$+ b^2 - bc + b^2 - 2bc + c^2 - a^2 + 2ac - c^2) =$
$= (a - c)(3b^2 - 3ab + 3ac - 3bc) = 3(a - c)(b^2 - ab + ac - bc) =$
$= 3(a - c)[(b^2 - ab) - (bc - ac)] =$
$= 3(a - c)[b(b - a) - c(b - a)] = 3(a - c)(b - a)(b - c) =$
$= 3(a - b)(b - c)(c - a)$;

9) $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 =$
$= (x^2 + y^2 + xy)(x^2 + y^2 - xy)$.

Некоторые дополнительные замечания

Не всякий многочлен разлагается на рациональные целые множители. Например, нельзя разложить на такие множители следующие многочлены:

$a^2 + b^2$	(сумма квадратов);
$a^2 + ab + b^2$	(неполный квадрат суммы);
$a^2 - ab + b^2$	(неполный квадрат разности);
$a + b$	(сумма чисел a и b);
$a^2 + b^3$	(сумма квадрата числа a и куба числа b).

Многочлен, не допускающий разложения на целые множители, называется неразложимым или неприводимым. Неприводимых многочленов существует сколько угодно.

Иногда приходится пользоваться разложением многочлена на нецелые множители. Например:

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right),$$

$$a+b=x\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x}\right).$$

УПРАЖНЕНИЯ

92. Произвести деление степеней:

1) $x^7 : x^4$;
2) $-a^5 : a^2$;
3) $y^4 : y$;
4) $(a-2b)^6 : (a-2b)^2$;
5) $a^{k+2} : a^{k+1}$;
6) $\left(\frac{3}{7}\right)^{10} : \left(\frac{3}{7}\right)^8$;
7) $x^{k+1} : x^{k-1}$;
8) $(-1)^{2k+1} : (-1)^{2k-1}$.

92а. Произвести деление одночленов:

1) $-0{,}4a^5b^3c : 0{,}5a^2b^2$; 2) $\frac{4}{3}\pi r^3 : 4\pi r^2$;
3) $12(a+b)^3(x-y)^5 : 6(a+b)^2(x-y)^3$.

92б. Найти наибольший общий делитель одночленов:

1) $am,\ bm,\ cm$;
2) $xy^2;\ x^2y$;
3) $25a^3b^2c,\ 5a^4bc^2,\ 75a^2b^2c^3$;
4) $a(x+y)(x-y),\ a(x+y)(x-2y)$;
5) $a^3(x+y)^4,\ a^4(x+y)^3$;
6) $25a(x-y),\ 15b(y-x)$.

92в. Произвести деление многочлена на одночлен:

1) $(4a+2b-bc) : 2$;
2) $(14ab+21abc) : 7a$;
3) $(10xy-15xz+5x^2) : 5x$;
4) $(a^4+a^3+2a^2) : a^2$;
5) $[20(a+x)^5-24(a+x)^4+16(a+x)^3] : 4(a+x)^3$.

92г. Разложить на множители многочлены:

1) $4ab-8ac$;
2) $8a^5b^2-12a^4b^3$;
3) $x^{3k}+x^k$;
4) $a^{m+n}-a^m$;
5) $a(x-y)-b(y-x)$;
6) $a(a+b+c)+b(a+b+c)+c(a+b+c)$;
7) $(x+y)^8+(x+y)^7$;
8) $xy+yz+x+z$;
9) $ab+1+a+b$;
10) $m(p-q)+nq-np$.

93. Разложить на множители:

1) $(a+b)^2-(x+y)^2$;
2) $(a+b)^2-1$;
3) $1-x^2y^2$;
4) $36a^4b^2-49x^4$;
5) $a^2+4ab+4b^2$;
6) $a^2x^2-2abx+b^2$;
7) $9(3x+y)^2-6(3x+y)+1$;
8) $-x^2+2xy-y^2$.

94. Разложить на множители:

1) a^3+8;
2) a^3-27;
3) x^3+1;
4) $(x+y)^3-1$;
5) $-a^3-b^3$.

95. Разложить на множители:

1) a^4-b^4;
2) a^6-b^6;
3) a^3-a;
4) $4-x^2-2xy-y^2$;
5) $1-x^2+2xy-y^2$;
6) n^4+4.

96. Доказать тождество:

$$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)=$$
$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

ГЛАВА V

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

§ 1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ

Определение и основное свойство дроби

Определение. ***Частное (отношение) двух алгебраических выражений, записанное при помощи черты деления, называется алгебраической дробью.***

Например, выражения

$$\frac{a}{b};\quad \frac{2}{x};\quad \frac{2ab}{-5c};\quad \frac{a^2+b^2}{x-y};$$

$$\frac{-a}{a};\quad \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1};\quad \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}};$$

$$\frac{a+\frac{1}{a}}{a-\frac{1}{a}}$$

суть алгебраические дроби. При этом делимое называется числителем, а делитель — знаменателем. Например, алгебраическая дробь

$$\frac{-\frac{2}{3}}{+\frac{5}{7}}$$

имеет числителем число $-\frac{2}{3}$, а знаменателем число $+\frac{5}{7}$.

Основное свойство алгебраической дроби. ***Величина алгебраической дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить (или разделить) на одно и то же число, не равное нулю.*** Это свойство следует из того, что частное не меняется при умножении (или делении) делимого и делителя на одно и то же число, не равное нулю.

Основное свойство дроби записывается в виде формул:

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}; \quad \frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}},$$

где

$$c \neq 0.$$

Несократимые и сократимые дроби

Если наибольший общий делитель * числителя и знаменателя дроби равен единице, то дробь называется **несократимой**.

Например:

$$\frac{a}{b}; \quad \frac{5x^2b}{7xy}; \quad \frac{a+b}{a-b}; \quad \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2};$$

$$\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}; \quad \frac{ax+bx}{py+qy}; \quad \frac{a+b}{a+2b}$$

суть несократимые дроби.

Если же наибольший общий делитель числителя и знаменателя отличен от единицы, то дробь называется **сократимой**.

Например:

$$\frac{ac}{bc}; \quad \frac{abc}{abx}; \quad \frac{3abc}{12abx};$$

$$\frac{a^2}{a^5}; \quad \frac{4ab^2c^3}{6a^4bc}; \quad \frac{a(x-y)}{b(x-y)}; \quad (x \neq y);$$

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}; \quad \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$$

суть сократимые дроби.

Если числитель или знаменатель дроби отдельно или одновременно являются многочленами, то для решения вопроса о сократимости или несократимости этой дроби необходимо эти многочлены предварительно разложить на целые неприводимые множители, если это возможно. Например, дробь $\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$ сократима, так как после разложения числителя и знаменателя на множители она принимает вид:

$$\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+3)}.$$

Если числитель и знаменатель дроби разделить на их наибольший общий делитель, то получится несократимая дробь, тождественно равная данной дроби.

---

* См. стр. 105.

Примеры сокращения дробей:

$$\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b};\quad \frac{abx}{aby}=\frac{x}{y};\quad \frac{3abc}{12abc}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{a^2}{a^5}=\frac{1}{a^3};\quad \frac{4ab^2c^3}{6a^4bc}=\frac{2bc^2}{3a^3};\quad \frac{a(x-y)}{b(x-y)}=\frac{a}{b};\qquad (x\neq y).$$

$$\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b};\qquad (a\neq b) \text{ и } (a\neq -b).$$

$$\frac{ax+bx}{ay+by}=\frac{(a+b)x}{(a+b)y}=\frac{x}{y};\qquad (a\neq -b).$$

$$\frac{a^4-2a^2+1}{a^3-3a^2+3a-1}=\frac{(a^2-1)^2}{(a-1)^3}=\frac{[(a+1)(a-1)]^2}{(a-1)^3}=$$

$$=\frac{(a+1)^2(a-1)^2}{(a-1)^3}=\frac{(a+1)^2}{a-1}=\frac{a^2+2a+1}{a-1};\qquad (a\neq 1).$$

Сократить дробь — это значит разделить числитель и знаменатель этой дроби на какой-нибудь их общий множитель.

Полученная после этого новая дробь будет тождественно равна первоначальной дроби.

Например:

$$\frac{abx}{aby}=\frac{ax}{ay}.$$

(Здесь дробь сокращена только на общий множитель b.)

$$\frac{12a(x^2+3x+2)}{15a(x^2+4x+3)}=\frac{4(x^2+3x+2)}{5(x^2+4x+3)}.$$

(Здесь дробь сокращена только на $3a$.)

Примечание. Выражение $\frac{5a^2b}{a}$ по форме дробное, но по существу целое, так как оно тождественно равно выражению $5ab$. Однако между выражениями $\frac{5a^2b}{a}$ и $5ab$ имеется еще и другое различие, а именно выражение $\frac{5a^2b}{a}$ при $a=0$ смысла не имеет, тогда как выражение $5ab$ при $a=0$ имеет смысл, так как принимает определенное значение нуль.

Перемена знаков у членов дроби

Если числитель и знаменатель дроби заменить величинами, им противоположными, то значение дроби не изменится, так как эта операция равносильна умножению числителя и знаменателя на одно и то же число — 1. Например:

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b};\quad \frac{-a-b}{y-x}=\frac{a+b}{-y+x}=\frac{a+b}{x-y}.$$

Если числитель дроби заменить величиной, ему противоположной, и при этом переменить знак, стоящий перед дробью, на противоположный, то получится выражение, равное первоначальному.

Например:

$$\frac{+20}{+4}=-\frac{-20}{+4};\quad \frac{a}{b}=-\frac{-a}{b};\quad \frac{a-b}{a+b}=-\frac{-a+b}{a+b}=-\frac{b-a}{a+b};$$

$$\frac{-a-b}{a^2+b^2}=-\frac{a+b}{a^2+b^2};\quad -\frac{-a}{b}=\frac{a}{b};\quad -\frac{y-x}{xy}=\frac{-y+x}{xy}=\frac{x-y}{xy}.$$

Если знаменатель дроби заменить величиной, ему противоположной, и при этом переменить знак, стоящий перед дробью, на противоположный, то получится выражение, равное первоначальному.

Например:

$$\frac{a}{b}=-\frac{a}{-b};\quad -\frac{ab}{b-a}=\frac{ab}{a-b};$$

$$-\frac{1}{1+x-x^2}=\frac{1}{-1-x+x^2}=\frac{1}{x^2-x-1}.$$

Примечание. Так как $a-b$ и $b-a$ являются величинами противоположными, то $\frac{a-b}{b-a}$ всегда представляет собой минус единицу, если только $a \neq b$.

Если же $a=b$, то выражение $\frac{a-b}{b-a}$ обращается в $\frac{0}{0}$ и потому смысла не имеет.

§ 2. НАИМЕНЬШЕЕ ОБЩЕЕ КРАТНОЕ

Из арифметики известно, что наименьшим общим кратным произведений

$$2^3\cdot 5\cdot 7^2;\quad 2\cdot 5^2\cdot 7;\quad 5\cdot 7^3$$

является произведение

$$2^3\cdot 5^2\cdot 7^3.$$

По аналогии с этим наименьшим общим кратным произведений

$$a^3bc^2;\quad ab^2c;\quad bc^3$$

будет выражение

$$a^3b^2c^3.$$

Наименьшим общим кратным произведений

$$12a^3(b+c)^4;\qquad -18a^2(b+c)^2;\qquad 24a(b+c)^3$$

будет

$$72a^3(b+c)^4.$$

Наименьшим общим кратным произведений

$$ab; \quad ac; \quad bc$$

будет

$$abc.$$

Определение. ***Общим кратным двух или нескольких данных целых алгебраических выражений называется всякое целое алгебраическое выражение, делящееся на каждое из данных.***

Среди всех общих кратных имеется одно, называемое наименьшим общим кратным.

Определение. ***Наименьшим общим кратным называется такое общее кратное, на которое делятся все прочие общие кратные.***

Поясним это на примере.

Для целых выражений

$$ab, \ bc, \ ac$$

общими кратными будет, например, $a^2b^2c^2$, ab^2c^3, abc, a^4bc и т. д.

Наименьшим же общим кратным будет abc.

Все прочие общие кратные $a^2b^2c^2$, ab^2c^3, a^4bc и т. д. делятся на abc.

Наименьшим общим кратным выражений

$$a^2-b^2; \quad (a-b)^2; \quad (a+b)^2$$

будет $(a^2-b^2)^2$.

Наименьшим общим кратным выражений

$$x^2-1; \quad x^3-1; \quad x^2+x+1$$

будет $(x^3-1)(x+1)$.

Чтобы составить наименьшее общее кратное нескольких многочленов, следует сначала эти многочлены разложить на неприводимые множители.

Примеры:

1. Найти наименьшее общее кратное многочленов

$$a^2-b^2; \quad 5a+5b; \ ac-bc.$$

Очевидно, что

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$
$$5a+5b=5(a+b);$$
$$ac-bc=c(a-b).$$

Искомым наименьшим кратным будет

$$5c(a+b)(a-b).$$

2. Найти наименьшее общее кратное многочленов

$$x^2-1;\quad x^2+3x+2;\quad x^2+4x+3.$$

Очевидно, что

$$x^2-1=(x+1)(x-1);$$
$$x^2+3x+2=x^2+x+2x+2=$$
$$=x(x+1)+2(x+1)=(x+1)(x+2);$$
$$x^2+4x+3=x^2+x+3x+3=(x+1)(x+3).$$

Искомым наименьшим кратным будет

$$(x+1)(x-1)(x+2)(x+3).$$

§ 3. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ДРОБЕЙ

Сложение дробей с одинаковыми знаменателями

Правило. ***Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители, оставив знаменатель без изменения.***

Примеры:

а) $\frac{a}{p}+\frac{b}{p}=\frac{a+b}{p}$; б) $\frac{a}{p}+\frac{-b}{p}=\frac{a+(-b)}{p}=\frac{a-b}{p}$;

в) $\frac{a}{x+y}+\frac{b}{x+y}=\frac{a+b}{x+y}$;

г) $\frac{2a+3b}{x+y}+\frac{a+5b}{x+y}=\frac{(2a+3b)+(a+5b)}{x+y}=\frac{3a+8b}{x+y}$;

д) $\frac{a}{p}+\frac{b}{-p}=\frac{a}{p}+\frac{-b}{p}=\frac{a-b}{p}$;

е) $\frac{5a-3b}{x+y}+\frac{4a-7b}{-(x+y)}=\frac{5a-3b}{x+y}+\frac{-4a+7b}{x+y}=$
$=\frac{(5a-3b)+(-4a+7b)}{x+y}=\frac{5a-3b-4a+7b}{x+y}=\frac{a+4b}{x+y}.$

Сложение дробей с одночленными знаменателями

Правило. ***Чтобы сложить дроби с различными одночленными знаменателями, надо:***

1. ***Составить наименьшее кратное знаменателей всех дробей и принять его за общий знаменатель.***

2. ***Найти дополнительный множитель для каждой дроби.***

3. ***Сумму произведений дополнительных множителей на соответствующие числители разделить на общий знаменатель.***

Примеры:

1) $\overset{yz}{\frac{a}{x}}+\overset{xz}{\frac{b}{y}}+\overset{xy}{\frac{c}{z}}=\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}$;

2) $\overset{x}{\frac{a}{yz}}+\overset{y}{\frac{b}{zx}}+\overset{z}{\frac{c}{xy}}=\frac{ax+by+cz}{xyz}$.

Рассмотрим еще такой пример:

$$\frac{a}{6bc^3}+\frac{b}{9a^2c}+\frac{c}{12a^2b^2}.$$

Здесь общий знаменатель

$$36a^2b^2c^3.$$

Дополнительный множитель для первой дроби $6a^2b$;
» » » второй дроби $4b^2c^2$;
» » » третьей дроби $3c^3$.

Поэтому получим:

$$\frac{a}{6bc^3}+\frac{b}{9a^2c}+\frac{c}{12a^2b^2}=\frac{6a^3b+4b^3c^2+3c^4}{36a^2b^2c^3}.$$

Сложение дробей, среди знаменателей которых встречаются многочлены

Чтобы сложить дроби, среди знаменателей которых встречаются многочлены, сначала эти многочлены следует разложить на неприводимые множители. Далее надо поступать, как и при сложении дробей с одночленными знаменателями.

Примеры:

1) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ax-ay}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(x-y)}=\frac{x-y+b}{ab(x-y)}$;

2) $\frac{p}{ax+ay}+\frac{q}{bx+by}=\frac{p}{a(x+y)}+\frac{q}{b(x+y)}=\frac{bp+aq}{ab(x+y)}$;

3) $\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}=\overset{1}{\frac{a}{(a+b)(a-b)}}+\overset{a-b}{\frac{1}{a+b}}+\overset{a+b}{\frac{1}{a-b}}=$
$=\frac{a+(a-b)+(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{3a}{a^2-b^2}$;

4) $\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b-a}=\overset{1}{\frac{a}{(a+b)(a-b)}}+\overset{a-b}{\frac{1}{a+b}}+\overset{a+b}{\frac{-1}{a-b}}=$
$=\frac{a+(a-b)+(-1)(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{a-2b}{a^2-b^2}$;

5) $a+\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{a}{1}+\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=$
$=\frac{a(a+b)(a-b)+x(a-b)+y(a+b)}{(a+b)(a-b)}$.

Найти сумму трех дробей:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)},$$

где a и b и c различные числа, отличные от нуля.

Искомую сумму найдем двумя способами.

1-й способ. Общим знаменателем всех трех дробей будет произведение

$$abc(a-b)(a-c)(b-c).$$

Множитель $(b-a)$ не следует включать в общий знаменатель, так как его абсолютная величина такая же, как и абсолютная величина множителя $(a-b)$. По такой же причине не включается и множитель $(c-b)$.

Дополнительными множителями будут:

для первой дроби $bc(b-c)$;

для второй — $ac(a-c)$, так как $\frac{a-b}{b-a}=-1$;

для третьей $ab(a-b)$, так как $\frac{a-c}{c-a}=-1$ и $\frac{b-c}{c-b}=-1$.

Поэтому

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}=$$
$$=\frac{bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Преобразуем числитель последней дроби:

$$\begin{aligned}
&bc(b-c)-ac(a-c)+ab(a-b)=\\
&=b^2c-bc^2-a^2c+ac^2+ab(a-b)=\\
&=ac^2-bc^2-a^2c+b^2c+ab(a-b)=\\
&=(ac^2-bc^2)-(a^2c-b^2c)+ab(a-b)=\\
&=c^2(a-b)-c(a+b)(a-b)+ab(a-b)=\\
&=(a-b)(c^2-ac-bc+ab)=\\
&=(a-b)[(c^2-ac)-(bc-ab)]=\\
&=(a-b)[c(c-a)-b(c-a)]=\\
&=(a-b)(c-a)(c-b).
\end{aligned}$$

Таким образом, сумма данных трех дробей будет равна

$$\frac{(a-b)(c-a)(c-b)}{abc(a-b)(a-c)(b-c)},$$

или $\frac{1}{abc}$, так как

$$\frac{a-b}{a-b}=1;\quad \frac{c-b}{b-c}=-1;\quad \frac{c-a}{a-c}=-1.$$

2-й способ. Найдем сперва сумму первых двух дробей:

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-a)(b-c)}=\frac{b(b-c)-a(a-c)}{ab(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Преобразуем числитель этой дроби:

$$b^2 - bc - a^2 + ac = (b^2 - a^2) - (bc - ac) =$$
$$= (b + a)(b - a) - c(b - a) = (b - a)(b + a - c).$$

Теперь искомая сумма трех заданных дробей будет:

$$\frac{(b-a)(b+a-c)}{ab(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} =$$
$$= \frac{b+a-c}{ab(c-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)} =$$
$$= \frac{bc + ac - c^2 - ab}{abc(c-a)(b-c)} = \frac{(bc-ab)-(c^2-ac)}{abc(c-a)(b-c)} =$$
$$= \frac{b(c-a) - c(c-a)}{abc(c-a)(b-c)} = \frac{(c-a)(b-c)}{abc(c-a)(b-c)} = \frac{1}{abc}.$$

Вычитание дробей с одинаковыми знаменателями

Правило. ***Чтобы вычесть из одной дроби другую с тем же знаменателем, надо вычесть числитель второй дроби из числителя первой и подписать общий знаменатель.***

Например:

а) $\dfrac{a}{p} - \dfrac{b}{p} = \dfrac{a-b}{p}$;

б) $\dfrac{a+b}{p} - \dfrac{a-b}{p} = \dfrac{(a+b)-(a-b)}{p} = \dfrac{2b}{p}$;

в) $\dfrac{2a-b}{x+y} - \dfrac{-5a+3b}{x+y} = \dfrac{(2a-b)-(-5a+3b)}{x+y} = \dfrac{7a-4b}{x+y}$.

Вычитание дробей в более сложных случаях выполняется аналогично тому, как и сложение.

Пример:

$$\frac{a}{b+x} - \frac{bx}{b^2+x^2} + \frac{x^2}{b^2-x^2} - \frac{2bx^3}{b^4-x^4} =$$

$$\underline{(b-x)(b^2+x^2)} \qquad \underline{b^2-x^2} \qquad \underline{b^2+x^2}$$

$$= \frac{a}{b+x} - \frac{bx}{b^2+x^2} + \frac{x^2}{(b+x)(b-x)} - \frac{2bx^3}{(b^2+x^2)(b+x)(b-x)} =$$
$$= \frac{a(b^2+x^2)(b-x) - bx(b^2-x^2) + x^2(b^2+x^2) - 2bx^3}{(b+x)(b^2+x^2)(b-x)}.$$

Преобразуем числитель полученной дроби:

$$ab^3 - ab^2x + abx^2 - ax^3 - b^3x + bx^3 + b^2x^2 + x^4 - 2bx^3 =$$
$$= x^4 - ax^3 - bx^3 + abx^2 + b^2x^2 - ab^2x - b^3x + ab^3 =$$
$$= x^3(x-a) - bx^2(x-a) + b^2x(x-a) - b^3(x-a) =$$
$$= (x-a)(x^3 - bx^2 + b^2x - b^3) = (x-a)[x^2(x-b) +$$
$$+ b^2(x-b)] = (x-a)(x-b)(x^2+b^2).$$

Таким образом, алгебраическая сумма данных четырех дробей будет равна дроби

$$\frac{(x-a)(x-b)(x^2+b^2)}{(x+b)(b-x)(b^2+x^2)},$$

которая после сокращения примет вид

$$\frac{a-x}{b+x}.$$

§ 4. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ ДРОБЕЙ

Умножение

Чтобы перемножить дроби, надо произведение их числителей разделить на произведение знаменателей.

Например:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{p}{q}=\frac{ap}{bq};$$

$$-\frac{8ab}{3x^2y}\cdot\frac{5xy^2}{12a^2b^2}=-\frac{40abxy^2}{36a^2b^2x^2y}=-\frac{10y}{9abx};$$

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a}{1}\cdot\frac{b}{c}=\frac{ab}{c}.$$

Если среди числителей и знаменателей дробей имеются многочлены, то эти многочлены целесообразно разложить на множители и лишь после этого совершать операцию умножения дробей.

Например:

$$\frac{x^2+7x+12}{x^3-x^2+x-1}\cdot\frac{x^4-1}{2x^2+6x}=\frac{(x+3)(x+4)}{(x-1)(x^2+1)}\cdot\frac{(x^2+1)(x+1)(x-1)}{2x(x+3)}=$$

$$=\frac{(x+3)(x+4)(x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)2x(x+3)}=\frac{(x+1)(x+4)}{2x}.$$

Само собой разумеется, что при умножении дроби $\frac{x^2-y^2}{x}$ на дробь $\frac{y}{x^2-y^2}$ разлагать многочлены не требуется, так как они сокращаются непосредственно.

Взаимно обратные выражения

Определение. ***Два алгебраических выражения называются взаимно обратными, если их произведение равно единице.*** Например, выражения a и $\frac{1}{a}$ взаимно обратны. Также взаимно обратны выражения $2ax$ и $\frac{1}{2ax}$.

Если данное выражение $\frac{1}{a+b}$, то ему обратным будет $(a+b)$.

Если данное выражение $\frac{a+b}{x+y}$, то ему обратным будет $\frac{x+y}{a+b}$.

Если данное выражение $-a$, то обратным будет $-\frac{1}{a}$.

Если данное число 1, то ему обратным будет тоже 1.

Нуль обратного себе числа не имеет.

Деление

Чтобы разделить одну дробь на другую или одно выражение на другое, достаточно первую дробь или первое выражение умножить на величину, обратную второй дроби или второму выражению.

Таким образом, деление дробей или алгебраических выражений сводится к умножению.

1) $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$;

2) $a:\frac{x}{y}=a\cdot\frac{y}{x}=\frac{ay}{x}$;

3) $-\frac{24a^2b^2}{5xy}:\frac{12a^2b^2}{5x^2y^2}=-\frac{24a^2b^2\cdot 5x^2y^2}{5xy\cdot 12a^2b^2}=-2xy$;

4) $\frac{x^2-4y^2}{x^2-xy}:\frac{x^2+2xy}{x-y}=\frac{(x+2y)(x-2y)}{x(x-y)}:\frac{x(x+2y)}{x-y}=\frac{x-2y}{x^2}$.

§ 5. УПРОЩЕНИЕ ДРОБИ, ЧИСЛИТЕЛЬ И ЗНАМЕНАТЕЛЬ КОТОРОЙ ЯВЛЯЮТСЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СУММАМИ ДРОБЕЙ

Пример. Чтобы упростить лучшим способом дробь

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}},$$

умножим ее числитель и знаменатель на xy. В результате получим $\frac{y+x}{y-x}$. Выражение xy есть наименьшее кратное знаменателей всех дробей, находящихся в числителе и знаменателе.

Чтобы упростить дробь

$$\frac{\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a-1}}{\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}},$$

умножим ее числитель и знаменатель на выражение

$$(a+1)(a-1).$$

В результате получим:

$$\frac{(a-1)+(a+1)}{(a-1)-(a+1)},$$

т. е. $\frac{2a}{-2}$, или $-a$. Очевидно, что

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{4}}{\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{6}}=\frac{6(a+b)+3(a-b)}{6(a+b)-2(a-b)}=\frac{9a+3b}{4a+8b}.$$

§ 6. ОБЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

Сколь бы сложным ни было данное выражение, если оно рационально, т. е. содержит лишь действия сложения, вычитания, умножения и деления, то его всегда можно преобразовать так, что в результате получится либо целое выражение, либо несократимая дробь, числитель и знаменатель которой суть целые выражения. Например, выражение

$$\frac{\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^3-y^3}\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}}{\frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}}\cdot\frac{3}{x+y}$$

тождественно равно выражению $\frac{9}{x-y}$.

Выражение

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

тождественно равно выражению x^2.

Выражение

$$\frac{1}{(x-a)(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{1}{(x-b)(b-a)(b-c)(b-d)}+$$
$$+\frac{1}{(x-c)(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{1}{(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)}$$

тождественно равно выражению

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

Во втором примере в результате преобразования получилось целое выражение x^2, а в двух остальных — несократимые дроби

$$\frac{9}{x-y} \text{ и } \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

В качестве примера на применение общих преобразований рациональных выражений покажем, что из равенства

$$\frac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\frac{b^2-ac}{b(1-ac)},$$

вытекает равенство

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

если a, b, c не равны между собой и отличны от нуля.

Решение. Из данного равенства следует:

$$b(a^2-bc)(1-ac)=a(b^2-ac)(1-bc),$$

или после раскрытия скобок и переноса всех членов в левую часть

$$a^2b-ab^2+a^2c-b^2c-a^3bc+ab^3c+ab^2c^2-a^2bc^2=0,$$

или последовательно

$$ab(a-b)+c(a+b)(a-b)-abc(a+b)(a-b)-abc^2(a-b)=0,$$

$$ab+c(a+b)-abc(a+b)-abc^2=0^*,$$

$$ab+ac+bc-abc(a+b+c)=0,$$

$$abc(a+b+c)=ab+ac+bc,$$

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

что и требовалось доказать.

§ 7. О СИМВОЛАХ a^0 и a^{-n}

О символе a^0

Символ a^0 по своей форме напоминает степень. Однако истолковать его как степень в первоначальном понимании этого слова, т. е. как произведение, составленное из одинаковых множителей, невозможно. Бессмысленно сказать, что число a умножается само на себя нуль раз. С этой точки зрения выражение a^0 не имеет смысла. Но если мы хотим расширить правило деления степеней и на тот случай, когда их показатели одинаковые, то нам достаточно принять по условию символ a^0, где $a\neq 0$, равным единице.

Итак, примем по определению, что $a^0=1$, если только $a\neq 0$. Тогда $5^0=1$; $\left(7\frac{1}{2}\right)^0=1$; $1^0=1$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$; $(-3)^0=1$ и т. д. Выражение же 0^0 остается лишенным смысла.

Теперь мы можем писать

$$a^5:a^5=a^0,$$

где $a\neq 0$. И эта запись будет вполне оправдана. В самом деле, левая часть есть единица, так как делимое и делитель равны между собой и отличны от нуля. Правая часть согласно принятому определению также есть единица.

---

*) Мы могли разделить обе части предыдущего равенства на $a-b$, так как $a\neq b$.

О символе a^{-n}

Символ a^{-n} также имеет форму степени. Однако истолковать его как степень в первоначальном понимании этого слова невозможно. Бессмысленно говорить, что число a умножается само на себя отрицательное число раз. Но если мы хотим расширить правило деления степеней и на тот случай, когда показатель степени делимого меньше показателя степени делителя, достаточно принять a^{-n}, где $a \neq 0$, равным $\frac{1}{a^n}$.

Итак, примем по определению, что $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где $a \neq 0$.

Тогда

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = 8;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; \quad (a+b)^{-2} = \frac{1}{(a+b)^2}.$$

Теперь мы можем писать

$$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2},$$

где $a \neq 0$.

И эта запись будет вполне оправданной. В самом деле, левая часть есть $\frac{a^3}{a^5}$, т. е. $\frac{1}{a^2}$; правая же, по принятому нами определению, также есть $\frac{1}{a^2}$.

Действия над символами a^0 и a^{-n}

Хотя символы a^0 и a^{-n} не являются степенями в первоначальном смысле этого слова, однако оказывается, что над ними можно производить действия по тем же самым правилам, которые были установлены для степеней с натуральными * показателями.

В самом деле, докажем, например, что равенство

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}$$

является верным.

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n} = a^{(-m)+(-n)},$$

что и требовалось доказать.

Также легко убедиться в справедливости и такого равенства

$$(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)(-n)} = a^{mn}.$$

---

* Натуральными числами называются все целые положительные числа.

Действительно,

$$(a^{-m})^{-n}=\frac{1}{(a^{-m})^n}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a^m}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{a^{mn}}}=a^{mn}.$$

Все это позволяет нам символы a^0 и a^{-n} называть степенями. ***Символ a^0 называется степенью с нулевым показателем, символ a^{-n} — степенью с отрицательным показателем.***

Теперь мы можем равенство

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

где $a \neq 0$, считать справедливым при любых целых значениях букв m и n.

Примеры:

Очевидно, что

$$5a^2b^{-2}=\frac{5a^2}{b^2};\quad (2a+3b)^{-1}=\frac{1}{2a+3b};$$

$$\frac{5a^7}{b^3c^4}=5a^7b^{-3}c^{-4};\quad \frac{x+y}{x-y}=(x+y)(x-y)^{-1};$$

$$\frac{23}{1000000}=23\cdot 10^{-6};\quad 0{,}17=17\cdot 10^{-2};\quad 0{,}00000017=17\cdot 10^{-8};$$

$$a^{m+2}:a^{m+4}=a^{(m+2)-(m+4)}=a^{-2}=\frac{1}{a^2};$$

$$a^{-5}:a^{-3}=a^{(-5)-(-3)}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

97. Сократить дроби:

1) $\frac{144a^2b^5c^2}{256a^3b^4d^2}$;
2) $\frac{a^nb}{a^{n+1}}$;
3) $\frac{(a-b)x}{(b-a)y}$;
4) $\frac{2p+2q}{p^2-q^2}$;
5) $\frac{x-2}{x^3-8}$;
6) $\frac{ab+ac+b^2+bc}{ax+ay+bx+by}$;
7) $\frac{x^2+6x+9}{x^3+27}$.

98. Найти наименьшее общее кратное выражений:

1) $96ab$; $64ac$; $360bc$;
2) xy; x^2+xy;
3) x^3-x; x^3-x^2+x-1;
4) $(a-b)(b-c)$; $(b-c)(c-a)$; $(a-b)(a-c)$.

99. Произвести сложение и вычитание дробей:

1) $\frac{4a-2b}{5m}+\frac{a-3b}{5m}$;

2) $\frac{4a+2b}{c}-\frac{a-3b}{c}$;

3) $\frac{1}{pq}+\frac{1}{pr}-\frac{1}{rq}$;

4) $\frac{a^2}{a-b}+\frac{3a}{a+b}-\frac{2ab}{a^2-b^2}$;

5) $\frac{m}{2m-2n}+\frac{n}{2n+2m}$;

6) $\frac{x+y}{(z-x)(z-y)}+\frac{y+z}{(x-y)(x-z)}+$
$+\frac{x+z}{(y-x)(y-z)}$.

100. Произвести умножение и деление дробей:

1) $\frac{15ab}{14x}\cdot\frac{28x^2}{25b^2}$. Отв. $\frac{6ax}{b}$.

2) $\frac{2p^3}{p^3+q^3}\cdot\frac{p+q}{p}$. Отв. $\frac{2p^2}{p^2-pq+q^2}$.

3) $\frac{x-y}{a}:\frac{y-x}{b}$. Отв. $-\frac{b}{a}$. 4) $\frac{m-1}{10m}:\frac{2m-2}{5}$. Отв. $\frac{1}{4m}$.

101. Упростить выражения:

1) $\dfrac{\frac{a}{3}-\frac{b}{4}}{\frac{a}{2}-\frac{b}{6}}$. 2) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}}$. Отв. $\frac{y+x}{y-x}$.

3) $\dfrac{2-\frac{a-b}{a+b}}{3-\frac{a+2b}{a+b}}$.

4) $\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$. Отв. $-\frac{a^4}{a^2+b^2}$.

5) $\left[\frac{4(a+b)^2}{ab}-16\right]\cdot\frac{(a+b)^2-ab}{ab}:\frac{a^3-b^3}{11ab}$. Отв. $\frac{44(a-b)}{ab}$.

6) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\cdot\dfrac{5\frac{1}{3}abc}{(a+b+c)^2}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$. Отв. $\frac{8a}{3}$.

7) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}}-\dfrac{x+2}{3x^2+7x+2}$. Отв. $\frac{2x}{3x+1}$.

(В примере 7 надо своевременно разложить на множители многочлен

$$3x^2+7x+2.)$$

8) $\frac{x^2-2x+1}{x^4-x^3+x^2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{x}}\right):\frac{1-x^2}{1+x+x^3+x^4}$. Отв. $\frac{x+1}{x^2}$.

102. Упростить выражение:

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}.\qquad \text{Отв. } 1.$$

103. Найти значение выражения:

$$\frac{5^{-5}\cdot(0{,}1)^{-4}+\left(-\frac{1}{7}\right)^{0}-5^{-1}}{(-2)^{-3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}.\qquad \text{Отв. } -1.$$

104. Упростить выражение:

$$\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}}\cdot\left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1}.\qquad \text{Отв. } \frac{1}{a+b}.$$

105. Упростить выражение:

$$\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}-\frac{b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}\right)\cdot(a^{-1}-b^{-1})(a^{-2}+b^{-2})^{-1}.\qquad \text{Отв. } \frac{ab}{a+b}.$$

106. Доказать тождество:

$$\frac{1}{a(a+d)}+\frac{1}{(a+d)(a+2d)}+\ldots+\frac{1}{[a+(n-1)d](a+nd)}=$$
$$=\frac{n}{a(a+nd)}.$$

107. Доказать предложение (теорему):
Если

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1;\qquad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$

то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

108. Доказать предложение:
Если

$$a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a \text{ и } \frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0,$$

то тогда и

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

ГЛАВА VI

ПРОПОРЦИИ. РЯД РАВНЫХ ОТНОШЕНИЙ

§ 1. ПРОПОРЦИИ

Определение пропорции

Связь между четырьмя алгебраическими выражениями A, B, C** и **D, имеющая вид

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D},$$

называется пропорцией.

(Равенство $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ теряет смысл и перестает быть пропорцией как при $B=0$, так и при $D=0$. Оно теряет смысл и перестает быть пропорцией и тогда, когда B и D равны нулю одновременно.)

Примеры пропорций:

$$\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b}; \qquad \frac{xy}{x+y}=\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}; \qquad \frac{-6}{9}=\frac{8}{-12}; \qquad 3:5=\frac{1}{5}:\frac{1}{3}.$$

В пропорции $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ величины A и D называются крайними, а B и C средними членами. Далее выражение $\frac{A}{B}$ называется первым отношением, а $\frac{C}{D}$ вторым; A и C называются предыдущими членами этих отношений, а B и D — последующими.

Главное свойство пропорции

Умножив левую и правую части пропорции

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

на произведение bd, получим $ad=bc$, т. е. ***во всякой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.***

Составление пропорции по данному равенству двух произведений

Пусть $pq = xy$. Разделив левую и правую части этого равенства на qx*, получим

$$\frac{p}{x} = \frac{y}{q}.$$

Этот результат можно сформулировать следующим образом.

Если произведение двух чисел равно произведению двух других, то из этих четырех чисел можно составить пропорцию, беря множители одного произведения за крайние, а множители другого произведения за средние члены пропорции. (При этом дополнительно требуется, чтобы оба последующих члена пропорции не оказались равными нулю.)

Перестановка членов пропорции

Пусть $ad = bc$ и числа a, b, c, d — все отличны от нуля.

Разделив левую и правую части равенства $ad = bc$ первый раз на bd, второй на ab, третий на ac и четвертый на cd, получим соответственно четыре пропорции:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Поменяв местами отношения в этих равенствах, получим еще четыре пропорции:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}; \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}; \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}; \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}.$$

Этот результат показывает, что ***в пропорции можно менять местами средние и крайние члены и ставить оба крайних члена на места средних, а оба средних на места крайних.***

§ 2. ПРОИЗВОДНЫЕ ПРОПОРЦИИ

1. Прибавив к левой и правой частям пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ по единице, получим

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$

или

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

* Предполагается, что $qx \neq 0$.

т. е. ***во всякой пропорции сумма членов первого отношения так относится к своему последующему, как сумма членов второго отношения — к своему последующему.***

2. Вычтя из левой и правой частей пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ по единице, получим:

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1,$$

или

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d},$$

т. е. ***во всякой пропорции разность членов первого отношения так относится к своему последующему, как разность членов второго отношения — к своему последующему.***

3. Разделив левую часть равенства $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ на левую часть равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и правую на правую, получим:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c},$$

т. е. ***во всякой пропорции сумма членов первого отношения так относится к своему предыдущему, как сумма членов второго отношения — к своему предыдущему.***

4. Разделив левую часть равенства $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ на левую часть равенства $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ и правую на правую, получим:

$$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c},$$

т. е. ***во всякой пропорции разность членов первого отношения так относится к своему предыдущему, как разность членов второго отношения — к своему предыдущему.***

5. Разделив левую часть равенства $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ на левую часть равенства $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ и правую на правую, получим:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d},$$

т. е. ***во всякой пропорции сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения — к их разности.***

Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ мы вывели пять производных пропорций. Однако надо иметь в виду, что из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ можно было бы получить сколько угодно и др. производных пропорций.

Например, умножив обе части пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ на число α, получим $\frac{\alpha a}{b}=\frac{\alpha c}{d}$. Прибавив к левой и правой частям последнего равенства число β, будем иметь, что

$$\frac{\alpha a}{b}+\beta=\frac{\alpha c}{d}+\beta,$$

или

$$\frac{\alpha a+\beta b}{b}=\frac{\alpha c+\beta d}{d},$$

т. е. получим новую производную пропорцию.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО ЧЛЕНА ПРОПОРЦИИ

Пусть в пропорции $\frac{a}{x}=\frac{c}{d}$ числа a, c, d известны, а x изображает число неизвестное. Тогда по свойству пропорции $cx=ad$; откуда $x=\frac{ad}{c}$, т. е. ***неизвестный средний член пропорции равен произведению крайних членов, деленному на известный средний.*** Аналогично определяется и неизвестный крайний член.

Примеры:

1. Найти неизвестное число x из пропорции $\frac{x-a}{a}=\frac{b}{c}$, где a, b и c числа известные.

Составим производную пропорцию по правилу: сумма членов первого отношения так относится к своему последующему члену, как сумма членов второго отношения к своему последующему:

$$\frac{x-a+a}{a}=\frac{b+c}{c},$$

т. е.

$$\frac{x}{a}=\frac{b+c}{c},$$

откуда

$$x=\frac{a(b+c)}{c}.$$

2. Найти неизвестное x из пропорции $\frac{x+a}{x-a}=\frac{p}{q}$. Составим производную пропорцию по правилу: сумма членов первого отно-

шения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения к их разности, т. е.

$$\frac{(x+a)+(x-a)}{(x+a)-(x-a)}=\frac{p+q}{p-q},$$

или

$$\frac{x}{a}=\frac{p+q}{p-q},$$

отсюда

$$x=\frac{a(p+q)}{p-q}.$$

§ 4. РЯД РАВНЫХ ОТНОШЕНИЙ

Предварительное замечание

Иногда бывает удобно вместо различных букв употреблять для обозначения чисел одну и ту же букву, снабженную дополнительными значками — индексами. Например x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n. Эти обозначения читаются так: икс нулевое, икс первое, икс второе, икс третье, ..., икс энное.

Основное свойство ряда равных отношений

Пусть имеется ряд равных отношений:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Обозначим общее значение всех этих отношений буквой k. Тогда

$$\frac{a_1}{b_1}=k,\quad \frac{a_2}{b_2}=k,\quad \frac{a_3}{b_3}=k,\ \ldots,\ \frac{a_n}{b_n}=k.$$

Отсюда

$$a_1=kb_1;\quad a_2=kb_2;\quad a_3=kb_3;\ \ldots;\quad a_n=kb_n.$$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=kb_1+kb_2+kb_3+\ldots+kb_n,$$

или

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=k(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n),$$

или

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=k;$$

т. е.

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Итак, доказано следующее:

Если несколько отношений равны друг другу, то отношение суммы их предыдущих членов к сумме последующих равно каждому из этих отношений.

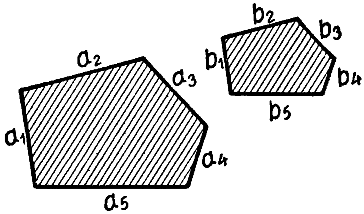


Рис. 31.

Пример. Пусть длины a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 сторон одного многоугольника (рис. 31) пропорциональны длинам b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 сторон другого многоугольника, т. е.

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=\frac{a_5}{b_5}.$$

По свойству ряда равных отношений получим:

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}=\frac{a_1}{b_1},$$

или

$$\frac{P}{Q}=\frac{a_1}{b_1},$$

где P и Q периметры многоугольников.

УПРАЖНЕНИЯ

109. В каждой пропорции найти неизвестное, обозначенное буквой x:

1) $\frac{a}{b}=\frac{3x}{c}$; 2) $\frac{a}{b}=\frac{c}{0{,}1x}$; 3) $\frac{a^3+b^3}{a-b}=\frac{a^2-ab+b^2}{x}$.

Отв. $\frac{a-b}{a+b}$.

110. Пользуясь производными пропорциями, найти x из пропорций:

1) $\frac{x}{a-x}=\frac{b}{c}$. Отв. $\frac{ab}{b+c}$. 2) $\frac{a+x}{x}=\frac{b}{c}$. Отв. $\frac{ac}{b-c}$.

3) $\frac{x+1}{x-1}=\frac{a}{b}$. Отв. $\frac{a+b}{a-b}$.

ГЛАВА VII

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

§ 1. ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Сначала рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть буква x обозначает в годах возраст сына, а буква y — возраст отца и пусть в данный момент сыну один год, а отцу 25 лет.

Составим таблицу значений x и соответствующих им значений буквы y. В третьей строке этой таблицы выпишем значения отношения $\frac{y}{x}$:

x	1	2	3	4	5	6	...	50	...
y	25	26	27	28	29	30		74	...
$\frac{y}{x}$	25	13	9	7	5,8	5	...	1,48	...

В этом примере отношение $\frac{y}{x}$ (отношение возраста отца к возрасту сына) не остается неизменным. Оно с течением времени убывает.

Пример 2. Пусть буква x обозначает в сантиметрах длину стороны квадрата, а буква y — площадь в квадратных сантиметрах.

Составим таблицу, подобную предыдущей:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...	10	...
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	9	16	...	100	...
$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...	10	...

Отношение $\frac{y}{x}$ и здесь не остается неизменным. Оно возрастает при возрастании x.

Пример 3. Пусть буква x обозначает в кубических сантиметрах объем ртути при температуре 0°, а буква y — вес этой ртути в граммах. Известно, что 1 *куб. см* ртути при температуре 0° весит 13,6 *г*.

Опять составим таблицу значений x, y и $\frac{y}{x}$:

x	1	2	3	....	10	....
y	13,6	27,2	40,8	....	136	....
$\frac{y}{x}$	13,6	13,6	13,6	....	13,6	....

Этот третий пример существенно отличается от двух предыдущих. Здесь отношение $\frac{y}{x}$ сохраняет неизменное значение.

Определение. ***Две величины y и x называются прямо пропорциональными (или просто пропорциональными), если при всех их возможных изменениях отношение $\frac{y}{x}$ остается равным одному и тому же числу и если при $x=0$ значение y также равно нулю.***

Значит, вес ртути и объем ртути при постоянной температуре являются величинами пропорциональными.

Возраст отца и возраст сына не пропорциональны.

Также не пропорциональны сторона квадрата и его площадь.

Пусть изменяющиеся величины y и x пропорциональны. Тогда отношение $\frac{y}{x}$ будет равно некоторому постоянному числу. Обозначая это постоянное число буквой k, получим:

$$\frac{y}{x}=k,$$

или

$$y=kx.$$

Следовательно, если величины y и x пропорциональны и отношение $\frac{y}{x}$ равно k, то y выражается в зависимости от x формулой

$$y=kx.$$

Число k называется коэффициентом пропорциональности (величины y по отношению к величине x).

Теперь докажем обратное положение. Пусть

$$y=kx,$$

где k — постоянное число.

Отсюда следует, что при $x=0$ и $y=0$ и что $\frac{y}{x}=k$. А это и означает, что величины y и x пропорциональны.

Из того, что $\frac{y}{x}=k$, следует, что $\frac{x}{y}=\frac{1}{k}$, или что

$$x=\frac{1}{k}y.$$

Отсюда можно сделать следующий вывод:

Если коэффициентом пропорциональности величины y по отношению к величине x служит постоянное число k, то коэффициентом пропорциональности величины x по отношению к величине y будет служить число $\frac{1}{k}$.

Приведем еще один пример пропорциональных величин.

Путь s, пройденный при равномерном движении, пропорционален времени t, т. е.

$$s=vt.$$

Здесь постоянное число v есть коэффициент пропорциональности величины s по отношению к величине t (v есть скорость равномерного движения).

Сделаем еще два замечания.

Замечание 1. Если имеется два ряда чисел:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$$

и

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_{n-1},\ b_n$$

и если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=\frac{a_n}{b_n},$$

то числа одного из этих рядов называются пропорциональными числам другого ряда.

Замечание 2. Если имеются только два постоянных числа a и b, то бессмысленно говорить о них, что они пропорциональны или непропорциональны.

В этом случае можно интересоваться либо характером этих чисел, либо их разностью, либо их отношением и т. д.

В заключение решим две простые задачи на пропорциональные величины.

Задача 1. На карте в масштабе $\frac{1}{750000}$ расстояние между двумя пунктами равно 42,5 *см*. Определить, чему равно это расстояние на карте в масштабе $\frac{1}{1250000}$.

Решение. Длина на карте прямо пропорциональна масштабу. Поэтому

$$42{,}5 : x = \frac{1}{750000} : \frac{1}{1250000}, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{42{,}5 \cdot 750000}{1250000} = 25{,}5 \textit{ см}.$$

Задача 2. С помощью непосредственного измерения установили, что при повышении температуры рельса на 24° С его длина увеличивается на 1,5 *мм*. Требуется вычислениями определить изменение длины рельса при понижении его температуры на 40° С. (Считать изменение длины рельса величиной, прямо пропорциональной изменению температуры.)

Решение. Обозначив искомое изменение (в *мм*) буквой x, получим:

$$1{,}5 : x = 24 : (-40),$$

откуда

$$x = \frac{1{,}5 \cdot (-40)}{24} = -2{,}5,$$

т. е. при понижении температуры рельса на 40° С его длина сократится на 2,5 *мм*.

§ 2. ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Сначала приведем примеры.

1. Рассмотрим изменяющийся прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием, имеющий неизменный объем, равный 3600 *куб. см* (рис. 32).

Пусть буква x обозначает в сантиметрах изменяющуюся сторону основания, а буква y — изменяющуюся высоту параллелепипеда.

Рассматривая таблицу:

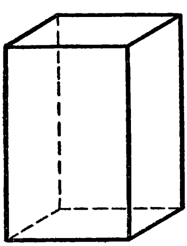


Рис. 32.

v	3600	3600	3600	3600	...
x	6	8	10	1	...
y	100	56,25	36	3600	...
xy	600	450	360	3600	...

легко видеть, что произведение xy не остается неизменным при постоянстве объема.

2. Рассмотрим изменяющийся прямоугольник, имеющий неизменную площадь, равную 100 *кв. см*.

Пусть буква x обозначает одно изменяющееся измерение (например, длину прямоугольника), а буква y — другое изменяющееся измерение (ширину). Пусть x и y выражены в сантиметрах.

Так как произведение измерений прямоугольника равно его площади, то величины x и y при всех своих возможных изменениях будут давать в своем произведении число 100, т. е. произведение изменяющихся величин x и y будет оставаться неизменным.

Существенное отличие второго примера от первого заключается в том, что в нем произведение xy остается неизменным, в то время как в первом оно изменяется.

Определение. ***Две величины x и y называются обратно пропорциональными, если при всех их возможных изменениях произведение xy остается равным одному и тому же числу, отличную от нуля.***

Обозначая это число буквой k, получим:

$$xy = k,$$

или

$$y = \frac{k}{x}.$$

Следовательно, если величины x и y обратно пропорциональны, то величина y выражается через величину x по формуле следующего вида:

$$y = \frac{k}{x}.$$

Число k называется коэффициентом обратной пропорциональности.

Длина прямоугольника и ширина прямоугольника при заранее заданной площади прямоугольника являются величинами обратно пропорциональными. Коэффициентом обратной пропорциональности служит как раз эта площадь.

Сторона основания прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и высота параллелепипеда при заранее заданном объеме не являются величинами обратно пропорциональными.

Задача. Зал освещается m лампами по a свечей каждая. Сколькими лампами в b свечей можно получить ту же освещенность зала?

Число ламп и число свечей каждой лампы при данной освещенности зала являются величинами обратно пропорциональными. Поэтому, обозначая число ламп в b свечей буквой x, получим:

$$bx = am,$$

откуда

$$x = \frac{am}{b}.$$

§ 3. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

Задача 1. Число A разделить на n слагаемых прямо пропорционально числам $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Обозначим искомые слагаемые буквами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Тогда по условию задачи

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Пользуясь свойством ряда равных отношений, получим:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n} = \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} = \ldots = \frac{x_n}{a_n}.$$

Но

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = A.$$

Поэтому

$$x_1 = \frac{Aa_1}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

$$x_2 = \frac{Aa_2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{Aa_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Задача 2. Число A разделить на n слагаемых обратно пропорционально числам $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Обозначим искомые слагаемые буквами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Тогда согласно условию задачи

$$a_1x_1 = a_2x_2 = a_3x_3 = \ldots = a_nx_n,$$

или

$$\frac{x_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{a_2}} = \frac{x_3}{\frac{1}{a_3}} = \ldots = \frac{x_n}{\frac{1}{a_n}}.$$

По свойству ряда равных отношений получим:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \frac{x_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{x_2}{\frac{1}{a_2}} = \ldots = \frac{x_n}{\frac{1}{a_n}}.$$

Но

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = A.$$

Поэтому

$$a_i=\frac{A\cdot\frac{1}{a_i}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Примеры на применение пропорционального деления

1. Имеются два подобных пятиугольника. Стороны одного из них равны 1, 2, 3, 4, 5. Найти стороны другого, если их сумма равна 105.

Обозначим искомые стороны буквами x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Тогда

$$\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{2}=\frac{x_3}{3}=\frac{x_4}{4}=\frac{x_5}{5}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{1+2+3+4+5}=\frac{105}{15}.$$

Следовательно, искомые стороны равны 7, 14, 21, 28, 35.

2. Высоты треугольника относятся как $3:4:6$. Найти стороны этого треугольника, если их сумма равна 180. Обозначим стороны треугольника буквами a, b, c. Известно, что стороны треугольника обратно пропорциональны высотам. Поэтому

$$\frac{a}{\frac{1}{3}}=\frac{b}{\frac{1}{4}}=\frac{c}{\frac{1}{6}}=\frac{a+b+c}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=\frac{180}{\frac{9}{12}}.$$

Отсюда

$$a=80,\ b=60,\ c=40.$$

УПРАЖНЕНИЯ

111. Разделить число A на части, пропорциональные числам 2; 3; 5.

Отв. 0,2А; 0,3А; 0,5А.

112. Разделить число 1457 на части, обратно пропорциональные 2; 3; 5.

Отв. 705; 470; 282.

§ 4. ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ КВАДРАТУ ИЛИ КУБУ

Понятие о величине, прямо пропорциональной квадрату или кубу другой величины. Если $y=kx^2$, то говорят, что переменная величина y прямо пропорциональна квадрату переменной величины x. Постоянная k называется к о э ф ф и ц и е н т о м п р о п о р ц и о н а л ь н о с т и. Если $y=kx^3$, то говорят, что переменная величина y прямо пропорциональна кубу переменной величины x.

Постоянная k опять же называется **коэффициентом пропорциональности**.

Задача. Мощность двигателя на судне пропорциональна кубу скорости. Если для движения судна со скоростью 8 узлов * требуется мощность 4800 *л. с.*, то какова должна быть мощность для движения этого судна со скоростью 12 узлов?

Решение. Пусть мощность двигателя y лошадиных сил, а скорость x узлов. Тогда $y=kx^3$, где k — неизвестный коэффициент пропорциональности.

По условию задачи $y=4800$, когда $x=8$. Следовательно, $4800=k\cdot 8^3$. Отсюда $k=\frac{75}{8}$. Теперь, зная, что $k=\frac{75}{8}$, и взяв $x=12$, получим: $y=\frac{75}{8}\cdot 12^3=16\,200$.

Итак, искомая мощность должна быть равной 16200 *л. с.*

Понятие о величине, обратно пропорциональной квадрату или кубу другой величины. Если $y=\frac{k}{x^2}$, то говорят, что переменная величина y обратно пропорциональна квадрату переменной величины x. Если $y=\frac{k}{x^3}$, то говорят, что переменная величина y обратно пропорциональна кубу переменной величины x. И в том и в другом случае k называется **коэффициентом обратной пропорциональности**.

Задача. Сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Два тела, находящиеся на расстоянии 1000 *м* друг от друга, притягиваются с силой в 10 *кГ*. С какой силой притягивались бы друг к другу эти тела, находясь на расстоянии 10 000 *м*?

Решение. Пусть сила притяжения равна F *кГ*, а расстояние d *м*. Тогда $F=\frac{k}{d^2}$, где k — неизвестный коэффициент обратной пропорциональности. По условию задачи $F=10$, когда $d=1000$. Следовательно, $10=\frac{k}{1000^2}$. Отсюда $k=10\,000\,000$. Теперь, зная, что $k=10\,000\,000$, и взяв $d=10\,000$, получим: $F=\frac{10\,000\,000}{10\,000^2}=\frac{1}{10}$. Итак, искомая сила притяжения будет равна 0,1 *кГ*.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить следующие задачи:

113. Мощность двигателя на судне пропорциональна кубу скорости. Если для движения судна со скоростью 8 узлов требуется

---

* Узел — мера скорости движения судов, соответствующая скорости в одну морскую милю в час $\left(1{,}825\ \frac{км}{ч}\right)$.

мощность 4800 *л.с.*, то какова должна быть мощность для движения этого судна со скоростью 16 узлов?

114. Сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Два тела, находящиеся на расстоянии 1000 *м* друг от друга, притягиваются с силой в 10 *кГ*. С какой силой притягивались бы друг к другу эти же два тела, находясь на расстоянии 100 000 *м*?

115. Расстояние, на котором можно полностью затормозить автомобиль, прямо пропорционально квадрату его скорости. Если автомобиль, движущийся со скоростью 80 *км* в час, можно затормозить на пути 20 *м*, то какое тормозное расстояние получится для этого же автомобиля, движущегося со скоростью 120 *км* в час?

116. Сила F, с которой притягивается тело земным шаром, обратно пропорциональна квадрату расстояния d этого тела от центра земного шара. Некоторое тело весит на поверхности земли 4900 *кГ*. С какой силой будет притягиваться землей это тело, если его удалить от поверхности земли на расстояние 441 600 *км*? Радиус земного шара взять равным 6400 *км*.

117. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Луны в 3,7 раза меньше радиуса Земли. Сколько весил бы на Луне человек, который на Земле весит 72 *кг*?

Указание. Два тела притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами тяжести, т.е.

$$F = k \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2},$$

где F — сила притяжения;

m и m_1 — массы тел;

r — расстояние между их центрами тяжести;

k — коэффициент пропорциональности.

118. Электрическое сопротивление R проволоки изменяется прямо пропорционально ее длине l и обратно пропорционально квадрату ее диаметра d, т. е.

$$R = k \cdot \frac{l}{d^2},$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Если кусок определенной проволоки длиной 35 *м* и диаметром 0,25 *мм* имеет сопротивление 6 *ом*, то каким сопротивлением обладает такая проволока длиной 100 *м* и диаметром 0,20 *мм*?

ГЛАВА VIII

НАЧАЛА ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ

§ 1. УРАВНЕНИЕ КАК МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ

Покажем, как возникают уравнения в процессе решения практических задач.

Задача. Имеется прямоугольный железный лист (рис. 33). Длина листа 80 *см*, а ширина 70 *см*. По углам этого листа надо вырезать одинаковые квадраты и образовавшиеся края загнуть так, чтобы получилась открытая сверху коробка (рис. 34).

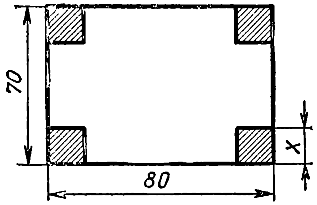


Рис. 33.

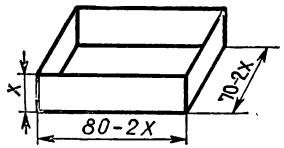


Рис. 34.

Спрашивается, какова должна быть сторона каждого вырезанного квадрата, чтобы объем коробки оказался равным 30 000 *куб. см*?

Решение. Обозначим длину стороны каждого вырезанного квадрата, выраженную в сантиметрах, буквой x. Тогда длина дна коробки будет $(80-2x)$ *см*, ширина $(70-2x)$ *см*. Высота коробки будет x *см*. Следовательно, объем коробки будет равен

$$[(80-2x)(70-2x)x] \text{ куб. см.}$$

По условию задачи требуется, чтобы объем коробки оказался равным 30 000 *куб. см*.

Значит, математическим выражением условия данной задачи будет следующее равенство:

$$(80-2x)(70-2x)x = 30\,000.$$

Это равенство верно не при всяком значении буквы x. Например, при $x=5$ левая часть этого равенства будет равна 21 000, в то время как правая равна 30 000.

Отсюда видно, что для решения поставленной задачи надо найти такие значения буквы x, при которых равенство

$$(80-2x)\cdot(70-2x)\cdot x=30\,000$$

становится верным. Это равенство является примером уравнения.

Если бы мы умели решить это уравнение*, то получили бы, что либо $x=10$, либо $x=15$, либо же $x=50$.

Таким образом, требуемую коробку можно сделать, если сторону вырезаемых квадратов взять равной 10 *см* или 15 *см*. Вырезать же по всем углам данного листа квадраты со стороной 50 *см* невозможно.

На этом примере мы убеждаемся в следующем. Всякое решение задачи будет обязательно корнем уравнения, составленного по условиям этой задачи. Но не всякий корень уравнения будет являться обязательно решением задачи.

§ 2. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

1. Мы уже знаем, что равенство, составленное из двух тождественно равных выражений, называется тождеством (см. гл. IV).

Что же называется уравнением?

Определение. ***Уравнением называется равенство, не являющееся тождеством и содержащее по крайней мере одну букву, обозначающую неизвестное.***

Примеры. Равенство $2a+1=a+7$ есть уравнение: оно обращается в верное равенство не при всяком значении буквы a, а лишь при $a=6$.

Равенство $x^2+15=8x$ обращается в верное равенство только

$$\text{при } x=3 \text{ и при } x=5;$$

$$x^2+2x=0 \quad \text{при } x=0 \text{ и } x=-2;$$

$$\frac{2}{x-1}+\frac{15}{x+3}=5 \quad \text{при } x=2 \text{ и } x=-\frac{3}{5};$$

$$(x-1)(x-2)(x+3)=0 \quad \text{при } x=1,\quad x=2 \text{ и } x=-3;$$

$$x^3-75x^2+1400x-7500=0 \quad \text{при } x=10,\quad x=15 \text{ и } x=50.$$

Равенство $x^2+1=0$ не обращается в верное равенство ни при $x=0$, ни при значениях x, равных какому-либо положительному или отрицательному числу.

Равенство $a+b=10$ обращается в верное равенство, например, при $a=2$ и $b=8$ или при $a=3$ и $b=7$ и т. д.

Равенство $x+y+z=10$ обращается в верное равенство, например, при $x=1$, $y=1$, $z=8$ или при $x=3\frac{1}{2}$, $y=-1$, $z=7\frac{1}{2}$ и т. д.

* Способы решения подобных уравнений изложены во второй части курса.

Все приведенные выше равенства являются уравнениями.

Однако не всегда можно по первому взгляду определить, является ли данное равенство тождеством или уравнением? Например, трудно определить с первого взгляда, является ли каждое из следующих равенств тождеством или уравнением:

1) $(x^2-1)(x^2-4)=(x^2+3x+2)(x^2-3x+2)$,

2) $(x^2-1)(x^2-4)=(x^2+2x+1)(x^2-2x+4)$.

Преобразуем левую и правую части первого равенства. Левая часть равна x^4-5x^2+4.

Правая часть равна

$$[(x^2+2)+3x][(x^2+2)-3x]=(x^2+2)^2-9x^2=$$
$$=x^4-5x^2+4.$$

После этих преобразований становится ясным, что первое равенство является тождеством.

Теперь решим вопрос о втором равенстве.

Преобразуем левую и правую части второго равенства.

Левая часть равна x^4-5x^2+4.

Правая часть равна x^4+x^2+6x+4.

Но равенство

$$x^4-5x^2+4=x^4+x^2+6x+4$$

не является тождеством хотя бы потому, что оно не будет верным, например, при $x=1$.

Следовательно, второе равенство есть уравнение.

Убедитесь в том, что равенство

$$(1+x+x^2+x^3)^2-x^3=(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4)$$

является тождеством, а равенство

$$2x+1=x+10$$

уравнением.

2. Те буквы, которые входят в уравнение и значения которых требуется найти так, чтобы уравнение обратилось в верное равенство, называются **неизвестными**.

Уравнение	$2a+1=a+7$	содержит	одно	неизвестное	a;
»	$x^2+15=8x$	»	»	»	x;
»	$a+b=10$	»	два неизвестных		a и b*;
»	$x+y+z=10$	»	три	»	x, y и z.

---

* Уравнение $a+b=10$ можно рассматривать и с иной точки зрения. Можно считать число a известным фиксированным числом, а число b неизвестным. Тогда равенство $a+b=10$ станет уравнением с одним неизвестным b. Оно обратится в верное равенство только при $b=10-a$.

Определение. ***Решением или корнем уравнения с одним неизвестным называется такое число, при подстановке которого вместо неизвестного уравнение обращается в верное равенство.***

Например, число 6 является решением или корнем уравнения $2a+1=a+7$. Числа 0 и -2 являются решениями или корнями уравнения $x^2+2x=0$.

Числа 10, 15 и 50 являются корнями уравнения

$$x^3-75x^2+1400x-7500=0.$$

Выражение $b-a$ есть корень уравнения $x+a=b$. Уравнение $x+1=x+2$ не имеет ни одного корня. Уравнение $|x|=x$ имеет бесконечное множество корней. Корнями этого уравнения являются все положительные числа и нуль.

Из этих примеров видно, что уравнение с одним неизвестным может иметь либо один корень, либо несколько корней, либо ни одного корня, либо, наконец, бесконечное множество корней.

Замечание. Неизвестое в уравнении может быть обозначено любой буквой. Но в уравнениях с одним неизвестным неизвестное чаще всего обозначается буквой x.

3. Мы только что дали определение тому, что называется решением (или корнем) уравнения с одним неизвестным. Теперь объясним, как надо понимать термин «решить уравнение».

Определение. ***Решить уравнение с одним неизвестным — значит найти все его корни (или убедиться в их отсутствии).***

Таким образом, слово «решение» употребляется в двух различных смыслах: в одном случае под термином «решение уравнения с одним неизвестным» мы понимаем какой-нибудь корень этого уравнения; в другом же случае под термином «решение уравнения с одним неизвестным» мы понимаем все вычисления, преобразования и рассуждения, с помощью которых отыскиваются корни этого уравнения.

О корнях уравнения принято говорить, что они удовлетворяют уравнению. Например, число 6 удовлетворяет уравнению $2a+1=$ $=a+7$, а число, скажем, 5 этому уравнению не удовлетворяет.

4. Отыскание корней уравнения является одной из важнейших задач алгебры. Имеется много разнообразных уравнений, которые решаются легко. Такие уравнения изучаются в курсе элементарной алгебры. Более же сложные уравнения и более общие вопросы теории уравнений изучаются в курсе высшей алгебры и в других разделах высшей математики.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ

Классификация уравнений по числу неизвестных

В уравнение может входить одна, две, три или больше различных букв, обозначающих собой различные неизвестные величины. Например, уравнение $x^2+15=8x$ содержит одно неизвестное x и называется уравнением с одним неизвестным; уравнение $xy-z=1$ содержит три неизвестных x, y, z и называется уравнением с тремя неизвестными и т. д.

Уравнения с числовыми и буквенными коэффициентами

Если в уравнение не входят никакие другие буквы, кроме неизвестных, то такое уравнение называется уравнением с числовыми коэффициентами.

Например, уравнения

$$2a+1=a+7;\quad x^2+15=8x;$$
$$\frac{2}{x-1}+\frac{15}{x+3}=5;\qquad x+y=10$$

суть уравнения с числовыми коэффициентами.

Если в уравнение входит одна или несколько других букв, кроме букв, обозначающих неизвестные, то такое уравнение называется уравнением с буквенными коэффициентами.

Например, уравнение $x+a=b$, в котором x считается неизвестным, а буквы a и b — известные числа, есть уравнение с буквенными коэффициентами (с одним неизвестным).

Уравнение $ax^2+bx+c=0$, в котором x — неизвестное, а буквы a, b, c — известные числа, есть опять же уравнение с буквенными коэффициентами (с одним неизвестным).

Уравнение $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=10$ есть уравнение с буквенными коэффициентами (с двумя неизвестными x и y), если считать, что буквы a и b обозначают числа известные и т. д.

Рациональные уравнения

Если левая и правая части уравнения рациональны относительно неизвестных*, то уравнение называется рациональным.

---

*Алгебраическое выражение называется рациональным относительно какой-нибудь буквы, например буквы x, если x входит в выражение так, что над ней не производится никаких других действий, кроме сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в целую степень. Выражения, в которых x входит в показатель степени, не считаются рациональными, например выражение 2^x.

Например, уравнения

$$2a+1=a+7; \quad x^2+15=8x; \quad \frac{2}{x-1}+\frac{15}{x+3}=5;$$

$$(x-1)(x-2)=0; \quad x^3-75x^2+1400x-7500=0;$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1; \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

суть рациональные уравнения. Если в уравнение входит степень с неизвестным показателем, то такое уравнение не является рациональным. Например, уравнение $2^x-x=5$ не рациональное.

Целые уравнения

Если в левой и правой частях рационального уравнения ни одно неизвестное не входит в качестве делителя или не входит в какое-либо выражение, являющееся делителем, то уравнение называется целым.

Например, уравнения

$$2a+1=a+7; \quad x^2+15=8x; \quad \frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}=1; \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

(здесь неизвестные x и y);

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(здесь неизвестные x, y, z) суть целые уравнения.

Дробные уравнения

Если в уравнении хотя бы один раз встречается деление на неизвестное или на выражение, содержащее неизвестное, то уравнение называется дробным.

Например, уравнения

$$x+\frac{1}{x}=2; \quad \frac{2}{x-1}+\frac{15}{x+3}=5; \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$$

(здесь x и y неизвестные) суть дробные уравнения.

Классификация целых уравнений с одним неизвестным по степеням

Если наивысшая степень неизвестного, входящая в целое уравнение с одним неизвестным, имеет показатель степени n, то уравнение называется уравнением n-й степени.

Например, уравнения $2a+1=a+7$;

$$5x+3=2x+27; \quad \frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{3}=1; \quad ax+b=cx+d$$

(в последнем уравнении неизвестным считать x) суть уравнения с одним неизвестным первой степени;

уравнения

$$x^2+2x=0; \quad x^2+15=8x; \quad ax^2+bx+c=0$$

суть уравнения с одним неизвестным второй степени;

уравнения

$$x^3+x-2=0; \quad x^3+1=0; \quad ax^3+bx^2+cx+d=0$$

суть уравнения с одним неизвестным третьей степени;

уравнение $x^5+x=2$ есть уравнение пятой степени и т. д.

Общий вид уравнений с одним неизвестным

Уравнение с одним неизвестным можно записать в общем виде следующим образом:

1-й степени: $ax+b=0$;
2-й степени: $ax^2+bx+c=0$;
3-й степени: $ax^3+bx^2+cx+d=0$;
4-й степени: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+f=0$;
5-й степени: $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$ и т. д.

Во всех последних пяти уравнениях предполагается, что $a\neq 0$.

§ 4. РАВНОСИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Понятие о равносильности уравнений

Определение. ***Если каждый корень одного уравнения с одним неизвестным является корнем другого уравнения с одним неизвестным, и наоборот, то такие уравнения называются равносильными*.***

Примеры.

Уравнение $2x+1=x+7$ имеет только один корень, равный числу 6.

Уравнение $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$ также имеет только один корень, равный числу 6.

Поэтому уравнения $2x+1=x+7$ и $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$ равносильны.

---

* Это определение уточнено на стр. 275.

Уравнения

$$(x-3)(x-5)=0 \text{ и } -7(x-3)(x-5)=0$$

также равносильны, так как корнями каждого из них служат одни и те же числа 3 и 5.

Напротив, уравнения $x=2$ и $x^2=4$ не равносильны. Уравнение $x=2$ имеет только один корень, равный числу 2; уравнение же $x^2=4$ имеет два корня, один из которых равен 2, а другой -2.

Уравнения

$$(x-1)(x-2)=0$$

и

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

также не равносильны, так как число 3 является корнем только второго уравнения.

Две основные теоремы о равносильности уравнений

Теорема 1. ***Если к обеим частям уравнения прибавим одно и то же выражение, то получим новое уравнение, равносильное данному.***

Примечание. Утверждение, сделанное в этой теореме, теряет силу, если прибавляемое выражение становится бессмысленным при таком значении буквы, обозначающей неизвестное, которое является корнем данного уравнения.

Примеры:

Уравнения

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+279=x+7+279$$

равносильны. Уравнения

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+5x^2=x+7+5x^2$$

также равносильны. (Выражение $5x^2$ ни при каком числовом значении буквы x бессмысленным не становится.)

Уравнения

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+\frac{1}{x-5}=x+7+\frac{1}{x-5}$$

опять же равносильны. (Выражение $\frac{1}{x-5}$ становится бессмысленным только при $x=5$; но число 5 не является корнем уравнения $2x+1=x+7$.)

Уравнения

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+\frac{1}{x-6}=x+7+\frac{1}{x-6}$$

уже не равносильны. (Выражение $\frac{1}{x-6}$ становится бессмысленным при $x=6$, т. е. при таком значении неизвестного, которое как раз является корнем уравнения $2x+1=x+7$.)

Правильность сделанного в теореме 1 утверждения проиллюстрируем на приведенных выше трех примерах.

Если при каком-нибудь значении буквы x будет верным равенство $2x+1=x+7$, то при этом значении буквы x окажется верным и равенство $2x+1+279=x+7+279$, так как от прибавления равных чисел к равным числам получаются результаты, также равные между собой.

Отсюда следует, что всякий корень уравнения

$$2x+1=x+7$$

является также корнем и уравнения

$$2x+1+279=x+7+279.$$

Совершенно аналогичными рассуждениями можно показать, что всякий корень уравнения $2x+1+279=x+7+279$ будет являться также корнем уравнения $2x+1=x+7$. А из всего этого будет вытекать, что уравнения

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+279=x+7+279$$

равносильны.

Все сказанное легко повторить и для пары уравнений

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+5x^2=x+7+5x^2.$$

Теперь объясним равносильность уравнений

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+\frac{1}{x-5}=x+7+\frac{1}{x-5}.$$

Уравнение $2x+1=x+7$ имеет только один корень 6; легко убедиться, что число 6 является также корнем уравнения

$$2x+1+\frac{1}{x-5}=x+7+\frac{1}{x-5}.$$

С другой стороны, уравнение

$$2x+1+\frac{1}{x-5}=x+7+\frac{1}{x-5}$$

также имеет только один корень 6, который является корнем уравнения

$$2x+1=x+7.$$

Из всего этого следует, что уравнения

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+\frac{1}{x-5}=x+7+\frac{1}{x-5}$$

равносильны.

Остается объяснить, что уравнения

$$2x+1=x+7 \text{ и } 2x+1+\frac{1}{x-6}=x+7+\frac{1}{x-6}$$

не равносильны. Уравнение $2x+1=x+7$ удовлетворяется при $x=6$; уравнение же $2x+1+\frac{1}{x-6}=x+7+\frac{1}{x-6}$ при $x=6$ не удовлетворяется, так как при $x=6$ левая и правая части этого уравнения становятся бессмысленными. Поэтому рассматриваемые уравнения не равносильны.

Теперь дадим теореме 1 более точную формулировку.

Если к обеим частям уравнения прибавим одно и то же выражение, не теряющее смысла ни при каком значении буквы, обозначающей неизвестное, либо теряющее смысл лишь при таких значениях этой буквы, которые не являются корнями данного уравнения, то получим новое уравнение, равносильное данному.

Теорема 2. ***Если обе части уравнения умножим (или разделим) на одно и то же выражение, отличное от нуля и независящее от неизвестного, то получим новое уравнение, равносильное данному.***

Уравнения

$$3x+2=2x+3 \text{ и } (3x+2)\cdot 7=(2x+3)\cdot 7$$

равносильны. Здесь второе уравнение получилось умножением левой и правой частей первого уравнения на 7.

Уравнения

$$\frac{x+2}{3}+\frac{2x+1}{5}=1+\frac{8x+19}{15}$$

и

$$5(x+2)+3(2x+1)=15+8x+19$$

также равносильны. Здесь второе уравнение получилось умножением левой и правой частей первого уравнения на 15.

Уравнения

$$91x+35=28x+49$$

и

$$13x+5=4x+7$$

равносильны. Здесь второе уравнение получилось делением левой и правой частей первого уравнения на 7.

Уравнения

$$(x-2)(x-3)=0 \text{ и } 10(x-2)(x-3)=0$$

равносильны. Второе уравнение получилось умножением левой и правой частей первого уравнения на 10.

Но уравнения

$$(x-2)(x-3)=0 \text{ и } (x-2)(x-3)(x-4)=0$$

уже не равносильны. Второе уравнение получилось умножением левой и правой частей первого уравнения на $(x-4)$. (Первое уравнение имеет лишь два корня: $x=2$ и $x=3$; второе же уравнение имеет три корня: $x=2$, $x=3$ и $x=4$.)

Умножение левой и правой частей уравнения на нуль

Если обе части уравнения умножить на нуль, то получится тождество, а не уравнение, равносильное данному. Например, уравнение $5x=15$ имеет только один корень $x=3$, равенство же $5x\cdot 0= =15\cdot 0$ является верным при любом значении x.

Умножение левой и правой частей уравнения на выражение, содержащее неизвестное

Если обе части уравнения умножить (или разделить) на выражение, содержащее неизвестное, то может получиться новое уравнение, не равносильное данному.

Умножив обе части уравнения $x=2$ на выражение $(x-5)$, получим новое уравнение

$$x(x-5)=2(x-5).$$

Уравнения $x=2$ и $x(x-5)=2(x-5)$ не равносильны, так как первое из них имеет своим корнем только число 2, а второе уравнение имеет два корня: $x=2$ и $x=5$.

Разделив обе части уравнения $x(x-10)=2(x-10)$ на выражение $x-10$, получим $x=2$.

Уравнения $x(x-10)=2(x-10)$ и $x=2$ не равносильны, так как первое из них имеет своими корнями числа 2 и 10, а корнем второго уравнения служит только число 2.

Разделив обе части уравнения $x^2-1=x-1$ на выражение $x-1$, получим:

$$x+1=1.$$

Уравнения $x^2-1=x-1$ и $x+1=1$ не равносильны, так как первое из них имеет своими корнями числа 0 и 1, а корнем второго уравнения служит только число нуль.

Эти примеры показывают следующее:

1. Если обе части уравнения умножить на целое выражение, зависящее от неизвестного, то новое уравнение будет иметь своими корнями не только корни первоначального уравнения, но возможно и некоторые новые корни.

2. Если обе части уравнения разделить на целое выражение, зависящее от неизвестного, то может оказаться, что не все корни первоначального уравнения будут корнями вновь полученного уравнения.

Рассмотрим еще два примера.

Пример 1. Умножим обе части уравнения

$$\frac{10}{x-1}+3=\frac{25}{x-1}$$

на выражение $(x-1)$. Тогда получим:

$$10+3(x-1)=25,$$

или

$$10+3x-3=25,$$

или

$$3x+7=25,$$

или

$$3x=18,$$

откуда

$$x=6.$$

Легко убедиться, что число 6 является корнем и первоначального уравнения.

Этот пример показывает, что умножение правой и левой частей уравнения на выражение, зависящее от неизвестного, может в некоторых случаях и не приводить к появлению таких корней, которые не были бы корнями первоначального уравнения.

Пример 2. Умножим обе части уравнения

$$\frac{7}{2(x-3)}+4=\frac{3,5}{x-3}$$

на выражение $2(x-3)$. Тогда получим:

$$7+8(x-3)=7,$$

или

$$7+8x-24=7,$$

или

$$8x=24,$$

откуда

$$x=3.$$

Число 3 не является корнем первоначального уравнения, так как левая и правая части этого уравнения теряют смысл при $x=3$.

Этот пример показывает, что при умножении левой и правой частей первоначального уравнения на выражение, зависящее от неизвестного, может получиться уравнение, единственный корень которого не будет корнем первоначального уравнения.

Это будет означать, что первоначальное уравнение корней не имеет.

Из всего изложенного надо сделать такой общий вывод.

Если для решения уравнений нам придется умножать или делить его обе части на выражение, зависящее от неизвестного, то в каждом отдельном случае необходимо производить дополнительные исследования для окончательного решения вопроса о корнях данного уравнения.

УПРАЖНЕНИЯ

119. Ответить на вопросы:

а) Что называется уравнением?

б) Что называется корнем уравнения с одним неизвестным?

в) Что называется решением уравнения с одним неизвестным?

г) Какие два различных значения имеет термин «решение уравнения»?

120. Проверить, является ли число 24 корнем уравнения

$$3x-43=x-19.$$

121. Проверить, является ли число 7 корнем уравнения

$$5(x-2)=x+17.$$

122. При каких значениях буквы x равенство $x^2=4$ будет верным? Отв. 2; -2.

123. Убедитесь в справедливости следующих утверждений:

а) Уравнение $|x|=7$ имеет только два корня: 7 и -7.

б) Уравнение $|x-1|=1$ имеет только два корня: 2 и 0.

в) Уравнение $|3x-5|=1$ имеет только два корня: 2 и $\frac{4}{3}$.

г) Корнем уравнения $|x|=x$ является любое положительное число и нуль.

д) Корнем уравнения $|x|=-x$ является любое отрицательное число и нуль.

Указание. Чтобы найти все корни, например, уравнения $|4x-15|=9$, достаточно решить в отдельности каждое из следующих уравнений:

1) $4x-15=9$ и 2) $4x-15=-9$.

ГЛАВА IX

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 1. ПОКАЗ НА ПРИМЕРАХ

Процесс решения уравнения первой степени с одним неизвестным заключается в следующем.

Опираясь на теоремы о равносильных уравнениях, мы последовательно приводим данное уравнение к новому уравнению, более простому, но ему равносильному. Покажем этот процесс на примерах.

Пример 1. Решить уравнение:

$$10x+19=8x+33.$$

Решение. Прибавим к обеим частям этого уравнения выражение $-8x$. Тогда получим:

$$10x-8x+19=33.$$

(Это уравнение можно было получить проще, а именно путем переноса члена $8x$ данного уравнения из правой части в левую с противоположным знаком.)

Теперь прибавим к обеим частям уравнения

$$10x-8x+19=33$$

по -19. Тогда получим:

$$10x-8x=33-19.$$

(Это уравнение также можно было получить путем переноса члена $+19$ из левой части уравнения в правую с противоположным знаком.)

После приведения подобных членов уравнение

$$10x-8x=33-19$$

примет вид:

$$2x=14.$$

Разделив обе части этого уравнения на число 2, найдем, что

$$x=7.$$

Итак, единственным корнем данного уравнения является число 7.

П р а в и л о. ***Любой член уравнения можно перенести из одной части уравнения в другую, переменив знак у этого члена на противоположный.*** Это замечание вытекает как следствие из первой теоремы равносильности уравнений.

П р и м е р 2. Решить уравнение:

$$5(x+2)+8(x+4)=7x+108.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$5x+10+8x+32=7x+108,$$

или

$$13x+42=7x+108.$$

Перенеся с противоположными знаками член $7x$ из правой части в левую, а член 42 из левой части в правую, получим:

$$13x-7x=108-42,$$

или

$$6x=66.$$

Отсюда

$$x=11.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение:

$$4x-57=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}.$$

Умножим обе части уравнения на 6, получим:

$$24x-342=3x+2x,$$

или

$$24x-342=5x.$$

После переноса членов получаем, что

$$24x-5x=342,$$

или

$$19x=342.$$

Следовательно,

$$x=18.$$

П р и м е р 4. Решить уравнение:

$$\frac{2(x-1)}{11}+\frac{5(x+1)}{8}=\frac{x-3}{2}+9.$$

Умножив обе части уравнения на число 88*, получим:

$$16(x-1)+55(x+1)=44(x-3)+792.$$

---

* 88 есть наименьшее общее кратное всех знаменателей.

Раскрыв скобки, получим:

$$16x - 16 + 55x + 55 = 44x - 132 + 792,$$

или

$$71x + 39 = 44x + 660.$$

После переноса членов имеем:

$$71x - 44x = 660 - 39,$$

т. е.

$$27x = 621.$$

Отсюда

$$x = 23.$$

Пример 5. Определить x из уравнения

$$ax + b = cx + d.$$

Перенесем члены, содержащие неизвестное, в левую часть уравнения, а известные члены — в правую:

$$ax - cx = d - b.$$

Теперь преобразуем левую часть уравнения путем вынесения за скобки множителя x:

$$(a - c)x = d - b.$$

Разделим обе части последнего уравнения на $a - c$, предполагая, что $a - c \neq 0$. Тогда получим, что

$$x = \frac{d - b}{a - c}.$$

Итак, данное уравнение имеет один корень, если $a - c \neq 0$. Если же $a = c$ и $b \neq d$, то уравнение $ax + b = cx + d$ не имеет ни одного корня. Если, наконец, $a = c$ и $b = d$, то оно удовлетворяется при любом значении x.

Пример 6. Определить x из уравнения

$$\frac{x}{a-b} + \frac{b}{a+b} = \frac{x}{a+b} + \frac{a}{a-b}.$$

Умножив левую и правую части уравнения на произведение $(a + b)(a - b)$ *, получим:

$$(a + b)x + b(a - b) = (a - b)x + a(a + b),$$

или

$$ax + bx + ab - b^2 = ax - bx + a^2 + ab,$$

или же

$$2bx = a^2 + b^2,$$

---

* Предполагается, что $(a + b)(a - b) \neq 0$. Если бы $(a + b)(a - b) = 0$, то либо $a + b = 0$, либо $a - b = 0$, и тогда заданное уравнение не имело бы смысла.

откуда

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$$

(предполагается, что $b \neq 0$).

При $b = 0$ данное уравнение принимает вид:

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{a} + 1.$$

Это уравнение, очевидно, корней не имеет.

Замечание. Рассмотренные нами выше уравнения

$$10x + 19 = 8x + 33; \qquad 5(x+2) + 8(x+4) = 7x + 108;$$

$$ax + b = cx + d$$

и им подобные называются **уравнениями с целыми коэффициентами**.

Уравнения же

$$4x - 57 = \frac{x}{2} + \frac{x}{3};$$

$$\frac{2(x-1)}{11} + \frac{5(x+1)}{8} = \frac{x-3}{2} + 9;$$

$$\frac{x}{a-b} + \frac{b}{a+b} = \frac{x}{a+b} + \frac{a}{a-b}$$

и им подобные называются **уравнениями с дробными коэффициентами**.

§ 2. ПРАВИЛО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Уравнения первой степени с одним неизвестным можно решать следующим образом.

1. Если дано уравнение с дробными коэффициентами, то прежде всего следует преобразовать его в уравнение с целыми коэффициентами.

2. Если имеются скобки, затрудняющие решение уравнения, то их надо раскрыть.

3. Перенести члены, содержащие неизвестное, в одну часть уравнения, а известные — в другую. (Члены, содержащие неизвестное, как правило, переносятся в левую часть уравнения.)

4. Сделать приведение подобных членов. (При наличии буквенных коэффициентов неизвестное выносится за скобки.)

5. Если в результате этих преобразований получится уравнение вида $Ax = B$, в котором $A \neq 0$, то разделить обе части этого уравнения на A.

Замечание 1. При решении, например, уравнения

$$(a+b)x + c = d$$

раскрывать скобок не следует.

Замечание 2. Два одинаковых члена, стоящих в разных частях уравнения, можно просто опустить.

Например, из уравнения

$$x^2+3x+5=x^2+23$$

следует уравнение

$$3x+5=23.$$

Замечание 3. Можно переменить знаки одновременно у всех членов уравнения. Например, из уравнения

$$-8x+12=-x-2$$

следует уравнение

$$8x-12=x+2.$$

Это преобразование можно рассматривать как преобразование, полученное умножением левой и правой частей данного уравнения на -1.

§ 3. ОСОБЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЙ С ЧИСЛОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Решая, например, уравнение

$$3(x+2)+5(x+5)=x+7(x+6),$$

получим последовательно:

$$3x+6+5x+25=x+7x+42,$$

или

$$8x+31=8x+42,$$

или

$$31=42.$$

Получилось невозможное равенство. Это значит, что данное уравнение не имеет ни одного корня. Это заключение вытекает еще в более отчетливой форме из уравнения $8x+31=8x+42$, предшествующего невозможному равенству $31=42$.

2. Решая, например, уравнение

$$3(x+2)+5(x+5)=x+7\left(x+4\frac{3}{7}\right),$$

получим последовательно:

$$3x+6+5x+25=x+7x+31,$$

или

$$8x+31=8x+31,$$

или

$$8x-8x=31-31,$$

т. е.

$$0=0.$$

Это значит, что данное нам равенство, названное уравнением, в действительности является тождеством.

Это заключение можно было бы сделать и ранее, обратив внимание на полученное нами равенство

$$8x+31=8x+31,$$

равносильное данному уравнению.

Из рассмотренных примеров можно сделать следующий вывод.

Могут встречаться такие уравнения, которые не имеют ни одного корня, и такие, которые имеют своим корнем любое число. Если окажется, что уравнение имеет своим корнем любое число, то это будет означать, что это равенство, считавшееся нами уравнением, на самом деле представляет собой тождество.

§ 4. ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ *

Правила решения дробных уравнений поясним на двух примерах.

Пример 1. Решить уравнение:

$$\frac{7}{2}+\frac{9{,}5}{2x-3}=\frac{5x+2}{2x-3}.$$

(Это уравнение в дальнейшем будем именовать первоначальным.)

Дадим два способа решения этого уравнения.

Первый способ. Умножив обе части уравнения на произведение $2(2x-3)$, получим:

$$7(2x-3)+9{,}5\cdot 2=2(5x+2),$$

или

$$14x-21+19=10x+4;$$

отсюда

$$x=\frac{3}{2}.$$

Число $\frac{3}{2}$ есть корень уравнения $7(2x-3)+9{,}5\cdot 2=2(5x+2)$, т. е. того уравнения, которое мы получили после умножения левой и правой частей первоначального уравнения на выражение, содержащее неизвестное. Поэтому мы еще не можем быть уверенными в том, что число $\frac{3}{2}$ является и корнем первоначального уравнения (см. стр. 158). Необходима проверка.

При $x=\frac{3}{2}$ левая и правая части первоначального уравнения теряют смысл. Следовательно, число $\frac{3}{2}$ не является корнем первоначального уравнения.

---

* См. стр. 151.

Таким образом, доказано, что первоначальное уравнение не имеет ни одного корня.

Второй способ. Перенесем все члены первоначального уравнения в левую часть:

$$\frac{7}{2}+\frac{9{,}5}{2x-3}-\frac{5x+2}{2x-3}=0.$$

Теперь преобразуем левую часть уравнения путем приведения всех дробей к общему знаменателю:

$$\frac{7(2x-3)+9{,}5\cdot 2-2(5x+2)}{2(2x-3)}=0.$$

После раскрытия соответствующих скобок и приведения подобных членов получим уравнение $\frac{4x-6}{2(2x-3)}=0$, равносильное первоначальному уравнению. Но последнее уравнение не имеет ни одного корня, так как при $x=\frac{3}{2}$ его левая часть теряет смысл, а при всех прочих значениях x она обращается в единицу. Следовательно, и первоначальное уравнение не имеет ни одного корня. (Дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Число $\frac{3}{2}$ мы получили, решив уравнение $4x-6=0$.)

Пример 2. Решить уравнение:

$$\frac{x+2}{x-8}-\frac{3}{2}=\frac{x-1}{x-8}.$$

(Это уравнение в дальнейшем будем именовать первоначальным.) И это уравнение решим также двумя способами.

Первый способ. Умножив обе части уравнения на произведение $2(x-8)$, получим:

$$2(x+2)-3\cdot(x-8)=2(x-1),$$

или

$$2x+4-3x+24=2x-2,$$

или же

$$3x=30.$$

Отсюда

$$x=10.$$

Число 10 есть корень уравнения $2(x+2)-3(x-8)=$ $=2(x-1)$, т. е. того уравнения, которое мы получили после умножения левой и правой частей первоначального уравнения на выражение, содержащее неизвестное. Поэтому мы еще не можем быть уверенными в том, что число 10 является корнем и первоначального уравнения. Необходима проверка. При $x=10$ левая и правая части первоначального уравнения принимают одно и то же значение $4\frac{1}{2}$, т. е. уравнение обращается в тождество

$$4\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}.$$

Следовательно, число 10 является единственным корнем первоначального уравнения.

В т о р о й с п о с о б. Перенесем все члены п е р в о н а ч а л ь н о г о уравнения в левую часть:

$$\frac{x+2}{x-8}-\frac{3}{2}-\frac{x-1}{x-8}=0.$$

Теперь преобразуем левую часть уравнения путем приведения всех дробей к общему знаменателю:

$$\frac{2(x+2)-3(x-8)-2(x-1)}{2(x-8)}=0.$$

После преобразования числителя дроби получим уравнение

$$\frac{-3x+30}{2(x-8)}=0,$$

равносильное п е р в о н а ч а л ь н о м у уравнению.

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ее числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Приравнивая нулю числитель, получим $-3x+30=0$. Отсюда $x=10$.

Теперь необходимо посмотреть, не обращается ли в нуль знаменатель дроби при $x=10$.

Выражение $2(x-8)$ при $x=10$ не обращается в нуль. Следовательно, число 10 есть единственный корень уравнения

$$\frac{-3x+30}{2(x-8)}=0.$$

Но последнее уравнение равносильно п е р в о н а ч а л ь н о м у. Значит, и п е р в о н а ч а л ь н о е уравнение имеет своим единственным корнем число 10.

Изложенные два способа решения дробных уравнений по существу идентичны *. Различие заключается лишь в том, что при первом способе мы делаем проверку корней, обращаясь к первоначальному уравнению. При втором же способе мы исследуем обратимость или необратимость в нуль знаменателя той дроби, которая получается после приведения всех членов первоначального уравнения к общему знаменателю.

---

* Латинское слово «indenticus» означает «тождественный», «одинаковый».

§ 5. УРАВНЕНИЯ, У КОТОРЫХ ПРАВАЯ ЧАСТЬ ЕСТЬ НУЛЬ, А ЛЕВАЯ — ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ НЕИЗВЕСТНОГО

Пример 1.

Решить уравнение:

$$17(x-3)(x-5)=0.$$

Это уравнение будет удовлетворяться тогда и только тогда, когда либо $x-3=0$, либо $x-5=0$.

Следовательно, корнями данного уравнения будут только числа 3 и 5.

Пример 2.

Корнями уравнения

$$-8(2x-1)(2x+1)(x-14)=0$$

будут только

$$\frac{1}{2};\quad -\frac{1}{2} \text{ и } 14.$$

§ 6. УРАВНЕНИЯ, У КОТОРЫХ ЛЕВАЯ И ПРАВАЯ ЧАСТИ ПРЕДСТАВЛЯЮТ СОБОЙ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ИМЕЮЩИЕ ОБЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ, ЗАВИСЯЩИЙ ОТ НЕИЗВЕСТНОГО

Пример 1.

Решить уравнение:

$$(2x+1)(x-5)=(x+10)(x-5).$$

Сразу видно, что это уравнение будет удовлетворяться при $x=5$. Действительно, при $x=5$ его левая и правая части оказываются равными друг другу, так как каждая из них обращается в нуль.

Чтобы найти указанный выше корень 5, достаточно было приравнять нулю общий множитель $x-5$ и решить полученное уравнение:

$$x-5=0.$$

После того как мы установили, что число 5 является корнем данного уравнения, можно, считая $x \neq 5$, разделить обе его части на $x-5$ и решать уравнение

$$2x+1=x+10.$$

Корнем последнего уравнения будет число 9, являющееся вторым корнем первоначального уравнения.

Следовательно, первоначальное уравнение имеет только два корня: 5 и 9.

Пример 2.
Корнями уравнения

$$(3x-7)(2x-11)=(x+10)(2x-11)$$

будут только числа

$$\frac{11}{2} \text{ и } \frac{17}{2}.$$

Пример 3.
Корнями уравнения

$$(5x+1)(x+8)=(2x+19)(x+8)$$

будут только числа

$$-8 \text{ и } 6.$$

Пример 4.
Корнями уравнения

$$(ax+b)(px+q)=(cx+d)(px+q)$$

будут только

$$-\frac{q}{p} \text{ и } \frac{d-b}{a-c},$$

где $p \neq 0$ и $a-c \neq 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

124. Решить уравнения:

1) $3(7-8y)-7(3-4y)=1$; Отв. $\frac{1}{4}$.

2) $4(x+3)^2-(x-2)^2=3(x-4)^2$; Отв. $\frac{4}{13}$.

3) $(2-x)(x+2)-(3-x)(x+3)=7+3x$; Отв. -4.

4) $\frac{9h+7}{2}-\left(h-\frac{h-2}{7}\right)=36$. Отв. 9.

125. Найти t из уравнения

$$\frac{t}{p}-t=q.$$

Отв. $\frac{pq}{1-p}$.

126. Найти z из уравнения

$$az-bz-a^2+b^2=0.$$

Отв. $a+b$.

127. Найти v из уравнения

$$\frac{v}{a-b}-\frac{v}{a+b}=2b.$$

Отв. a^2-b^2.

128. Найти m из уравнения

$$\frac{a-m}{b}+\frac{b+m}{a}=2.$$

Отв. $a-b$.

129. Решить уравнение:

$$3+\frac{2x-1}{x-5}=\frac{29-4x}{x-5}$$

Отв. Уравнение не имеет ни одного корня.

130. Решить уравнение:

$$\frac{2x-1}{x-5}=12+\frac{29-5x}{x-5}.$$

Отв. 6.

131. Зная, что $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=1$, вычислить $a^4+b^4+c^4$.

132. Доказать теорему:
если

$$a_1^2+b_1^2=1, \quad a_2^2+b_2^2=1, \quad a_1a_2+b_1b_2=0,$$

то

$$a_1^2+a_2^2=1, \quad b_1^2+b_2^2=1, \quad a_1b_1+a_2b_2=0.$$

133. Решить уравнение $|x-1|+|x-2|=1$.

ГЛАВА X

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ КАК МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ

1. Задача. Каковы должны быть длина и ширина прямоугольника, чтобы при увеличении длины на 1 *м* и ширины на 2 *м* его площадь увеличилась на 77 *кв. м*, а при увеличении ширины на 1 *м* и длины на 2 *м* площадь увеличилась бы лишь на 68 *кв. м*.

В этой задаче требуется найти два неизвестных числа, а именно длину и ширину прямоугольника.

Длину прямоугольника, выраженную в метрах, обозначим буквой x, а ширину буквой y. Тогда площадь первоначального прямоугольника будет равна (xy) *кв. м*, а площади прямоугольников с измененными сторонами будут соответственно

$$[(x+1)(y+2)] \text{ и } [(x+2)(y+1)] \text{ кв. м.}$$

На рисунке 35 дана схема этих трех прямоугольников.

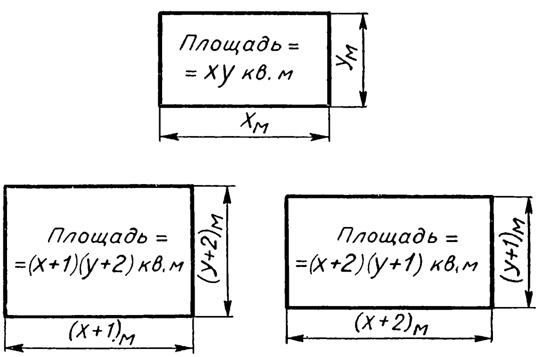


Рис. 35.

Из условий задачи следует, что

$$(x+1)(y+2) = xy+77,$$
$$(x+2)(y+1) = xy+68.$$

Каждое из этих равенств является не тождеством, а уравнением с двумя неизвестными x и y.

В этих обоих уравнениях x обозначает одно и то же число, а именно длину прямоугольника. Точно так же буква y в обоих уравнениях обозначает одно и то же число, а именно ширину прямоугольника.

Если одноименные неизвестные в нескольких уравнениях обозначают одну и ту же величину, то такая группа уравнений называется системой уравнений.

Для того чтобы указать, что данная группа уравнений рассматривается как система, поступают так: записывают в первой строке первое уравнение, во второй — второе, в третьей — третье и т. д., а затем ставят фигурную скобку с левой стороны так, чтобы она охватила все написанные уравнения. Полученная нами выше система уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(y+2)=xy+77, \\ (x+2)(y+1)=xy+68 \end{cases}$$

возникла как математическое выражение двух условий задачи.

2. Примеры систем уравнений

$\begin{cases} 2x+3y=16, \\ 3x+2y=19; \end{cases}$	Система двух уравнений с двумя неизвестными x и y.
$\begin{cases} 2x+y+2z=23, \\ x-y-3z=6, \\ 3x+2y-z=31; \end{cases}$	Система трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z.
$\begin{cases} 2x+3y=11, \\ x-y=3, \\ 5x+8y=18; \end{cases}$	Система трех уравнений с двумя неизвестными.
$\begin{cases} x+y-z=10, \\ 2x-y+2z=21; \end{cases}$	Система двух уравнений с тремя неизвестными.
$\begin{cases} x+y=11, \\ xy=30; \end{cases}$	Система двух уравнений с двумя неизвестными.
$\begin{cases} x+y+z=4, \\ x+2y+3z=5, \\ x^2+y^2+z^2=14; \end{cases}$	Система трех уравнений с тремя неизвестными.

И т. д.

3. ***Всякая система двух уравнений с двумя неизвестными x и y, которая может быть преобразована к виду***

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

называется линейной системой двух уравнений с двумя неизвестными.

Всякая система трех уравнений с тремя неизвестными x, y и z, которая может быть преобразована к виду

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases}$$

называется линейной системой трех уравнений с тремя неизвестными.

4. Теперь вернемся к вопросу о решении задачи, сформулированной в начале данного параграфа.

Решить нашу задачу — это значит найти такие два числа, чтобы при подстановке их в оба уравнения системы

$$\begin{cases} (x+1)(y+2)=xy+77, \\ (x+2)(y+1)=xy+68 \end{cases}$$

(первого числа вместо буквы x, а второго вместо буквы y) оба уравнения системы были удовлетворены, т. е. превратились бы в верные равенства.

Если положить, например,

$$x=30 \text{ и } y=10,$$

то ни одно из двух уравнений системы не удовлетворится.

Если положить

$$x=30 \text{ и } y=15,$$

то первое уравнение удовлетворится, а второе нет.

Попробуем теперь найти такую пару чисел, которая удовлетворяла бы обоим уравнениям системы одновременно.

Упрощая нашу систему уравнений раскрытием скобок и приведением подобных членов, получим сначала

$$\text{систему } \begin{cases} xy+2x+\ \ y+2=xy+77, \\ xy+\ \ x+2y+2=xy+68, \end{cases}$$

$$\text{а затем систему } \begin{cases} 2x+\ \ y=75, \\ \ \ x+2y=66. \end{cases}$$

Предположим, что число x нам уже известно. Выразив неизвестное y в зависимости от x из первого уравнения нашей системы, получим:

$$\boxed{y=75-2x.}$$

Найденное выражение для y подставим во второе уравнение нашей системы

$$x+2(75-2x)=66.$$

Получилось уравнение, содержащее только одно неизвестное x. Решив это уравнение, найдем, что $x=28$.

Зная, что $x=28$, мы можем, пользуясь уравнением

$$\boxed{y=75-2x},$$

обнаружить, что $y=19$.

Итак, оказалось, что длина и ширина прямоугольника равны 28 и 19 *м*.

Мы видели, что могут встречаться системы уравнений, состоящие из двух или нескольких уравнений с двумя или несколькими неизвестными. Однако до изучения таких систем полезно ознакомиться сначала с некоторыми особенностями одного уравнения с двумя или несколькими неизвестными.

§ 2. ОДНО УРАВНЕНИЕ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Пусть имеется одно уравнение с двумя неизвестными, например уравнение

$$2x+y=10.$$

Прежде всего поставим такой вопрос: что считать решением одного уравнения с двумя неизвестными?

Определение. ***Решением уравнения первой степени с двумя неизвестными называется такая пара чисел, подстановка которых в данное уравнение (первого вместо буквы x, а второго вместо буквы y) превращает данное уравнение в верное равенство.*** Например, пара чисел (3; 4) есть решение уравнения

$$2x+y=10,$$

пара же чисел (5; 1) его решением не будет.

Легко видеть, что уравнение $2x+y=10$ имеет бесконечное множество решений.

В самом деле, уравнение

$$2x+y=10$$

выражает только некоторую зависимость между значениями x и y. Поэтому значения одной из букв x или y мы можем задавать произвольно. Но как только мы зададим какое-нибудь значение, например, букве x, то значение буквы y будем обязаны определять уже в зависимости от взятого значения буквы x.

Для удобства перепишем наше уравнение в следующем виде:

$$y=10-2x.$$

Теперь легко видеть, что при $x=0$ получим $y=10$; при $x=1$ $y=8$; при $x=10$ $y=-10$; при $x=\frac{1}{2}$ $y=9$ и т. д.

Пары чисел (0; 10); (1; 8); (10; —10); ($\frac{1}{2}$; 9) и т. д. будут решениями уравнения

$$2x+y=10.$$

Эти пары чисел, являющиеся решениями уравнения, можно было бы записывать и так:

$$1) \begin{cases} x=0, \\ y=10; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x=1, \\ y=8; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x=10, \\ y=-10; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=9. \end{cases}$$

Итак, **одно уравнение с двумя неизвестными имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.**

Мы употребили выражение «вообще говоря» потому, что могут встретиться и исключения. Например, уравнение

$$x^2+y^2=0$$

имеет только одно решение:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases}$$

а уравнение

$$x+y=x+y+1$$

совсем не имеет решений.

§ 3. ОДНО УРАВНЕНИЕ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Пусть имеется, например, одно уравнение с тремя неизвестными

$$2x+3y+z=10.$$

Решением уравнения первой степени с тремя неизвестными называется такая тройка чисел, подстановка которых в данное уравнение (первого вместо x, второго вместо y и третьего вместо z) превращает это уравнение в верное равенство. Например, тройка чисел (1; 2; 4) есть решение этого уравнения, а тройка чисел (1; 2; 5) его решением не будет.

Легко видеть, что уравнение

$$2x+3y+z=12$$

имеет бесконечное множество решений.

В самом деле, это уравнение выражает только некоторую зависимость между x, y и z. Поэтому мы можем задавать произвольно значения каким-либо двум из этих букв, например буквам x и y. Значения же буквы z мы обязаны уже определять в зависимости от взятых значений букв x и y.

Для удобства перепишем наше уравнение в виде

$$z=12-2x-3y.$$

Теперь легко видеть, что при $x=0$ и $y=0$ получим $z=12$; при $x=1$, $y=2$ получим $z=4$; при $x=-1$, $y=-2$ получим, что $z=20$ и т. д.

Тройки чисел (0; 0; 12); (1; 2; 4); (—1; —2; 20) и т. д. будут решениями уравнения

$$2x+3y+z=12.$$

Эти тройки чисел, являющиеся решениями уравнения, можно записывать и следующим образом:

$$1)\ \begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z=12; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=4; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x=-1, \\ y=-2, \\ z=20. \end{cases}$$

Итак, одно уравнение с тремя неизвестными, так же как и одно уравнение с двумя неизвестными, имеет бесконечное множество решений.

§ 4. СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ, ЗАДАННОЙ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Система
$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

называется нормальной формой линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными x и y, записанной в общем виде.

Изложим основные способы решения такой системы.

Способ подстановки

Чтобы решить систему $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$

выразим, например, из уравнения $a_1x+b_1y=c_1$ неизвестное y в зависимости от неизвестного x.

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1}$$

(Предполагается, что $b_1\neq 0$. Если бы $b_1=0$, мы решили бы уравнение $a_1x+b_1y=c_1$ относительно x.)

Полученное выражение для величины y подставим в другое уравнение системы

$$a_2x+b_2\frac{c_1-a_1x}{b_1}=c_2.$$

Из последнего уравнения первой степени с одним неизвестным найдем, что

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad (a_1b_2-a_2b_1\neq 0).$$

Теперь, подставляя полученное выражение для величины x в формулу

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1},$$

получим:

$$y=\frac{c_1-a_1\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}}{b_1},$$

или

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Итак, решением данной линейной системы будет пара выражений

$$\left(\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1};\quad \frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\right),$$

или

$$\begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$$

Предполагается, как уже отмечалось, что

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

Способ сложения

Чтобы решить систему

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ b_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

способом сложения, умножим обе части первого уравнения на b_2, а второго на $-b_1$. После этого получим:

$$\begin{cases} \quad a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2, \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=-c_2b_1. \end{cases}$$

Складывая отдельно левые и правые части этих двух уравнений, получим:

$$a_1b_2x-a_2b_1x=c_1b_2-c_2b_1,$$

откуда

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad (a_1b_2-a_2b_1\neq 0).$$

Теперь, возвращаясь к первоначальной системе

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$$

умножим обе части первого уравнения на $-a_2$, а второго — на a_1. После этого получим:

$$\begin{cases} -a_1a_2x-a_2b_1y=-a_2c_1, \\ \quad a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2. \end{cases}$$

Складывая, получим:

$$a_1b_2y-a_2b_1y=a_1c_2-a_2c_1,$$

откуда

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

При решении линейной системы способом сложения полезно преобразования выполнять по возможности в уме и записи оформлять следующим образом:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2; \end{cases} \left|\begin{array}{r} b_2 \\ -b_1 \end{array}\right|\begin{array}{r} -a_2 \\ a_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (a_1b_2-a_2b_1)\,x=c_1b_2-c_2b_1; \\ (a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1c_2-a_2c_1; \end{array} \quad \begin{cases} x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \\ y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \end{cases}$$

Способ сравнения

Чтобы решить систему

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

способом сравнения, выразим какую-либо одну из неизвестных через другую как из первого уравнения, так и из второго.

Выражая, например, y, получим:
из 1-го уравнения

$$y=\frac{c_1-a_1x}{b_1} \qquad (b_1\neq 0),$$

а из второго

$$y=\frac{c_2-a_2x}{b_2} \qquad (b_2\neq 0).$$

Полученные различные выражения одной и той же величины y приравняем друг другу.

Получим одно уравнение с одним неизвестным x:

$$\frac{c_1-a_1x}{b_1}=\frac{c_2-a_2x}{b_2}.$$

Решив это уравнение, найдем неизвестное x. Теперь уже легко найти и неизвестное y.

Примеры:

$$1)\ \begin{cases} 2x+3y=49, \\ 3x+2y=46; \end{cases} \quad \begin{array}{|r|r} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} 5x=40, \\ 5y=55, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\ 8, \\ y=11; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 18x+25y=498, \\ 27x+10y=417; \end{cases} \quad \begin{array}{|r|r} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{array}$$

$$\begin{cases} -36x-50y=-996, \\ 135x+50y=2085; \end{cases} \quad \begin{cases} 54x+75y=1494, \\ -54x-20y=-834; \end{cases}$$

$$99x=1089, \quad 55y=660, \quad \begin{cases} x=11, \\ y=12. \end{cases}$$
$$x=11. \qquad y=12.$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{x+5}{3}-2y=\dfrac{3x-y}{4}-7, \\ \dfrac{10(y-x)-4(1-y)}{3}=x. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему к нормальной форме:

$$\begin{cases} 4x+20-24y=9x-3y-84. \\ 10y-10x-4+4y=3x; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+21y=104, \\ 13x-14y=-4; \end{cases} \quad \begin{array}{|r|r} 2 & 13 \\ 3 & -5 \end{array}$$

$$49x=196, \quad 343y=1372,$$
$$x=4. \qquad y=4.$$

§ 5. ДОПОЛНЕНИЕ К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ

$$\begin{cases} a\,x+b\,y=c, \\ a_1x+b_2y=c_1. \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

Мы уже знаем, что если $ab_1-a_1b\neq 0$, то система (A) имеет одно и только одно решение.

Возникает естественный вопрос, а что можно сказать о системе (A) в том случае, когда $ab_1-a_1b=0$. Не обращаясь к полному исследованию этого вопроса, примем к сведению лишь следующее.

Если $ab_1-a_1b=0$, то система (A) либо не будет иметь ни одного решения, либо будет иметь бесконечное множество решений. Поясним сказанное на примерах.

1. Система

$$\begin{cases} 2x+3y=10, \\ 2x+3y=12 \end{cases}$$

такова, что $ab_1-a_1b=2\cdot3-2\cdot3=0$.

Эта система решений не имеет. Действительно, выражение $2x+3y$ при одних и тех же значениях x и y не может оказаться равной и 10 и 12.

2. Система

$$\begin{cases} 3x-\ y=\ 5, \\ 6x-2y=10 \end{cases}$$

опять такова, что $ab_1-a_1b=3\cdot(-2)-6\cdot(-1)=0$.

Но эта система имеет бесконечное множество решений. Действительно, если $3x-y=5$, то $2(3x-y)=2\cdot5$, т. е.

$$6x-2y=10.$$

Поэтому всякое решение уравнения $3x-y=5$ будет одновременно и решением данной системы.

Но одно уравнение $3x-y=5$ имеет бесконечное множество решений. Следовательно, и данная система имеет бесконечное множество решений:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=-5, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=-8 \end{cases} \quad \text{и т. д.}$$

§ 6. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ, ЗАДАННОЙ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Чтобы решить систему

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases}$$

возьмем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2. \end{cases}\left|\begin{array}{l} \quad c_2 \\ -c_1 \end{array}\right.$$

Умножив обе части первого уравнения на c_2, а второго — на $-c_1$, получим в результате сложения одно уравнение с двумя неизвестными x и y:

$$(ac_2-a_2c_1)\,x+(b_1c_2-b_2c_1)\,y=d_1c_2-d_2c_1.$$

Теперь возьмем систему $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}\left|\begin{array}{l} \quad c_3 \\ -c_1 \end{array}\right.$

Умножив обе части первого уравнения на c_3, а второго — на $-c_1$, получим в результате сложения еще одно уравнение с теми же двумя неизвестными x и y:

$$(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1.$$

После всего этого нахождение x и y сведется к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=d_1c_2-d_2c_1,\\(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=d_1c_3-d_3c_1.\end{cases}$$

Найдя из этой системы значения x и y и подставив эти значения в одно из уравнений данной системы, например в уравнение $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$, найдем значение и третьего неизвестного z.

Пример. Решить систему:

а) $\begin{cases}3x+2y+z=28,\\2x+y+3z=31,\\4x+3y+2z=43;\end{cases}$

б) $\left.\begin{cases}3x+2y+z=28,\\2x+y+3z=31;\end{cases}\right|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}$

в) $7x+5y=53$

г) $\left.\begin{cases}3x+2y+z=28,\\4x+3y+2z=43;\end{cases}\right|\begin{matrix}2\\-1\end{matrix}$

$2x+y=13$

д) $\left.\begin{cases}7x+5y=53,\\2x+y=13;\end{cases}\right|\begin{matrix}-1\\5\end{matrix}\left|\begin{matrix}2\\-7\end{matrix}\right.$

е) $\begin{matrix}3x=12,\\3y=15,\\3\cdot4+2\cdot5+z=28.\end{matrix}\qquad\begin{cases}x=4,\\y=5,\\z=6.\end{cases}$

Итак, тройка чисел (4; 5; 6) есть решение данной системы.

Изложенный способ сложения применим и к системам четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, пяти уравнений с пятью неизвестными и т. д.

§ 7. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ УДОБНО ВЫПОЛНЯТЬ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ ПРИЕМОВ

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{b_1}{y}=c_1,\\[2mm]\dfrac{a_2}{x}+\dfrac{b_2}{y}=c_2.\end{cases}$$

Первый способ. Умножим обе части первого уравнения на b_2, а второго — на $-b_1$. Тогда получим:

$$\begin{cases}\dfrac{a_1b_2}{x}+\dfrac{b_1b_2}{y}=c_1b_2,\\[2mm]\dfrac{-a_2b_1}{x}-\dfrac{b_1b_2}{y}=-c_2b_1.\end{cases}$$

Сложив почленно последние два уравнения, получим уравнение с одним неизвестным x:

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{x} = c_1b_2 - c_2b_1.$$

Отсюда

$$x = \frac{a_1b_2 - a_2b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}.$$

Аналогично можно найти значение и неизвестного y.

Второй способ. Положив $\frac{1}{x} = u$ и $\frac{1}{y} = v$, получим:

$$\begin{cases} a_1u + b_1v = c_1, \\ a_2u + b_2v = c_2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} u = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ v = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1c_2 - a_2c_1}. \end{cases}$$

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+y-1} + \dfrac{1}{x-y+1} = 1, \\ \dfrac{5}{x+y-1} - \dfrac{3}{x-y+1} = 1. \end{cases}$$

Обозначив

$$\frac{1}{x+y-1} = u; \quad \frac{1}{x-y+1} = v,$$

получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ 5u - 3v = 1; \end{cases}$$

откуда $$u = \frac{1}{2}, \quad v = \frac{1}{2}$$

Значит, $$\frac{1}{x+y-1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{x-y+1} = \frac{1}{2},$$

или

$$\begin{cases} x+y-1=2, \\ x-y+1=2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Пример 3. Решить систему:

$$\begin{cases} y+z+u+v=a, \\ z+u+v+x=b, \\ u+v+x+y=c, \\ v+x+y+z=d, \\ x+y+z+u=e. \end{cases}$$

Сложив отдельно левые части всех пяти уравнений и отдельно правые части, получим:

$$4x+4y+4z+4u+4v=a+b+c+d+e,$$

или

$$x+y+z+u+v=\frac{a+b+c+d+e}{4}.$$

Сопоставляя это уравнение последовательно с каждым уравнением системы в отдельности, получим соответственно:

$$\begin{cases} x=\dfrac{a+b+c+d+e}{4}-a, \\ y=\dfrac{a+b+c+d+e}{4}-b, \\ z=\dfrac{a+b+c+d+e}{4}-c, \\ u=\dfrac{a+b+c+d+e}{4}-d, \\ v=\dfrac{a+b+c+d+e}{4}-e. \end{cases}$$

Итак, данная система пяти уравнений с пятью неизвестными имеет единственное решение.

Пример 4. Решить следующую систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}=\dfrac{x_3}{a_3}=\ldots=\dfrac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{x_n}{a_n}, \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=A. \end{cases}$$

Неизвестные здесь обозначены символами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

Чтобы легче понять, что данная система содержит n уравнений, перепишем ее в таком виде:

$$\begin{cases} \text{1-е уравнение} & \dfrac{x_1}{a_1}=\dfrac{x_2}{a_2}, \\ \text{2-е} \quad » \quad » & \dfrac{x_2}{a_2}=\dfrac{x_3}{a_3}, \\ \text{3-е} \quad » \quad » & \dfrac{x_3}{a_3}=\dfrac{x_4}{a_4}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ (n-1)\text{-е} \quad » \quad » & \dfrac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{x_n}{a_n}, \\ n\text{-е} \quad » \quad » & x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=A. \end{cases}$$

Решение. Применяя к ряду равных отношений

$$\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\frac{x_3}{a_3}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}$$

известное свойство (см. стр. 135), получим, что

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=\ldots=\frac{x_n}{a_n}.$$

Если теперь принять во внимание, что сумма $x_1+x_2+\ldots+x_n$ в силу последнего уравнения системы равна числу A, то получим n следующих уравнений:

$$\frac{A}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{x_1}{a_1},$$
$$\frac{A}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{x_2}{a_2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{A}{a_1+a_2+\ldots+a_n}=\frac{x_n}{a_n}.$$

Отсюда

$$x_1=\frac{Aa_1}{a_1+a_2+\ldots+a_n},$$
$$x_2=\frac{Aa_2}{a_1+a_2+\ldots+a_n},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n=\frac{Aa_n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

Пример 5. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y и z:

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ \dfrac{x-a}{m}=\dfrac{y-b}{n}=\dfrac{z-e}{p}. \end{cases}$$

Обозначив равные между собой отношения $\frac{x-a}{m}$; $\frac{y-b}{n}$; $\frac{z-c}{p}$ буквой t, получим:

$$x-a=mt; \qquad y-b=nt; \qquad z-c=pt,$$

или

$$x=a+mt; \qquad y=b+nt; \qquad z=c+pt.$$

Найденные выражения для x, y и z подставим в первое уравнение:

$$A(a+mt)+B(b+nt)+C(c+pt)+D=0.$$

Получилось одно уравнение с одним неизвестным t. Решив его, получим, что

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}$$

(предполагается, что $Am+Bn+Cp\neq 0$).
Значит,

$$x=a-m\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp},$$

$$y=b-n\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp},$$

$$z=c-p\frac{Aa+Bb+Cc+D}{Am+Bn+Cp}.$$

§ 8. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Условимся под символом

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

понимать выражение

$$a_1b_2-a_2b_1.$$

Примеры:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 13 & 5 \end{vmatrix}=7\cdot 5-13\cdot 2=35-26=9;$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -13 & 5 \end{vmatrix}=7\cdot 5-(-13)\cdot(-2)=9;$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 13 \cdot (-2) = 61;$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 7 \cdot 0 - 0 \cdot 2 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} = 7 \cdot 4 - 14 \cdot 2 = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & q \end{vmatrix} = 1 \cdot q - p \cdot 1 = q - p;$$

$$\begin{vmatrix} p+q; & p-q \\ p-q; & p+q \end{vmatrix} = (p+q)^2 - (p-q)^2 = 4pq.$$

Символ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

называется определителем 2-го порядка.

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются элементами определителя.

Решение системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

как известно (см. стр. 176), выражается формулами:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \\ y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \end{cases}$$

Эти формулы можно теперь записать с помощью определителей так:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{cases}$$

Знаменатель каждой из написанных дробей есть определитель $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 при неизвестных x и y. Этот определитель называется главным определителем системы уравнений.

Определитель же

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

получается из главного определителя заменой столбца коэффициентов при неизвестном x столбцом свободных членов, стоящих в правых частях уравнений.

Определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

получается из главного определителя заменой столбца $\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix}$ столбцом $\begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix}$.

Пример 1.

$$\begin{cases} 5x-3y=7, \\ 2x+y=5; \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{7\cdot 1-5(-3)}{5\cdot 1-2\cdot(-3)}=\frac{22}{11}=2,$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{11}{11}=1. \qquad \text{Отв.} \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Пример 2.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a-b}=a+b, \\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2a; \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a+b & \dfrac{1}{a-b} \\ 2a & \dfrac{1}{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{a+b} & \dfrac{1}{a-b} \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} \end{vmatrix}}=\frac{\dfrac{a+b}{b}-\dfrac{2a}{a-b}}{\dfrac{1}{b(a+b)}-\dfrac{1}{a(a-b)}}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)-2ab}{b(a-b)}:\frac{a(a-b)-b(a+b)}{ab(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2-b^2-2ab}{b(a-b)}:\frac{a^2-b^2-2ab}{ab(a+b)(a-b)}=a(a+b),$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & a+b\\ \frac{1}{a} & 2a\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b} & \frac{1}{a-b}\\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{2a}{a+b}-\frac{a+b}{a}}{\frac{1}{b(a+b)}-\frac{1}{a(a-b)}}=$$

$$=\frac{2a^2-(a+b)^2}{a(a+b)}:\frac{a(a-b)-b(a+b)}{ab(a+b)(a-b)}=$$

$$=\frac{a^2-2ab-b^2}{a(a+b)}:\frac{a^2-2ab-b^2}{ab(a+b)(a-b)}=b(a-b).$$

$$\text{Отв.}\ \begin{cases}x=a(a+b)\\ y=b(a-b).\end{cases}$$

§ 9. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Символ

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

называется определителем 3-го порядка.

Числа a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 называются элементами определителя.

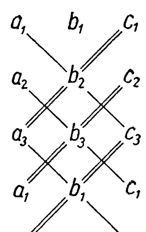


Рис. 36.

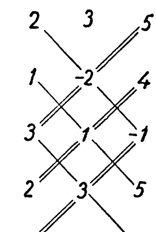


Рис. 37.

Под этим определителем понимается результат, полученный следующим образом. К имеющимся трем строкам подписываются снизу еще раз первые две строки так, как показано на рисунке 36. Затем перемножаются элементы по трем перечеркнутым одной линией диагоналям сверху вниз. После этого перемножаются элементы по перечеркнутым двумя линиями диагоналям снизу вверх и каждое из полученных последних трех произведений берется с противоположным знаком. Все полученные 6 результатов складываются и получается выражение:

$$a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2-a_3b_2c_1.$$

Пусть требуется вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Пользуясь схемой на рисунке 37, находим, что

$$[2\cdot(-2)\cdot(-1)+1\cdot1\cdot5+3\cdot3\cdot4]+[-1\cdot3\cdot(-1)-2\cdot1\cdot4-$$
$$-3\cdot(-2)\cdot5]=4+5+36+3-8+30=70.$$

Если решить систему

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1, \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2, \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3, \end{cases}$$

то можно убедиться в справедливости следующих формул:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Определитель, стоящий в знаменателях, называется **главным определителем системы**.

Имея систему

$$\begin{cases} 2x-y-z=7, \\ x+y-2z=2, \\ x-y-3z=-2, \end{cases}$$

получим

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 7 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{-21+2-4-6-14-2}{-6+1+2-3-4-(-1)}=\frac{-45}{-9}=5.$$

После этого дело сведется к решению такой, например, системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 5+y-2z=2, \\ 5-y-3z=-2. \end{cases}$$

Решив эту последнюю систему, найдем единственное решение данной системы с тремя неизвестными в следующем виде:

$$\begin{cases} x=5, \\ y=1, \\ z=2. \end{cases}$$

Определители очень полезны не только для решения систем линейных уравнений, но и при изучении очень многих других вопросов. Более подробно теория определителей излагается в курсах высшей алгебры.

УПРАЖНЕНИЯ

134. Ответить на вопросы:

а) Что называется решением системы двух уравнений с двумя неизвестными?

б) Что называется решением системы трех уравнений с тремя неизвестными?

135. Решить системы:

1) $\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7u+2v=4, \\ 11u-v=-2. \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=21, \\ \frac{x}{5}+\frac{y}{6}=18. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{4}=11, \\ \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8. \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2+\frac{5x+6y-3}{11}=\frac{2x+9y-2}{7}, \\ \frac{3y+5}{4}-\frac{x-6}{2}=5-\frac{2x-3y+11}{8}. \end{cases}$

Системы 6 и 7 решить с помощью определителей:

6) $\begin{cases} \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=1, \\ \frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}=\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}. \end{cases}$ Отв. $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a-b}{2}$.

7) $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}, \\ a\left(x-\frac{1}{b}\right)=b\left(y+\frac{1}{a}\right). \end{cases}$ Отв. $\frac{a+b}{ab}$, $\frac{a-b}{ab}$.

8) $\begin{cases} x+y=5, \\ x+z=12, \\ y+z=15, \end{cases}$ 9) $\begin{cases} 3x-y+4z=15, \\ x+3y+z=18, \\ 2x+y-3z=11. \end{cases}$

10) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=7, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=8. \end{cases}$ 11) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-2}{3}, \\ 2x+3y-2z=8. \end{cases}$

136. Доказать, что всякое нечетное число можно представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

137. Выражение $ab(2a+b)(a+2b)$ представить в виде разности квадратов двух целых выражений.

ГЛАВА XI

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Существуют задачи, решить которые без помощи уравнений либо трудно, либо чрезвычайно трудно, между тем как решать такие задачи с помощью уравнений бывает сравнительно легко.

Поясним сказанное, например, на следующей задаче.

Задача. Самолет должен был пролететь некоторое расстояние по расписанию со средней скоростью 400 *км* в час. Но по некоторым причинам он летел первую часть пути со скоростью 360 *км* в час, а вторую часть со скоростью 500 *км* в час и прибыл на место точно в назначенное время. Сколько всего километров пролетел самолет, если известно, что первая часть пути превышала вторую на 640 *км*?

Эту задачу можно решить без помощи уравнений несколькими различными арифметическими способами. Но каждый из этих арифметических способов будет довольно трудным, так как в каждом из них цепь рассуждений и действий, необходимых для решения задачи, придется придумывать путем значительно напряженных размышлений. Между тем алгебраический способ решения этой задачи, как мы увидим ниже, свободен от этих трудностей.

Для того чтобы учащийся мог сравнить арифметический способ с алгебраическим, мы приведем здесь один из арифметических способов решения поставленной выше задачи, а затем изложим и алгебраический способ.

Изучать арифметический способ нет необходимости. Достаточно убедиться лишь в том, что он труден и даже трудно понимаем.

Арифметический способ решения

1. Узнаем, сколько лишнего времени затрачивал самолет на каждом километре пути, пролетая его не по 400, а по 360 *км* в час?

$$\frac{1}{360}-\frac{1}{400}=\frac{1}{3600} \text{ (часа)}.$$

2. Определим, на сколько меньше времени затрачивал самолет на каждом километре пути, пролетая его не по 400, а по 500 *км* в час?

$$\frac{1}{400}-\frac{1}{500}=\frac{1}{2000} \text{ (часа)}.$$

3. Подсчитаем, сколько лишнего времени затратил самолет на расстояние 640 *км*, пролетев его не по 400, а по 360 *км* в час?

$$\frac{1}{3600}\cdot 640=\frac{8}{45} \text{ (часа)}.$$

4. Выясним, насколько меньше времени затрачивал самолет на двух километрах пути, пролетая его не со скоростью 400 *км* в час, а так, что один километр со скоростью 360 *км* в час, а другой со скоростью 500 *км* в час.

$$\frac{1}{2000}-\frac{1}{3600}=\frac{1}{4500} \text{ (часа)}.$$

5. Узнаем величину второй части пути. (Время, потерянное на 640 *км* пути, должно быть компенсировано временем, выигранным на остальной части пути.)

$$\frac{8}{45}:\frac{1}{4500}=800 \text{ (км)}.$$

Значит, все расстояние будет равно

$$(800+640)+800 \text{ (км)},$$

т. е. 2240 *км*.

Алгебраический способ решения

Допустим, что наша задача имеет решение *, т. е. имеет определенный ответ, имеющий смысл. Обозначим расстояние (в километрах), пройденное самолетом со скоростью 360 *км* в час, буквой x. Тогда расстояние, пройденное со скоростью 500 *км* в час, будет равно $(x-640)$ *км*.

Весь путь будет равен $(2x-640)$ *км*. Время, затраченное на прохождение первой части пути, будет равно $\frac{x}{360}$ часа. Время, затраченное на прохождение второй части пути, будет равно $\frac{x-640}{500}$ часа. Время, затраченное на весь путь, будет равно $\left(\frac{x}{360}+\frac{x-640}{500}\right)$ часа.

С другой стороны, то же самое время мы получим, деля путь $(2x-640)$ *км* на данную среднюю скорость 400 *км* в час.

* В § 2 настоящей главы показано, что не всякая задача обязательно имеет решение.

Таким образом, дробь $\frac{2x-640}{400}$ выражает так же время в часах, затраченное на весь путь.

Приравнивая друг другу два различных выражения одного и того же времени в часах, получим уравнение с неизвестным числом x:

$$\frac{2x-640}{400}=\frac{x}{360}+\frac{x-640}{500}.$$

На этом заканчивается первая часть решения задачи. Эта первая часть называется составлением уравнения по условиям задачи.

Вторая часть заключается в решении составленного уравнения.

После сокращения дроби, стоящей в левой части составленного уравнения, получим:

$$\frac{x-320}{200}=\frac{x}{360}+\frac{x-640}{500}.$$

Умножив обе части этого уравнения на 9000, т. е. на общее наименьшее кратное всех знаменателей, получим:

$$45(x-320)=25x+18(x-640), \text{ или}$$
$$45x-14400=25x+18x-11520, \text{ или}$$
$$2x=2880.$$

Отсюда $x=1440$.

Значит, первая часть пути равна 1440 *км*, вторая 800 *км*, а весь путь 2240 *км*.

Этими изложенными двумя частями не исчерпывается процесс решения задачи. Необходима еще и третья часть. В третьей части производится исследование того, удовлетворяет ли найденное решение уравнения всем условиям задачи. Сделаем проверку.

На первую часть пути самолет потратил $\frac{1440}{360}$ часа, т. е. 4 часа. На вторую $\frac{800}{500}$ часа, т. е. 1,6 часа. На весь путь самолет потратил 5,6 часа. Средняя скорость получается равной $\frac{2240}{5,6}$ *км* в час, т. е. 400 *км* в час, что совпадает с условием задачи. Следовательно, корень уравнения, составленного по условиям задачи, оказался в данном случае вместе с тем и решением самой задачи.

На первый взгляд может показаться излишним подобная проверка. В действительности же она необходима. В самом деле, обратимся, например, к задаче о железном листе, помещенной в самом начале главы VIII. Там мы, исходя из условий задачи, составили уравнение

$$(70-2x)(80-2x)x=30000.$$

Оказалось, что это уравнение имеет три корня: 10, 15 и 50. Обращаясь к условиям задачи, мы видели, что последний корень, равный 50, условиям задачи совершенно не удовлетворяет и поэтому не является решением самой задачи. Действительно, из листа 70 *см* $\times$ 80 *см* никак нельзя вырезать четыре квадрата со сторонами 50 *см*.

На этом примере с железным листом показано, что решение уравнения, составленного по условиям задачи, не всегда является решением и самой задачи. Итак, можно сделать следующий общий вывод:

Всякое решение задачи будет обязательно корнем уравнения, составленного по условиям этой задачи, но не всякий корень составленного уравнения обязательно должен оказываться решением самой задачи.

Теперь сравним между собой изложенные выше арифметический и алгебраический способы решения задачи о движении самолета.

Арифметический способ нельзя не признать трудным, так как там цепь рассуждений и действий, необходимых для решения задачи, приходится придумывать действительно довольно искусственно. Алгебраический же способ, как мы видели, свободен от таких трудностей; уравнение составляется совершенно естественным ходом рассуждений и решается без каких-либо искусственных комбинаций.

В начале параграфа было сказано, что существуют и такие задачи, которые решить без помощи уравнений чрезвычайно трудно. Примером таких задач может служить, скажем, следующая задача.

Имеется квадратный железный лист со стороной 60 *см*. По углам этого листа надо вырезать одинаковые квадраты и образовавшиеся края загнуть так, чтобы получилась открытая сверху коробка. Спрашивается, какова должна быть сторона каждого вырезанного квадрата, чтобы объем коробки оказался равным 10 000 *куб. см*?

Точное решение этой задачи без помощи уравнения найти было бы чрезвычайно трудно.

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Чтобы решить задачу при помощи одного уравнения с одним неизвестным, надо:

1. Выбрав одно из неизвестных (искомых) чисел задачи и обозначив его, например, буквой x, составить по условиям задачи уравнение с выбранным неизвестным.
2. Решить это уравнение.
3. Исследовать, удовлетворяет ли каждое из полученных решений уравнения всем условиям данной задачи.

Поясним сказанное на двух следующих задачах *.

Задача 1. Веревку длиной в 25 *м* надо разрезать на 4 части так, чтобы вторая часть оказалась вдвое длиннее первой, третья на 1 *м* короче первой и четвертая на 1 *м* короче второй. Каковы должны быть длины каждой из четырех частей?

Обозначим длину первой части в метрах буквой x. Тогда длина второй части будет $2x$ *м*, третьей $(x-1)$ *м* и четвертой $(2x-1)$ *м*. Значит, сумма длин всех четырех частей в метрах будет

$$x+2x+(x-1)+(2x-1).$$

По условию задачи эта сумма равна 25 *м*. Поэтому

$$x+2x+(x-1)+(2x-1)=25.$$

Уравнение составлено. Решим его.

$$x+2x+x-1+2x-1=25,$$

$$6x-2=25, \qquad 6x=27,$$

$$2x=9, \qquad x=4\frac{1}{2},$$

т. е. длина первой части равна $4\frac{1}{2}$ *м*. Значит, длина второй части равна 9 *м*, третьей $3\frac{1}{2}$ *м* и четвертой 8 *м*. Сумма чисел $4\frac{1}{2}$; 9; $3\frac{1}{2}$ и 8 действительно равна 25. Найденное решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Задача 2. В четырех квартирах живет 25 человек. Во второй квартире людей вдвое больше, чем в первой, в третьей на одного человека меньше, чем в первой, а в четвертой на одного человека меньше, чем во второй. Сколько человек живет в каждой квартире?

Обозначим буквой x число жильцов первой квартиры. Тогда число жильцов второй квартиры будет $2x$, третьей $x-1$ и четвертой $2x-1$.

По условию задачи

$$x+2x+(x-1)+(2x-1)=25.$$

Решив это уравнение, получим:

$$x=4\frac{1}{2}.$$

В данном случае решение уравнения не является решением самой задачи, так как бессмысленно сказать, что в квартире живет

---

* Примеры на составление уравнений и указания, относящиеся к вопросу составления уравнений, изложены дополнительно еще и в последнем параграфе настоящей главы.

$4\frac{1}{2}$ человека. Данная задача не имеет решения. Отсутствие решения этой задачи обнаруживает то, что такого размещения людей по квартирам, которое указано в условии задачи, в действительности быть не может.

Примечание. Эту задачу, так же как и предыдущую, можно было решать и иначе, приняв за неизвестное, скажем, в первой задаче длину третьей части веревки, а во второй — число жильцов третьей квартиры.

§ 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Встречаются задачи, в которых требуется определить несколько неизвестных величин. Такие задачи в одних случаях могут решаться при помощи одного уравнения с одним неизвестным (как мы это уже видели на задачах, решенных в предыдущем параграфе). В других же случаях подобные задачи решать с помощью только одного уравнения невыгодно (затруднительно). В таких случаях прибегают к составлению двух уравнений с двумя или трех уравнений с тремя неизвестными и т. д. Поясним сказанное на примере.

Задача. Расстояние между пунктами A и B равно 408 *км*. Из пункта A движется пароход по направлению к B, а из пункта B яхта по направлению к A. Когда пароход начинает свое движение на 2 часа раньше, чем яхта, то их встреча происходит через 7 часов после начала движения яхты. Когда же яхта начинает свое движение на 2 часа раньше, чем пароход, то встреча происходит через 8 часов после начала движения парохода. Найти скорости парохода и яхты, считая эти скорости постоянными.

Эту задачу удобнее решать при помощи системы двух уравнений с двумя неизвестными. Обозначим скорость парохода, выраженную в километрах в час, буквой x, а скорость яхты, также в километрах в час, буквой y. Тогда согласно условиям задачи получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x+7(x+y)=408, \\ 2y+8(x+y)=408. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$x=36 \text{ и } y=12,$$

т. е. скорость парохода 36 *км* в час и скорость яхты 12 *км* в час.

Легко убедиться, что найденное решение системы уравнений удовлетворяет всем условиям задачи. Эту задачу можно было бы решить и при помощи только одного уравнения. Однако такой путь содержал бы в себе излишние трудности.

§ 4. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Задача 1. Сплав из золота и серебра весом 13,85 *кг* при погружении в воду весит на 0,9 *кг* меньше. Определить количество золота и серебра в этом сплаве, если известно, что удельный вес золота равен 19,3, а серебра — 10,5*.

Составим по условиям этой задачи одно уравнение с одним неизвестным. Обозначим вес (в килограммах) золота, содержащегося в сплаве, буквой x. Тогда вес серебра, содержащегося в сплаве, будет равен $(13{,}85 - x)$ *кг*. При погружении твердого тела в воду его вес уменьшается на столько, сколько весит вытесненная им вода. Удельный вес золота равен 19,3. Поэтому при погружении в воду кусок золота «потеряет» $\frac{1}{19{,}3}$ часть своего веса, а следовательно, 1 *кг* золота «потеряет» в воде $\frac{1}{19{,}3}$ *кг*, а x *кг* «потеряют» $\frac{x}{19{,}3}$ *кг*.

Аналогично $(13{,}85 - x)$ *кг* серебра «потеряют» $\dfrac{13\frac{17}{20} - x}{10{,}5}$ *кг*. Значит, вес сплава «уменьшится» на

$$\left(\frac{x}{19{,}3} + \frac{13{,}85 - x}{10{,}5}\right) \text{ кг}.$$

Но по условию задачи сплав «теряет» $\frac{9}{10}$ *кг*. Поэтому

$$\frac{x}{19{,}3} + \frac{13{,}85 - x}{10{,}5} = \frac{9}{10}.$$

Уравнение составлено. Решим его.

$$\frac{10x}{193} + \frac{(13{,}85 - x)\,10}{105} = \frac{9}{10}, \quad \frac{10x}{193} - \frac{10x}{105} + \frac{13{,}85 \cdot 10}{105} = \frac{9}{10},$$

$$\frac{10x}{193} - \frac{2x}{21} + \frac{13{,}85 \cdot 2}{21} = \frac{9}{10}, \quad \frac{210x - 386x}{193 \cdot 21} + \frac{277}{210} = \frac{9}{10},$$

$$\frac{-176x}{193 \cdot 21} = \frac{9}{10} - \frac{277}{210}, \quad \frac{176x}{193 \cdot 21} = \frac{88}{210},$$

$$x = \frac{193 \cdot 21 \cdot 88}{210 \cdot 176} = 9{,}65.$$

Значит в сплаве содержится 9,65 *кг* золота. Вычтя из веса сплава вес золота, найдем вес серебра (4,2 *кг*).

Легко убедиться, что найденное решение уравнения удовлетворяет всем условиям задачи.

---

* Удельным весом называется отношение веса тела к весу чистой воды в том же объеме при 4° С. (При таком определении удельный вес есть отвлеченное число.) Когда мы говорим, что удельный вес золота равен 19,3, то это значит, что кусок золота в 19,3 раза тяжелее воды, взятой в том же объеме. Один *куб. см* воды при 4° С весит 1 *г*. Поэтому 1 *куб. см* золота весит 19,3 *г*. Один *куб. дм* золота весит 19,3 *кг*. Один *куб. м* золота весит 19,3 *т*.

Эту же задачу можно было бы решить несколько изящнее путем составления системы двух уравнений с двумя неизвестными. Примем вес золота, содержащегося в сплаве, равным x *кг*, а вес серебра y *кг*. Тогда согласно условиям задачи получим

$$\begin{cases} x+y=13{,}85, \\ \frac{x}{19{,}3}+\frac{y}{10{,}5}=0{,}9. \end{cases}$$

Задача 2. Если колхоз увеличит численность наличия лошадей на 20 голов, то запаса сена на прокормление лошадей хватит на 40 дней меньше, а если уменьшится на 20 голов, то этого запаса хватит на 60 дней больше предусмотренного срока. Определить, сколько было в колхозе лошадей и на сколько дней был рассчитан запас сена. (Ежедневная норма выдачи сена каждой лошади предполагается неизменной.)

Пусть в колхозе было x лошадей, а запас сена на прокормление этих лошадей был рассчитан на y дней. Тогда каждое из следующих трех произведений:

$$xy; \quad (x+20)(y-40); \quad (x-20)(y+60)$$

будет выражать запас сена в нормах.

Имея эти три произведения, выражающие собой одну и ту же величину в одной и той же единице измерения, можно составить систему двух уравнений:

$$\begin{cases} (x+20)\ (y-40)=xy, \\ (x-20)\ (y+60)=xy, \end{cases}$$

которая после упрощения принимает вид:

$$\begin{cases} -40x+20y=800, \\ 60x-20y=1200. \end{cases}$$

Складывая, получим:

$$20x=2000,$$

откуда

$$x=100.$$

Зная, что $x=100$, из уравнения $-40x+20y=800$ получим:

$$y=240.$$

Итак, сено было запасено для 100 лошадей на 240 дней.

Решение системы удовлетворяет всем условиям задачи.

Задача 3. Трехтонка и пятитонка, работая одновременно, могли бы перевезти имеющийся груз в назначенное место за 24 часа. После того как они вместе проработали 15 час., трехтонка стала на ремонт, а весь оставшийся груз перевезла одна пятитонка, проработав еще 15 час. Узнать, за сколько часов могла бы каждая машина в отдельности перевезти весь этот груз?

Пусть трехтонка могла бы перевезти весь груз за x час., а пятитонка — за y час. Введем в рассмотрение производительность каждой машины, приняв весь груз за единицу.

За 1 час трехтонка может перевезти $\frac{1}{x}$ часть всего груза, а пятитонка $\frac{1}{y}$ часть. Таким образом, за один час совместной работы обе машины могут перевезти

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) \text{ часть всего груза.}$$

С другой стороны, из условия задачи следует, что обе машины за 1 час могут перевезти $\frac{1}{24}$ часть всего груза. Поэтому получается первое уравнение:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}.$$

Обе машины за 15 час. перевезли $\frac{15}{24}$ или $\frac{5}{8}$ всего груза. По условию задачи оставшиеся $\frac{3}{8}$ груза пятитонка перевезла за 15 час. Поэтому

$$\frac{15}{y}=\frac{3}{8}.$$

Получилось второе уравнение. Итак, получилась система:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{24}, \\ \frac{15}{y}=\frac{3}{8}. \end{cases}$$

Из второго уравнения сразу находим, что

$$y=\frac{15\cdot 8}{3}, \text{ т. е. } y=40.$$

Неизвестное x найдем из уравнения $\frac{1}{x}+\frac{1}{40}=\frac{1}{24}$.

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{24}-\frac{1}{40}, \quad \frac{1}{x}=\frac{40-24}{24\cdot 40},$$

$$\frac{1}{x}=\frac{16}{24\cdot 40}, \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{60},$$

откуда

$$x=60.$$

Итак, одна трехтонка могла бы перевезти весь груз за 60 час., а пятитонка — за 40 час.

Приведем еще одну задачу на составление системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Задача 4. Дорога из города A в город B сначала подымается в гору на протяжении 3 *км*, потом идет по ровному месту на протяжении 5 *км*, после спускается под гору на протяжении 6 *км* (рис. 38).

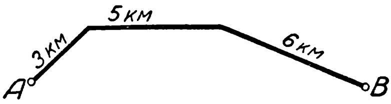


Рис. 38.

Посыльный, уйдя из A в B и пройдя полпути, обнаружил, что забыл взять один пакет. Он вернулся обратно, потеряв напрасно 3 часа 36 мин. Выйдя из A вторично, он прошел весь путь до B за 3 часа 27 мин. и обратный путь из B в A — за 3 часа 51 мин. С какой скоростью шел посыльный в гору, по ровному месту и под гору, если считать каждую из этих скоростей постоянной.

Пусть скорость при движении в гору x *км* в час, по ровному месту y *км* в час и под гору z *км* в час.

По условиям задачи получим следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{y}+\frac{3}{z}=3\frac{3}{5}, \\ \frac{3}{x}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=3\frac{9}{20}, \\ \frac{6}{x}+\frac{5}{y}+\frac{3}{z}=3\frac{17}{20}. \end{cases}$$

Примечание. Левые части уравнений выражают время в часах; поэтому и в правых частях время выражено также в часах.

Чтобы решить эту систему, сначала, исходя из нее, образуем систему двух уравнений с двумя неизвестными.

1. Вычтем из левой части первого уравнения левую часть второго и из правой части правую. Тогда получим:

$$\frac{3}{y}-\frac{3}{z}=\frac{3}{20}.$$

Умножим левую и правую части второго уравнения на 2, а левую и правую части третьего уравнения на —1. Тогда получим:

$$\frac{6}{x}+\frac{10}{y}+\frac{12}{z}=6\frac{18}{20},$$

$$-\frac{6}{x}+\frac{5}{y}-\frac{3}{z}=-3\frac{17}{20}.$$

Складывая, найдем, что

$$\frac{5}{y}+\frac{9}{z}=3\frac{1}{20}.$$

Итак, получили систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{y}-\dfrac{3}{z}=\dfrac{3}{20}, \\ \dfrac{5}{y}+\dfrac{9}{z}=3\dfrac{1}{20}. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $y=4$ и $z=5$.

Теперь, воспользовавшись одним из уравнений первоначальной системы, например уравнением

$$\frac{3}{x}+\frac{8}{y}+\frac{3}{z}=3\frac{3}{5},$$

найдем, что

$$x=3.$$

Составление буквенных уравнений

Задача 5. Сплав из двух различных металлов весом q *кг* при погружении в воду потерял в весе h *кг*. Определить количество каждого металла в этом сплаве, если известно, что удельный вес первого металла равен d_1, а второго d_2.

Поступая так же, как и в задаче 1, получим либо одно уравнение

$$\frac{x}{d_1}+\frac{q-x}{d_2}=h,$$

либо систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=q, \\ \dfrac{x}{d_1}+\dfrac{y}{d_2}=h, \end{cases}$$

$$\text{Отв.} \begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} q & 1 \\ h & \dfrac{1}{d_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{d_1} & \dfrac{1}{d_2} \end{vmatrix}}=\dfrac{d_1q-d_1d_2h}{d_1-d_2}, \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & q \\ \dfrac{1}{d_1} & h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{d_1} & \dfrac{1}{d_2} \end{vmatrix}}=\dfrac{d_1d_2h-d_2q}{d_1-d_2}. \end{cases}$$

Задача 6. Если колхоз увеличит количество имеющихся лошадей на a голов, то запаса сена на прокормление лошадей хватит на m дней меньше, а если уменьшит на b голов, то хватит на n дней больше планового срока. Определить, сколько было в колхозе лошадей и на сколько дней был рассчитан запас сена. (Ежедневная норма выдачи сена каждой лошади предполагается неизменной.)

Поступая так же, как и в задаче 2, получим систему:

$$\begin{cases} (x-a)(y+m)=xy, \\ (x+b)(y-n)=xy. \end{cases}$$

Эта система приводится к виду

$$\begin{cases} mx-ay=am, \\ -nx+by=bn; \end{cases} \qquad \text{Отв. } \begin{cases} x=\dfrac{abm+abn}{mb-an}, \\ y=\dfrac{bmn+amn}{mb-an}. \end{cases}$$

Задача 7. Трехтонка и пятитонка, работая одновременно, могли бы перевезти имеющийся груз в назначенное место за h час. После того как они вместе проработали a час., трехтонка стала на ремонт, а весь оставшийся груз перевезла одна пятитонка, проработав еще b час. Узнать, за сколько часов могла бы каждая машина в отдельности перевезти весь этот груз.

Поступая так же, как и в задаче 3, получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{h}, \\ \dfrac{b}{y}=1-\dfrac{a}{h}. \end{cases}$$

Некоторые указания к вопросу о составлении уравнений

1. При равномерном движении пройденный путь s, скорость v и время t связаны соотношением

$$s=v\cdot t, \quad \text{или} \quad \frac{s}{v}=t, \quad \text{или} \quad \frac{s}{t}=v.$$

Вес q какого-либо тела, его объем v и удельный вес d связаны соотношением

$$q=vd, \quad \text{или} \quad \frac{q}{v}=d, \quad \text{или} \quad \frac{q}{d}=v.$$

Стоимость p товара, его количество m и цена c связаны соотношением

$$p=mc, \quad \text{или} \quad \frac{p}{m}=c, \quad \text{или} \quad \frac{p}{c}=m \quad \text{и т. д.}$$

Разумеется, что все указанные выше соотношения будут верными лишь в том случае, когда величины, входящие в каждое соотношение, выражены в единицах, надлежащим образом согласованных. Например, если объем v выражен в кубических сантиметрах, то вес q следует считать выраженным в граммах. Если же объем выражен в кубических дециметрах, то вес следует считать выраженным в килограммах. Если объем в кубических метрах, то вес в тоннах. Если цена c выражена в рублях за метр, а количество товара m в метрах, то стоимость товара p следует считать в рублях.

При составлении уравнения необходимо, чтобы левая и правая части уравнения выражали величину в одних и тех же единицах. При этом в самом написанном уравнении единицы измерения никогда указывать не следует.

2. Обратим внимание еще и на то, что процесс составления уравнения имеет некоторое сходство с процессом проверки ответа задачи. Поясним сказанное на примере.

Задача. В первом и втором домах всего 1654 окна. Во втором доме на 138 окон больше, чем в первом. Сколько окон в первом доме?

Пусть нам сообщили, что ответом этой задачи является число 758, и предложили проверить этот ответ, не решая самой задачи. Сопоставим эту проверку с процессом составления уравнения.

Процесс проверки ответа	Процесс составления уравнения
Пусть в первом доме 758 окон. Тогда во втором доме должно быть $(758 + 138)$ окон. По условию задачи в обоих домах всего 1654 окна. Поэтому должно быть $758 + (758 + 138) = 1654$. Если последнее равенство окажется верным, то данный нам ответ 758 следует считать верным. Если же последнее равенство окажется неверным, то данный ответ следует считать неправильным.	Пусть в первом доме x окон. Тогда во втором доме должно быть $(x + 138)$ окон. По условию задачи в обоих домах всего 1654 окна. Поэтому должно быть $x + (x + 138) = 1654$. Ответом задачи должно быть такое значение буквы x, при котором последнее равенство становится верным. Те же значения буквы x, при которых последнее равенство оказывается неверным, не могут быть ответом задачи.

При составлении уравнения под буквой x мы всегда подразумевали как бы известное число, как бы уже известный ответ задачи.

После же того, как уравнение оказалось составленным, буква x превращалась в неизвестное, подлежащее определению из этого уравнения.

УПРАЖНЕНИЯ

138. Главный насос вместе с запасным наполняют камеру шлюза за 8 мин. Один же запасной может наполнить камеру за 20 мин. Определить емкость камеры, если известно, что главный насос подает воды за 1 мин. на 600 *куб. м* больше, чем запасной.

139. Из пункта A на север вылетел транспортный самолет с путевой скоростью 720 *км* в час. Через 10 мин. из пункта B, расположенного в 200 *км* к югу от пункта A, вылетел на север самолет сопровождения со скоростью 1080 *км* в час. Через сколько часов после вылета транспортного самолета самолет сопровождения опередит его на 70 *км*.

140. В одной краске вес кармина и сурика относятся, как $7:3$, а в другой, — как $3:2$. Сколько килограммов каждой краски надо взять (и смешать), чтобы получить 40 *кг* новой краски, в которой вес кармина и сурика относились бы, как $5:3$?

141*. Через сколько минут после полуночи часовая и минутная стрелки часов окажутся первый раз взаимно перпендикулярными?

142. Пароход должен был пройти некоторое расстояние со скоростью 16 *км* в час. Но по некоторым причинам он шел первую половину пути со скоростью, на 2 *км* в час меньшей, а вторую половину пути со скоростью, на 2 *км* в час большей, чем ему полагалось. Вследствие этого пароход опоздал к месту назначения на 30 мин. Узнать расстояние, пройденное пароходом.

143. Имеется три трактора различной мощности. Данный участок земли могут вспахать, работая совместно, второй и третий тракторы за a час., первый и третий — за b час. и, наконец, первый и второй — за c час. За сколько часов может вспахать этот участок каждый трактор в отдельности?

ГЛАВА XII

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ И НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ОТРЕЗКИ

§ 1. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Определение. ***Арифметическим квадратным корнем из положительного числа a называется такое положительное число x, квадрат которого равен a.***

Например, арифметическим квадратным корнем из 49 будет число 7, так как $7^2=49$. Квадратный корень из единицы равен единице.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначается символом $\sqrt{a}$.

Примеры:

$$\sqrt{25}=5;\quad \sqrt{169}=13;\quad \sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4};$$
$$\sqrt{0{,}04}=0{,}2;\quad \sqrt{1}=1 \text{ и т. д.}$$

По определению из равенства $\sqrt{a}=x$ следует, что

$$x^2=a.$$

Извлечение квадратного корня является действием, обратным возведению в квадрат.

Квадратный корень из 0 равен 0.

В дальнейшем (см. гл. XXX) рассматриваются квадратные и другие корни в более расширенном (алгебраическом) смысле.

Извлечение арифметического квадратного корня из многозначных натуральных чисел, представляющих собой точные квадраты*

Прежде всего обратим внимание на следующую таблицу:

Если $1<x<100$, то $1<\sqrt{x}<10$.

---

* Натуральное число называется точным квадратом, если оно является квадратом также натурального числа. Например, число 1225 есть точный квадрат, так как $1225=35^2$.

Если $100 < x < 10000$, то $10 < \sqrt{x} < 100$.

Если $10000 < x < 1000000$, то $100 < \sqrt{x} < 1000$

и т. д.

Из этой таблицы можно сделать следующее заключение.

Если натуральное число, представляющее точный квадрат, выражается с помощью одной или двух цифр, то квадратный корень из него будет выражаться одной цифрой.

Например:

$$\sqrt{9} = 3; \quad \sqrt{64} = 8.$$

Если число выражается с помощью трех или четырех цифр, то квадратный корень из него будет число двузначное.

Например:

$$\sqrt{169} = 13;$$

$$\sqrt{361} = 19; \quad \sqrt{1849} = 43;$$

$$\sqrt{9801} = 99.$$

Если число выражается с помощью пяти или шести цифр, то квадратный корень из него будет число трехзначное и т. д.

Например:

$$\sqrt{64516} = 254; \quad \sqrt{94249} = 307; \quad \sqrt{133225} = 365.$$

Вывод правила извлечения квадратного корня из натурального числа, представляющего точный квадрат

Предполагая, что число 7569 есть точный квадрат, мы можем утверждать, что $\sqrt{7569}$ будет числом двузначным. Обозначим число десятков этого двузначного числа буквой x, а число единиц — буквой y.

Тогда

$$\sqrt{7569} = 10x + y.$$

По определению корня получим:

$$7569 = (10x + y)^2,$$

или

$$7569 = 100x^2 + 2 \cdot 10xy + y^2.$$

Целых сотен содержится в левой части 75, а в правой либо x^2, либо больше. Поэтому

$$75 \geqslant x^2.$$

Значит, x^2 есть точный квадрат, содержащийся в числе 75. Но таких квадратов есть несколько, а именно: 64, 49, 36 и т. д.

Докажем, что за x^2 надо брать наибольший из этих квадратов. В самом деле, если бы мы взяли за x^2, например, 49, то искомый корень содержал бы 7 десятков и несколько единиц и, будучи возведен в квадрат, дал бы число, меньшее 6400, т. е. меньшее точного квадрата, заключающегося в числе 7569.

Таким образом, число десятков искомого корня равно квадратному корню из наибольшего точного квадрата, заключающегося в числе сотен данного числа 7569.

Итак, $x=8$.

Теперь равенство

$$7569=100x^2+2\cdot 10xy+y^2$$

примет вид:

$$7569=6400+2\cdot 10\cdot 8y+y^2,$$

или

$$1169=2\cdot 10\cdot 8y+y^2.$$

В левой части 116 десятков, а в правой либо $16y$, либо больше, чем $16y$. Поэтому

$$116\geqslant 16y,$$

или

$$y\leqslant\frac{116}{16},$$

или

$$y\leqslant 7.$$

Значит, y равен или 7, или 6, или 5 и т. д.

Чтобы узнать настоящее значение y, придется последовательно испытать каждое из этих возможных значений, начиная с наибольшей цифры 7. В данном примере это испытание показывает, что надо взять $y=7$. Действительно, выражение $2\cdot 10\cdot 8y+y^2$ при $y=7$ оказывается в точности равным числу 1169.

Если бы значение выражения $2\cdot 10\cdot 8y+y^2$ при $y=7$ оказалось больше, чем 1169, то следовало бы испытывать цифру 6 и т. д.

Итак, $\sqrt{7569}=87$.

Правило. ***Чтобы извлечь квадратный корень из многозначного целого числа, разбивают его справа налево на грани по две цифры в каждой. В последней грани может оказаться либо одна, либо две цифры.***

Чтобы найти первую цифру корня, извлекают квадратный корень из наибольшего точного квадрата, содержащегося в первой грани слева. Чтобы найти вторую цифру корня, из первой грани вычитают квадрат первой цифры корня и к остатку приписывают следующую грань. После этого число десятков получившегося остатка

делят на удвоенную первую цифру корня; полученное целое число подвергают испытанию. Следующие цифры корня находят по такому же приему.

Пример 1. Найти $\sqrt{65593801}$.

1-й шаг. Число, стоящее под знаком корня, разбиваем на грани по две цифры справа налево:

$$\sqrt{65'59'38'01}.$$

2-й шаг. Извлекаем квадратный корень из наибольшего точного квадрата, содержащегося в первой грани слева.

$$\sqrt{65'59'38'01}=8.$$

3-й шаг.

$$\begin{array}{l} \sqrt{65'59'38'01}=8 \\ \;\underline{64} \\ \;\;159 \end{array}$$

(Число 159 назовем первым остатком.)

4-й шаг.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{65'59'38'01}=8. \\ & \;\underline{64} \\ 16 & |\,159 \end{array}$$

(Число 16 есть удвоенная найденная цифра 8.)

5-й шаг. Делим число десятков первого остатка на 16. Получаем в целой части нуль. Эту цифру нуль приписываем к числу 16 и умножаем 160 на нуль. Найденную цифру нуль записываем также справа рядом с цифрой 8.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{65'59'38'01}=80. \\ & \;64 \\ \hline 160 & |\,15'9 \\ \times 0 & |\,000 \\ \hline & \;1593'8 \end{array}$$

(Число 15 938 назовем вторым остатком.)

6-й шаг. Делим число десятков второго остатка на 160, т. е. на удвоенное найденное уже число 80. Получаем в целой части цифру 9. Эту цифру 9 записываем справа рядом с цифрами 8 и 0.

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{65'59'38'01}=809. \\ & \;64 \\ \hline 160 & |\,159 \\ \times 0 & |\,000 \\ \hline 1609 & |\,1593'8 \\ \times 9 & |\,1448\,1 \\ \hline & |\;145\,70'1 \end{array}$$

7-й шаг.

$$\sqrt{65'59'38'01} = 8099.$$

$$\begin{array}{r|l} & 64 \\ \hline 160 & 1\,59 \\ \times 0 & 0\,00 \\ \hline 1609 & 1\,59\,3'8 \\ \times 9 & 1\,44\,8\,1 \\ \hline 16189 & 14\,57\,0'1 \\ \times 9 & 14\,57\,01 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Пример 2 (без пояснений).

$$\sqrt{6'80'68'81} = 2609.$$

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 46 & 2\,80 \\ \times 6 & 2\,76 \\ \hline 520 & 4\,6'8 \\ \times 0 & 0\,0\,0 \\ \hline 5209 & 4\,6\,8\,8'1 \\ \times 9 & 4\,6\,8\,8\,1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Пример 3 (без пояснений).

$$\sqrt{1'38'76'84} = 1178.$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 21 & 0\,38 \\ \times 1 & \,21 \\ \hline 227 & 17\,76 \\ \times 7 & 15\,89 \\ \hline 2348 & 1\,87\,84 \\ \times 8 & 1\,87\,84 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Извлечение квадратного корня с точностью до 1 из многозначных чисел, не являющихся точными квадратами

Эту операцию поясним на примерах.

Пример 1.

$$\sqrt{3'81} = 19.$$

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline 29 & 28'1 \\ \times 9 & 261 \\ \hline & 20 \end{array}$$

Очевидно, что $19^2 < 381$, а $20^2 > 381$. Поэтому число 19 есть приближенное значение с точностью до 1 с недостатком, а 20 — с избытком. Очевидно, что $381 = 19^2 + 20$.

Пример 2.

$$\sqrt{5'1\,8'2\,3} = 227.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4 \\
\hline
42 & 1\,1'8 \\
\times 2 & \,8\,4 \\
\hline
447 & 3\,4\,2'3 \\
\times 7 & 3\,1\,2\,9 \\
\hline
 & \,2\,9\,4
\end{array}$$

Число 227 есть приближенное значение с точностью до 1 с недостатком, а 228 — с избытком, так как

$$227^2 < 51823; \quad 228^2 > 51823;$$

$$51823 = 227^2 + 294.$$

Извлечение квадратного корня из целых чисел с произвольно заданной точностью

Эту операцию поясним опять же на примерах.

1) Найти приближенное значение $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{40}$.

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40^2}{40^2}} = \sqrt{\frac{3200}{40^2}} = \frac{\sqrt{3200}}{40}.^{*}$$

Найдем сначала $\sqrt{3200}$ с точностью до 1.

$$\sqrt{32'00} = 56.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 25 \\
\hline
106 & 70'0 \\
\times 6 & 636 \\
\hline
 & 64
\end{array}$$

Легко понять, что значение $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{40}$ будет: с недостатком $\frac{56}{40}$, а с избытком $\frac{57}{40}$.

1) Найти приближенное значение $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{100}$.

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100^2}{100^2}} = \frac{\sqrt{20000}}{100}.$$

---

* См. стр. 239 «Другие действия».

Найдем сначала $\sqrt{20000}$ с точностью до единицы:

$$\sqrt{2'0\,0'0\,0} = 141.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
24 & 1\,0'0 \\
\times 4 & \;\;9\,6 \\ \hline
281 & 4\,0'0 \\
\times 1 & 2\,8\,1 \\ \hline
 & 1\,1\,9
\end{array}$$

Значение $\sqrt{2}$ с точностью до $\frac{1}{100}$ будет с недостатком $\frac{141}{100}$, а с избытком $\frac{142}{100}$.

При извлечении квадратного корня с точностью до $\frac{1}{10^n}$ вычисления можно располагать так:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142\ \ldots$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
24 & 10'0 \\
\times 4 & \;\;96 \\ \hline
281 & 40'0 \\
\times 1 & 28\,1 \\ \hline
2824 & 11\,900 \\
\times\ 4 & 11\,296 \\ \hline
28282 & 6040'0 \\
\times 2 & 5656\,4 \\ \hline
 & 383\,6
\end{array}$$

Здесь каждый раз мы приписывали к остатку два нуля. Иначе говоря, мы предварительно представляли $\sqrt{2}$ в форме

$$\sqrt{2{,}000000\ldots},$$

где после запятой поставлено четное число нулей.

Если в десятичной дроби после запятой имеется нечетное число десятичных знаков, то следует приписать еще один десятичный знак, равный нулю, и лишь после этого разбивать подкоренное число на грани.

Примеры:

$$\sqrt{257{,}257} = \sqrt{2'5\,7{,}2\,5'7\,0} = 16{,}03.$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
26 & 1\,5'7 \\
\times 6 & 1\,5\,6 \\ \hline
320 & 1\,2'5 \\
\times\ 0 & 0\,0\,0 \\ \hline
3203 & 1\,2\,57'0 \\
\times\ \ 3 & \;\;9\,60\,9 \\ \hline
 & \;\;2\,96\,1
\end{array}$$

16,03 есть приближенное значение с недостатком с точностью до 0,01.

16,04 будет приближенным значением с избытком с той же точностью

$$\sqrt{0,4}=\sqrt{0,40}$$

$$\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{0,'40}=0,632\ldots} \\
\multicolumn{2}{l}{\ 0} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{\quad 40} \\
\multicolumn{2}{l}{\quad 36} \\
\hline
123 & 40'0 \\
\times 3 & 36\,9 \\
\hline
1262 & 3\,10'0 \\
\times\ 2 & 2\,52\,4 \\
\hline
 & \quad 57\,6
\end{array}$$

и т. д.

Пользуясь правилами извлечения квадратного корня, можно установить, например, что

$$1,4<\sqrt{2}<1,5$$
$$1,41<\sqrt{2}<1,42$$
$$1,414<\sqrt{2}<1,415$$
$$1,4142<\sqrt{2}<1,4143$$
$$1,41421<\sqrt{2}<1,41422$$
$$1,414213<\sqrt{2}<1,414214$$

. . . .

§ 2. ТЕОРЕМА О КВАДРАТНОМ КОРНЕ ИЗ ДВУХ

Теорема. ***Среди целых и дробных чисел не существует такого числа, которое равнялось бы точно*** $\sqrt{2}$.

Эту теорему можно сформулировать и так: ***среди целых и дробных чисел нет такого числа, квадрат которого равнялся бы точно двум.***

Доказательство. Сначала докажем, что среди целых чисел не существует такого числа, квадрат которого равен 2. Квадрат единицы есть единица; квадрат двух — четыре; квадраты последующих целых чисел будут числами, еще большими, чем четыре. Поэтому нет такого целого числа, квадрат которого был бы равен 2.

Теперь докажем, что среди дробей также нет такой дроби, квадрат которой был бы равен 2.

Предположим противное тому, что требуется доказать, т. е. предположим, что существует дробное число $\frac{p}{q}$, квадрат которого равен 2. Мы можем считать дробь $\frac{p}{q}$ несократимой, так как в виде несократимой дроби можно представить всякое дробное число.

Итак, допустим, что

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2, \qquad (A)$$

где p и q — целые взаимно простые* числа. Но тогда из равенства (A) получим, что $p^2 = 2q^2$. Из последнего равенства следует, что p есть четное число. (Если бы p было нечетным, то p^2 было бы также нечетным, а потому равенство $p^2 = 2q^2$ не могло иметь места.) Но всякое четное число можно представить в виде произведения, в котором один множитель равен двум, а другой — целому числу. Поэтому $p = 2p_1$, где p_1 — целое. Подставляя в равенство $p^2 = 2q^2$ вместо p выражение $2p_1$, получим $4p_1^2 = 2q^2$, или $2p_1^2 = q^2$. Отсюда следует, что и q есть четное число.

Итак, оказалось, что числа p и q оба четные, что противоречит несократимости дроби $\frac{p}{q}$.

Таким образом, предположение, что существует дробное число $\frac{p}{q}$, квадрат которого равен 2, привело нас к противоречию. Следовательно, такой дроби не существует, что и требовалось доказать.

Замечание. Аналогично можно доказать, что среди целых и дробных чисел не существует и таких, квадраты которых были бы равны, например, 3; 5; 6; 7; 8; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 17;...

Ниже мы убедимся в существовании прямолинейных отрезков, отношение длин которых также не выражается ни целым, ни дробным числом, подобно тому как не выражается целым или дробным числом, например, $\sqrt{2}$.

§ 3. НЕСОИЗМЕРИМЫЕ ОТРЕЗКИ

Общей мерой двух отрезков называется такой отрезок, который укладывается в каждом из данных точно целое число раз.

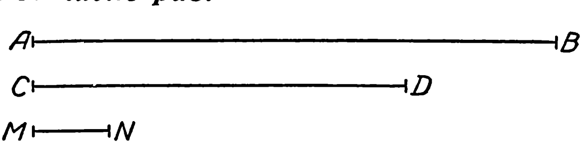


Рис. 39.

Например, если отрезок MN (рис. 39) укладывается точно в отрезке AB p раз, а в отрезке CD q раз, где p и q — целые числа, то отрезок MN будет общей мерой отрезков AB и CD.

* Два числа называются взаимно простыми, если их общий наибольший делитель равен единице. Например, числа 24 и 35 взаимно простые.

Если два отрезка имеют общую меру, то их отношение выражается отношением целых чисел.

В предыдущем примере

$$\frac{AB}{CD}=\frac{p}{q}.$$

Обратное утверждение тоже справедливо, а именно:

если отношение двух отрезков равно отношению целых чисел, то эти отрезки имеют общую меру.

Пусть, например,

$$\frac{AB}{CD}=\frac{7}{5}.$$

Тогда $\frac{1}{5}$ часть отрезка CD будет их общей мерой.

На первый взгляд может показаться, что любые два отрезка имеют ту или иную общую меру. Однако в действительности это не так. Ниже, в следующем параграфе, мы докажем существование отрезков, не имеющих общей меры.

Отрезки, имеющие общую меру, называются соизмеримыми.

Отрезки же, не имеющие общей меры, называются несоизмеримыми.

§ 4. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕСОИЗМЕРИМЫХ ОТРЕЗКОВ

Теорема. ***Диагональ и сторона квадрата несоизмеримы.***

Доказательство. Допустим противное, т. е. допустим, что диагональ и сторона квадрата соизмеримы. Тогда будет существовать некоторая общая мера этих отрезков.

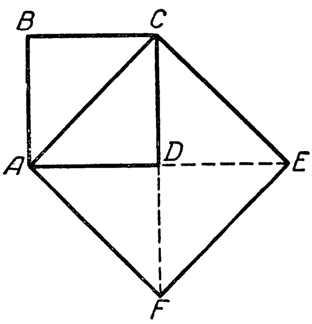


Рис. 40.

Пусть эта общая мера укладывается на диагонали AC квадрата $ABCD$ p раз, а на стороне AB q раз. Если эту общую меру принять за единицу длины, то длины диагонали и стороны квадрата выразятся просто целыми числами p и q, а построенные на них квадраты (рис. 40) будут иметь площади, соответственно равные p^2 и q^2 (квадратных единиц).

На этом рисунке фигура $ABCD$ есть квадрат, построенный на стороне AB, а квадрат $ACEF$ есть квадрат, построенный на диагонали AC.

Но, как видно из рисунка 40, квадрат $ACEF$, построенный на диагонали, вдвое больше данного квадрата $ABCD$ (по площади), ибо состоит из четырех таких треугольников, каких данный квадрат содержит два.

Следовательно,

$$p^2 = 2q^2, \quad \text{или} \quad \frac{p^2}{q^2} = 2,$$

т. е.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2.$$

Но, как мы видели раньше (см. стр. 212), это невозможно. Значит, диагональ и сторона квадрата несоизмеримы.

Таким образом, мы доказали существование таких отрезков, точное отношение которых не выражается ни целым, ни дробным числом, т. е. доказали существование несоизмеримых отрезков.

§ 5. О ДЛИНЕ ОТРЕЗКА, НЕСОИЗМЕРИМОГО С ОТРЕЗКОМ, ПРИНЯТЫМ ЗА ЕДИНИЦУ ДЛИНЫ

Пусть отрезки AB и CD (рис. 41) несоизмеримы.

Примем длину отрезка CD за единицу длины. Тогда по доказанному в предыдущем параграфе длину AB нельзя выразить

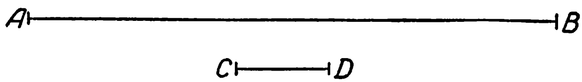


Рис. 41.

никаким ни целым, ни дробным числом, если мы хотим, чтобы это выражение было бы абсолютно точным.

Теперь покажем процесс, с помощью которого можно находить длину AB приближенно.

П е р в ы й ш а г. На отрезке AB откладываем последовательно от точки A отрезок CD (рис. 42).

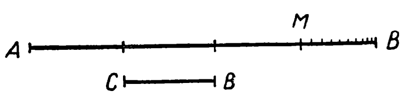


Рис. 42.

Пусть оказалось, что отрезок CD уложился на AB a_0 раз, где a_0 целое число (на рис. 42 $a_0 = 3$), и образовался остаток MB (разумеется меньший, чем CD). Такой остаток обязательно будет, так как в противном случае отрезки AB и CD были бы соизмеримыми.

В т о р о й ш а г. На отрезке MB отложим последовательно $\frac{1}{10}$ часть CD от точки M. Пусть $\frac{1}{10}$ часть CD уложилась на отрезке MB a_1 раз (a_1 — целое число) и образовался остаток M_1B (на рис. 64 $a_1 = 7$). Разумеется, остаток M_1B будет меньше $\frac{1}{10}CD$.

Остаток M_1B опять же обязательно будет получаться в силу несоизмеримости отрезков AB и CD.

Третий шаг. На новом остатке M_1B станем откладывать $\frac{1}{100}$ отрезка CD. Получим целое число a_2 и новый остаток M_2B. (Точка M_2 на рис. 42 не указана.)

Этот процесс мы продолжаем дальше, делая четвертый, пятый и дальнейшие шаги.

В силу несоизмеримости отрезков AB и CD этот процесс теоретически никогда не закончится и развернет перед нами бесконечный символ

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

состоящий из бесконечного множества цифр, поставленных рядом друг с другом, который можно записать и так:

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1000}+\ldots$$

Обрывая наш измерительный процесс, скажем, на пятом шаге, мы получим десятичную дробь

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1000}+\frac{a_4}{10000},$$

которая будет выражать длину AB приближенно с недостатком с точностью до $\frac{1}{10000}$.

Десятичная дробь

$$a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100}+\frac{a_3}{1000}+\frac{a_4+1}{10000}$$

будет выражать длину AB приближенно с избытком с точностью до $\frac{1}{10000}$.

Обратим внимание на два факта, которые мы установили в этой главе.

1. Не существует ни целого, ни дробного числа, квадрат которого оказался бы равным точно двум.

2. Не существует ни целого, ни дробного числа, которое выражало бы точно длину отрезка, несоизмеримого с единицей длины.

ГЛАВА XIII

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Вообразим, что мы не знаем никаких других чисел, кроме натуральных, т. е. кроме целых положительных. Тогда действия сложение и умножение окажутся выполнимыми всегда, а действие, скажем, деление — не всегда.

Например, деление числа 20 на 4 будет выполнимым, так как результат этого деления — число 5 — содержится во множестве натуральных чисел.

Деление же числа 20 на 7 уже будет невыполнимым, так как во множестве натуральных чисел нет числа $2\frac{6}{7}$.

Если же мы расширим множество натуральных чисел введением дробных положительных чисел, то придем к тому, что в этой расширенной области станут выполнимыми не только сложение и умножение, но и деление.

Однако в этой расширенной области, так же как и в области натуральных чисел, не всегда будет выполнимым действие вычитание. Например, вычитание из числа 5 числа $2\frac{1}{4}$ будет выполнимым, а вычитание из числа $2\frac{1}{4}$ числа 5 уже будет невыполнимым, так как во множестве положительных чисел нет числа $-2\frac{3}{4}$.

Если же мы расширим множество целых и дробных положительных чисел введением еще и отрицательных чисел, то в этой дважды расширенной числовой области уже станут выполнимыми все первые четыре действия.

Обратим внимание на то, что для выполнения прямых действий (сложения и умножения) не требовалось расширения понятия натурального числа, между тем как для выполнения обратных действий (деления и вычитания) такое расширение оказалось уже необходимым.

Понятие натурального числа и дальнейшие расширения понятия числа происходили и происходят под влиянием и для удовлетворения практических потребностей людей (включая и потребности математической практики).

Если рассматривать указанные выше расширения как необходимость, вытекающую только из внутренних потребностей самой математики, то, как мы видели, «повод» к такому расширению давали обратные действия: деление и вычитание.

Однако следует заметить, что причиной введения дробных чисел служила не только невыполнимость деления, но, пожалуй, в большей степени, задача измерения величины в случае, когда единица измерения не укладывалась в измеряемой величине целое число раз.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНАЯ ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ

В результате указанных выше двух расширений понятия числа мы пришли к такой числовой области, в которой содержатся все целые и дробные (положительные и отрицательные) числа. Такую числовую область с присоединенным к ней нулем называют рациональной числовой областью.

Определение. ***Все целые и дробные числа (положительные и отрицательные), включая нуль, называются числами рациональными.***

В рациональной числовой области все четыре действия, за исключением деления на нуль, всегда выполнимы.

§ 3. КОНЕЧНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Всякая десятичная дробь, которая изображается конечным числом цифр, называется конечной десятичной дробью. Например, 5,23; 0,4711; 2,14159 суть конечные десятичные дроби.

Всякая десятичная дробь, в которой после запятой следует бесконечное множество цифр, называется бесконечной десятичной дробью. Например. 5,12112111211112... есть бесконечная десятичная дробь. Здесь цифры после запятой идут без конца по следующему закону: единица, два; два раза единица, два; три раза единица, два и т. д. без конца.

Если в бесконечной десятичной дроби, начиная с некоторого места после запятой, одна и та же группа цифр повторяется без конца, непосредственно следуя одна за другой, то такая дробь называется бесконечной периодической десятичной дробью.

Примеры:

1) 5,77...;
2) 10,2323 23...;
3) 0,404 404 404...;
4) 5,1666...;
5) 8,39 4711 4711...

суть бесконечные периодические десятичные дроби. Из них первые три — чистые периодические, а две последние — смешанные периодические.

Всякая конечная десятичная дробь есть число рациональное. Например, 2,69 есть рациональное число $\frac{269}{100}$.

Всякая бесконечная периодическая десятичная дробь есть также рациональное число. Например, как известно из арифметики,

$$2{,}444\ \dots \text{ есть рациональное число } \frac{22}{9},$$

$$2{,}\ 2555\ \dots \text{ есть рациональное число } \frac{203}{90}.$$

§ 4. О ВОЗМОЖНОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ВСЯКОГО РАЦИОНАЛЬНОГО ЧИСЛА В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЕСЯТИЧНОЙ ДРОБИ

Как известно из арифметики, всякое рациональное число можно изобразить в виде бесконечной десятичной дроби.

Действительно,

$$0 = 0{,}000\dots; \qquad \frac{1}{6} = 0{,}1666\dots;$$

$$1 = 1{,}000\dots; \qquad \frac{413}{1100} = 0{,}37545454\dots;$$

$$1 = 0{,}999\dots; \qquad \frac{3}{10} = 0{,}3000\dots;$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\dots; \qquad \frac{3}{10} = 0{,}2999\dots.$$

Итак, ***всякое рациональное число может быть изображено в форме бесконечной десятичной дроби, которая обязательно будет периодической.***

§ 5. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЛАХ

Теорема. ***Между любыми двумя различными рациональными числами заключено бесконечно много (бесконечное множество) других рациональных чисел.***

Доказательство. Пусть r_1 и r_2 любые рациональные числа и пусть, например, $r_1 < r_2$. Тогда

$$2r_1 < r_1 + r_2 < 2r_2$$

или

$$r_1 < \frac{r_1 + r_2}{2} < r_2.$$

Число $\frac{r_1 + r_2}{2}$ обозначим для краткости через r_3. Очевидно, что r_3 есть рациональное число, заключенное между r_1 и r_2.

Теперь рассмотрим числа r_1 и r_3. По доказанному выше найдется рациональное число r_4, заключенное между r_1 и r_3, а следовательно, заключенное между r_1 и r_2.

Такие рассуждения можно повторять сколько угодно раз и получить еще сколько угодно рациональных чисел ($r_4, r_5, r_6, r_7 \ldots$), лежащих между числами r_1 и r_2. Теорема доказана.

Пример. Между числами 1 и 1,1 заключено бесконечное множество таких чисел, как, например, 1,01; 1,011; 1,0111; 1,01111; 1,011111;... Кроме этого множества чисел, можно указать сколько угодно других бесконечных множеств рациональных чисел, также заключенных между 1 и 1,1. Например, 1,07; 1,007; 1,0007;....

§ 6. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ТОЧКИ ЧИСЛОВОЙ ОСИ

Множеству рациональных чисел соответствует определенное множество точек числовой оси (см. стр. 27). Для нескольких произвольно взятых рациональных чисел это соответствие указано на рисунке 43.

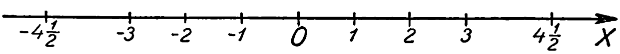


Рис. 43.

Точки числовой оси, соответствующие рациональным числам, называются рациональными точками числовой оси. Рациональные точки числовой оси для образности будем называть «черными».

Было доказано, что между двумя любыми различными рациональными числами заключено бесконечное множество других рациональных чисел. Образно мы можем сформулировать так: между двумя любыми «черными» точками числовой оси заключено бесконечное множество других «черных» точек.

В следующей главе мы обнаружим, что рациональные (т. е. «черные») точки далеко не заполняют собой всю числовую ось, т. е. что на числовой оси, кроме этих рациональных («черных») точек, имеется бесконечное множество еще и других точек, которые все мы будем образно называть «красными».

Термины «черные» и «красные» точки здесь введены условно и временно лишь с тем, чтобы в изложение темы ввести элемент наглядности. Эти термины не следует понимать в буквальном смысле слова, так как точка не имеет измерений, а поэтому бессмысленно говорить и о ее цвете.

ГЛАВА XIV

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

§ 1. О НЕОБХОДИМОСТИ РАСШИРЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ЧИСЛОВОЙ ОБЛАСТИ

На первый взгляд может показаться, что никаких других чисел, кроме рациональных, и быть не может. В действительности же это не так. Мы увидим, что, кроме рациональных чисел, существуют и другие.

Станем исходить из того, что нам известны лишь рациональные числа и никакие другие. Тогда действие возведения в квадрат над этими числами окажется выполнимым всегда.

Например: $1^2=1$; $7^2=49$; $(-8)^2=64$; $19^2=361$;

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};\ \left(5\frac{1}{3}\right)^2=\frac{256}{9};\ 0{,}2^2=0{,}04 \text{ и т. д.}$$

Между тем действие извлечения квадратного корня выполнимо уже далеко не всегда.

Например, действие извлечения квадратного корня из двух окажется невыполнимым, так как во множестве рациональных чисел нет такого числа, квадрат которого был бы равен двум (см. стр. 212).

Таким образом, чтобы сделать возможным выполнение действия извлечения арифметического квадратного корня, во всех случаях снова требуется прибегнуть к дальнейшему расширению нашего понятия о числе.

Здесь мы снова видим, что для выполнения прямого действия (возведения в квадрат) не требовалось расширять рациональную числовую область, а для безотказного выполнения обратного действия (извлечение квадратного корня) такое расширение уже становится необходимым.

К расширению области рациональных чисел нас приводит и рассмотрение вопроса об отношении несоизмеримых отрезков (см. стр. 213).

Действительно, оставаясь в области рациональных чисел, мы не можем выразить точно отношение несоизмеримых отрезков, а следовательно, и длину отрезка, несоизмеримого с единицей длины (см. стр. 215).

Таким образом, к расширению рациональной числовой области приводят нас потребности не только алгебры, но и геометрии.

§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ НА ЧИСЛОВОЙ ОСИ ТОЧЕК, НЕ ЯВЛЯЮЩИХСЯ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

Было доказано, что диагональ и сторона квадрата несоизмеримы (см. стр. 212). Отсюда вытекает следующее: если длину стороны квадрата принять за единицу, то не будет существовать никакого рационального числа, которое выражало бы точно длину диагонали.

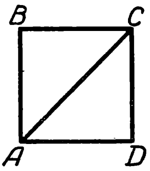


Рис. 44.

Пусть $ABCD$ (рис. 44) есть квадрат, сторона которого принята за единицу длины.

Отложим на числовой оси X_1X (рис. 45) отрезки OM и OM_1, равные диагонали AC. Тогда точки M и M_1 не будут рациональными («черными») точками числовой оси, а следовательно, будут точками, которые мы назвали образно «красными». Но так как отрезков, несоизмеримых с единицей длины, существует бесконечное множество*, то и точек на числовой оси, не являющихся рациональными, также существует бесконечное множество.

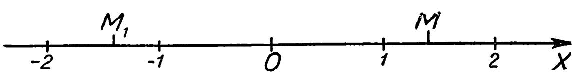


Рис. 45.

Выше мы назвали образно все рациональные точки числовой оси «черными», а все остальные «красными». Отсюда следует, что «черные» и «красные» точки заполняют собой всю числовую ось **сплошь**. Иначе говоря, на числовой оси, кроме рациональных («черных») и нерациональных («красных») точек, никаких других точек нет.

В § 5, гл. XIII было доказано, что между двумя любыми различными рациональными («черными») точками существует бесконечное множество других рациональных («черных») точек. В связи с этим примем к сведению без доказательства следую-

---

* Например, отрезки, равные $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ ... диагонали квадрата $ABCD$, также **несоизмеримы** со стороной этого квадрата, принятой за единицу. Также **не будут соизмеримы** со стороной квадрата $ABCD$ отрезки, равные удвоенной, утроенной, учетверенной и т. д. диагонали AC.

щее: ***на любом сколь угодно малом отрезке числовой оси, где бы он ни был расположен, имеется бесконечное множество рациональных («черных») и бесконечное множество «красных» точек.***

При этом оказывается, что бесконечное множество нерациональных (т. е. «красных») точек числовой оси существенно «богаче» множества ее рациональных (т. е. «черных») точек. Это же самое в точных терминах можно сформулировать так: множество нерациональных (т. е. «красных») точек числовой оси имеет мощность (см. стр. 756) более высокую, чем мощность множества рациональных (т. е. «черных») точек.

Выражаясь образно, можно сказать, что числовая ось настолько сильно насыщена «красными» (т. е. нерациональными) точками, что вся она, по нашей условной терминологии, представлялась бы нам как бы сплошь красной.

§ 3. ПОНЯТИЕ ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОМ ЧИСЛЕ

1. Из материала, изложенного в § 1 этой главы, мы убедились в том, что одних рациональных чисел недостаточно для потребностей алгебры и геометрии.

Мы видели, что нет такого рационального числа, которое равнялось бы точно $\sqrt{2}$. (Аналогично можно было бы убедиться, что нет таких рациональных чисел, которые равнялись бы точно, например, $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$ и многим другим квадратным корням.) Мы знаем еще и то, что существуют отрезки, точное отношение которых не выражается никаким рациональным числом (см. стр. 214). Мы также знаем, что на числовой оси существуют такие точки, точные расстояния которых от начальной точки числовой оси не выражаются никакими рациональными числами (см. стр. 222). Значит, для изображения этих величин необходимы какие-то новые числа.

Как же составить представление об этих новых числах.

Во-первых, заметим, что такими новыми числами никак не могут быть ни конечные десятичные дроби, ни бесконечные периодические десятичные дроби, так как те и другие являются числами рациональными (см. стр. 219).

Во-вторых, заметим, что никакая бесконечная непериодическая дробь не может изображать собой рациональное число, так как всякое рациональное число (как известно из арифметики), будучи изображенным в форме бесконечной дроби, дает дробь обязательно периодическую.

Чтобы составить себе представление об этих новых числах, рассмотрим еще раз вопрос об измерении отрезка, несоизмеримого с единицей длины, и вопрос о квадратном корне из двух.

Пусть отрезки AB и CD (рис. 46) несоизмеримы.

Первый шаг. Примем отрезок CD за единицу измерения и станем откладывать его последовательно на отрезке AB. Пусть отрезок CD отложился a_0 раз и получился остаток MB, меньший CD. (На рис. 47 $a_0=5$.) Эту операцию назовем первым шагом.

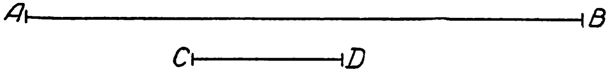


Рис. 46.

Второй шаг. Разделим отрезок CD на десять равных частей и будем откладывать $\frac{1}{10}$ часть CD на остатке MB. Пусть $\frac{1}{10}$ часть CD отложилась на MB a_1 раз (на рис. 48 $a_1=6$). Тогда обязательно получится второй остаток $M_1B<\frac{1}{10}CD$.

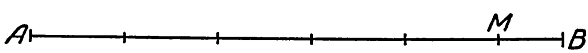


Рис. 47.

Третий шаг. На втором остатке откладываем $\frac{1}{100}$ часть CD. Получим целое число a_2 и третий остаток M_2B.

Этот процесс мы продолжаем дальше, делая четвертый, пятый и дальнейшие шаги.

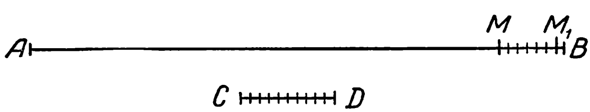


Рис. 48.

В силу несоизмеримости отрезков AB и CD этот процесс теоретически никогда не кончится и длина AB выразится бесконечной десятичной дробью. Эта бесконечная десятичная дробь не будет периодической, так как в таком случае отрезки AB и CD оказались бы соизмеримыми, тогда как по условию они несоизмеримы.

Вот эта бесконечная непериодическая десятичная дробь и будет примером нового числа, не являющегося рациональным и называемого иррациональным. Этим числом и будет выражаться длина отрезка AB.

Определение. ***Иррациональным числом называется бесконечная непериодическая десятичная (положительная или отрицательная) дробь.***

Например, бесконечная непериодическая дробь

$$8{,}121121112\ldots$$

есть вполне определенное иррациональное число.

Ниже будет показано, что математическое выражение, например $\sqrt{2}$, есть также определенное иррациональное число.

Мы уже умеем находить приближенные значения $\sqrt{2}$ с любой сколь угодно высокой степенью точности, т. е. мы можем находить сколько угодно десятичных знаков, идущих после запятой в десятичной дроби, которая изображает приближенное значение $\sqrt{2}$.

При этом нам ясно, что процесс извлечения $\sqrt{2}$ никогда не может закончиться. Если бы этот процесс мог закончиться, то $\sqrt{2}$ был бы равен некоторой дроби $\frac{p}{q}$, что невозможно.

Нам также ясно, что в результате бесконечного процесса извлечения $\sqrt{2}$ не может получиться периодическая бесконечная дробь. Если бы получилась периодическая бесконечная дробь, то это означало бы опять, что $\sqrt{2}$ равен некоторой дроби $\frac{p}{q}$, что невозможно. (Ведь периодическая бесконечная дробь есть число рациональное.)

Бесконечный ряд чисел

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ 1{,}4142135\ldots \quad (a)$$

представляет собой приближенные значения $\sqrt{2}$ с недостатком, с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Бесконечный же ряд чисел

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ 1{,}4142136\ldots \quad (a_1)$$

представляет собой приближенные значения $\sqrt{2}$ с избытком, с точностью до 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Квадратами чисел ряда (a) будут

$$1;\ 1{,}96;\ 1{,}9881;\ 1{,}999396;\ 1{,}99996164\ldots \qquad (b)$$

Квадратами чисел ряда (a_1) будут

$$4;\ 2{,}25;\ 2{,}0164;\ 2{,}002225;\ 2{,}00024449\ldots \qquad (b_1)$$

Числа, записанные в рядах (b) и (b_1), становятся тем ближе к числу 2, чем больше десятичных знаков мы берем.

Ряд (a) обладает той особенностью, что раз полученный десятичный знак навсегда сохраняется при продолжении процесса.

Это, естественно, приводит к мысли принять за $\sqrt{2}$ бесконечную десятичную дробь

$$1{,}4142135\ldots .$$

Но эта бесконечная дробь не может оказаться периодической, как это уже было доказано выше.

Итак, квадратный корень из двух изображается бесконечной непериодической десятичной дробью. Следовательно, $\sqrt{2}$ есть число иррациональное.

Написать бесконечную непериодическую десятичную дробь, разумеется, нельзя. Мы, однако, считаем ее определенной, если имеется то или иное правило, позволяющее написать любой его десятичный знак, как бы далеко ни стоял этот знак в последовательности десятичных знаков.

Например, тысячный знак в бесконечной десятичной дроби

$$1{,}4142135\ldots,$$

изображающей иррациональное число $\sqrt{2}$, имеет вполне определенную величину, несмотря на то, что его едва ли кто знает. Впрочем, при помощи современных электронных цифровых вычислительных машин найти этот тысячный знак можно довольно быстро.

Аналогично тому, как мы доказали, что $\sqrt{2}$ есть число иррациональное, можно доказать, что числа $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{8}$ и т. д. также являются иррациональными.

Чтобы показать существование других иррациональных чисел, введем понятие арифметического корня n-й степени.

Определение. ***Арифметическим корнем n-й степени из положительного числа a называется такое положительное число, n-я степень которого равна a.***

Корень n-й степени из a обозначается символом

$$\sqrt[n]{a}.$$

Число a называется подкоренным выражением; число n называется показателем корня; символ $\sqrt[n]{}$ называется знаком корня n-й степени, а выражение $\sqrt[n]{a}$ называется корнем n-й степени.

Примеры:

$$\sqrt[3]{125}=5; \quad \sqrt[4]{16}=2; \quad \sqrt[10]{1024}=2; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{125}}=\frac{2}{5}$$

и т. д.

Корни 3-й степени называют кубическими корнями. Например, $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[3]{50}$; $\sqrt[3]{a}$ суть кубические корни.

Примем к сведению без доказательства, что, например,

$$\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[3]{3}; \quad \sqrt[3]{4}; \quad \sqrt[4]{3}; \quad \sqrt[5]{10}$$

и им подобные представляют собой числа иррациональные.

Но ошибочно было бы думать, что иррациональные числа порождаются только корнями. Наоборот, существует много других источников, порождающих иррациональные числа. Например, мы видели, что длина всякого отрезка, несоизмеримого с единицей длины, есть число иррациональное, независимо от того, может или не может эта длина выражаться точно с помощью одного или нескольких корней.

Доказано, что отношение длины окружности к своему диаметру есть число иррациональное. Доказано, кроме того, что это иррациональное число не может быть точно представлено с помощью одного или нескольких корней.

Отношение длины окружности к своему диаметру принято обозначать греческой буквой π («пи»).

Иррациональность числа π впервые была доказана немецким математиком Ламбертом в 1766 году.

Число π изображается бесконечной непериодической дробью

$$3{,}141592653589793\ldots,$$

первые 15 десятичных знаков которой здесь выписаны.

Число $\sqrt{3}$ изображается бесконечной непериодической дробью

$$1{,}7320508\ldots,$$

первые 7 десятичных знаков которой здесь выписаны.

Мы уже знаем, что любая бесконечная непериодическая десятичная дробь представляет собой число иррациональное.

Теперь может возникнуть вопрос о том, как же понимать смысл самой бесконечной непериодической десятичной дроби.

Возьмем какую-нибудь бесконечную непериодическую десятичную дробь, например 4,25 225 2225... . Составим две последовательности чисел.

П е р в а я   п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь: 4,2; 4,25; 4,252; 4,2522; 4,25225...

В т о р а я   п о с л е д о в а т е л ь н о с т ь: 4,3; 4,26; 4,253; 4,2523; 4,25226...

Доказано (доказательства мы здесь не приводим), что этими двумя бесконечными последовательностями определяется единственное число, которое больше каждого числа первой последовательности и меньше каждого числа второй последовательности. Это единственное число мы и понимаем под символом

$$4{,}25\ 225\ 2225\ldots .$$

Таким образом, конкретное представление об иррациональном числе

$$4{,}25\ 225\ 2225\ldots$$

мы можем себе составить путем рассмотрения указанных выше двух бесконечных последовательностей. Эти две бесконечные последовательности дают возможность находить приближенные значения определяемого ими иррационального числа с любой точностью — с недостатком и с избытком. Например, число 4,252252 есть приближенное значение с недостатком с точностью до $\frac{1}{10^6}$.

Число же 4,252253 есть приближенное значение с избытком с точностью до $\frac{1}{10^6}$.

Мы уже убедились в том, что всякая бесконечная десятичная непериодическая дробь является числом иррациональным. Однако существуют и другие бесконечные процессы, определяющие собой то или иное иррациональное число. Например, бесконечный процесс

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

определяет собой иррациональные числа $\sqrt{2}$, так что

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}$$

Пояснения к формуле

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}+\dots}}}$$

Выражение

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}+\dots}}}$$

представляет собой некоторый, идущий по определенному закону, бесконечный процесс. Если допустить, что этот бесконечный процесс определяет собой некоторое число x, то получим

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}+\dots}}}$$

Перепишем эту формулу в следующем виде:

$$x=1+\cfrac{1}{1+\underbrace{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}+\dots}}}$$

Выражение в предыдущей формуле, отмеченное одной фигурной скобкой, представляет тот же самый бесконечный процесс, которым (как мы допустили) определяется число x. Поэтому получим, что

$$x=1+\frac{1}{1+x}.$$

Из этого уравнения следует, что

$$x-1=\frac{1}{1+x},$$

или

$$x^2-1=1,$$

или

$$x^2=2.$$

Но так как x — число положительное, то

$$x=\sqrt{2}.$$

Итак, доказано следующее. Если допустить, что бесконечным процессом

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{2}+\dots}$$

определяется некоторое число, то этим числом будет как раз иррациональное число $\sqrt{2}$.

Примем к сведению без доказательства, что, беря все большее и большее число звеньев этого бесконечного процесса, мы можем получать рациональные приближения иррационального числа $\sqrt{2}$ все с большей и большей точностью.

Например, значение выражения

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}}}$$

равно $1\frac{70}{169}$. Отсюда $\sqrt{2}\approx 1\frac{70}{169}\approx 1{,}4142$,

что как раз и представляет приближенное значение $\sqrt{2}$ с недостатком с точностью до 0,0001.

§ 4. СРАВНЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Два иррациональных числа называются равными, если их изображения с помощью бесконечных непериодических десятичных дробей одинаковы (тождественны).

Из двух положительных иррациональных чисел больше то, у которого целая часть больше. Если же целые части равны, то большим будет то, у которого больше первый десятичный знак после запятой. Если же и первые десятичные знаки одинаковы, то большим будет то, у которого больше второй десятичный знак и т. д. Например, сравним следующие иррациональные числа:

$$2{,}4172811728\ldots; \quad 2{,}4172811695\ldots$$

Здесь одинаковы целые части; первые семь десятичных знаков во втором числе такие же, как и в первом. Восьмой десятичный знак первого числа больше восьмого десятичного знака второго числа. Поэтому первое иррациональное число больше второго. Выписав достаточное число десятичных знаков бесконечных непериодических десятичных дробей, изображающих иррациональные числа $\sqrt{10}$ и π, убедитесь, что $\sqrt{10} > \pi$.

§ 5. СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Поясним, что такое сумма двух иррациональных чисел. Пусть иррациональное число a изображается следующей бесконечной непериодической десятичной дробью

$$3{,}15\ 115\ 1115\ldots,$$

а иррациональное число b — дробью

$$7{,}23\ 223\ 2223\ldots.$$

Тогда сумма $a+b$ изобразится дробью

$$10{,}38\ 338\ 3338\ldots.$$

Эта дробь бесконечная, непериодическая, десятичная; значит, она изображает собой определенное иррациональное число.

Напишем последовательности чисел, изображающих приближенные значения числа a:

с недостатком: $3{,}1;\ 3{,}15;\ 3{,}151;\ 3{,}1511;\ 3{,}15115;\ \ldots,$

с избытком: $3{,}2;\ 3{,}16;\ 3{,}152;\ 3{,}1512;\ 3{,}15116;\ \ldots.$

Сделаем то же самое и для числа b:

$$7{,}2;\ 7{,}23;\ 7{,}232;\ 7{,}2322;\ 7{,}23223;\ \ldots,$$
$$7{,}3;\ 7{,}24;\ 7{,}233;\ 7{,}2323;\ 7{,}23224;\ \ldots.$$

Составим еще две следующие последовательности:

$$3{,}1+7{,}2;\ 3{,}15+7{,}23;\ 3{,}151+7{,}232;\ \ldots,$$
$$3{,}2+7{,}3;\ 3{,}16+7{,}24;\ 3{,}152+7{,}233\ldots.$$

В последовательности (I) идут суммы соответствующих приближенных значений чисел a и b с недостатком, а в (II) с избытком:

Под суммой $a+b$ подразумевается такое число, которое больше каждого члена бесконечной последовательности (I) и меньше каждого члена бесконечной последовательности (II).

Таким числом как раз будет дробь

$$10{,}38\ 338\ 3338\ldots$$

Определение. ***Суммой двух положительных иррациональных чисел называется число, которое больше суммы любых их приближенных значений с недостатком, но меньше суммы любых их приближенных значений с избытком.*** Такое число, как это доказано в строгой теории иррациональных чисел, всегда существует и притом только одно.

Сумма двух иррациональных чисел, вообще говоря, будет числом иррациональным, но может оказаться и рациональным.

Например, числа $\sqrt{2}$ и $(3-\sqrt{2})$ оба иррациональные, между тем как их сумма

$$\sqrt{2}+(3-\sqrt{2})$$

есть рациональное число 3.

Определение. ***Произведением двух положительных иррациональных чисел называется число, которое больше произведений любых их приближенных значений с недостатком, но меньше произведений любых их приближенных значений с избытком.***

Такое число также всегда существует и притом только одно.

Произведение двух иррациональных чисел, вообще говоря, будет числом иррациональным, но может оказаться и рациональным.

Например, произведение иррациональных чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ будет иррациональным числом, равным $\sqrt{6}$.

Произведение же иррациональных чисел $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ будет равно $\sqrt{16}$, т. е. рациональному числу 4.

По аналогии с приведенными рассуждениями читатель сможет сам составить определения сложения и умножения двух чисел для того случая, когда одно из них рациональное, а другое иррациональное.

Подобно этому определяется вычитание и деление иррациональных чисел.

Понятие действительного числа

Определение. ***Все рациональные и иррациональные числа, как положительные, так и отрицательные, называются действительными или вещественными числами.***

Примем к сведению без доказательства, что особенности нуля и единицы (см. стр. 41), а также переместительный и сочетательный законы сложения и переместительный, сочетательный и распределительный законы умножения (см. стр. 32 и 39) остаются в силе для всех действительных чисел (рациональных и иррациональных).

Примеры для закрепления терминологии

1. Число 2 есть действительное, рациональное, целое, натуральное.

2. Число (-2) есть действительное, рациональное, целое, отрицательное.

3. Число $\frac{15}{4}$ есть действительное, рациональное, дробное, положительное.

4. Число 2,333... есть действительное, рациональное, дробное, положительное $\left(2{,}333\ldots = 2\frac{1}{3}\right)$.

5. Число 2,1333... есть действительное, рациональное, дробное, положительное $\left(2{,}1333\ldots = 2\frac{2}{15}\right)$.

6. Число 2, 12 112 11112... есть действительное, иррациональное, положительное.

7. Число $\sqrt{2}$ есть действительное, иррациональное, положительное.

8. Число $(-\sqrt{2})$ есть действительное, иррациональное, отрицательное.

Слово «рациональный» происходит от латинского слова «rationalis», что означает — «разумный», «обоснованный».

Слово «иррациональный» происходит также от латинского слова «irrationalis», что означает — «неразумный», «необоснованный».

Можно было бы подумать, что числа, несоизмеримые с единицей, были названы «иррациональными» потому, что их действительно считали не поддающимися логическому пониманию. На самом деле это не так. Еще у древнегреческого математика Евклида встречаются такие определения, из которых видно, что он отнюдь не считал «иррациональные числа» «неразумными», «нелогичными».

Термин «иррациональное число» возник вследствие чисто формального перевода на латинский язык греческого слова «αλογοσ». Употребляя это слово, греческие математики вовсе не хотели назвать новые числа «нелогичными», а хотели подчеркнуть лишь то, что каждое из них нельзя выразить отношениями двух целых чисел.

Строгая теория иррациональных чисел была построена впервые лишь во второй половине XIX века немецким математиком Дедекиндом. Со строгой теорией иррациональных чисел можно ознакомиться, например, по книге А. Н. Колмогорова и П. С. Александрова «Введение в теорию функций действительного переменного».

Примечание. Примем к сведению без доказательства, что правила и формулы, выведенные для рациональных чисел, остаются в силе и для всех действительных чисел. Например, правила умножения и деления степеней, формулы умножения, свойства пропорций, свойство ряда равных отношений и т. д.

УПРАЖНЕНИЯ

144. Ответить на вопросы:

1) Какие числа называются рациональными?
2) Какие числа называются иррациональными?
3) Каким числом, рациональным или иррациональным, является бесконечная периодическая дробь?
4) Доказать, что $\sqrt{3}$ есть число рациональное.
5) Какие числа называются действительными или вещественными?
6) Найти рациональное приближение $\sqrt{3}$ с точностью до $\frac{1}{100}$ с недостатком и с избытком.
7) Каким числом, рациональным или иррациональным, будет выражаться отношение двух отрезков прямой, имеющих общую меру?
8) Каким числом, рациональным или иррациональным, будет выражаться отношение двух отрезков прямой, не имеющих общей меры?

145. Составить две бесконечные последовательности, определяющие иррациональное число

$$7,\ 252255222555\ldots$$

ГЛАВА XV

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КОРНИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОРНЯХ

Общие замечания

Если a есть положительное рациональное число, представляющее собой точный квадрат, то арифметический квадратный корень из него есть положительное рациональное число. Например:

$$\sqrt{49}=7; \quad \sqrt{196}=14;$$

$$\sqrt{7225}=85; \quad \sqrt{15129}=123; \quad \sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13} \text{ и т. д.}$$

Если положительное рациональное число Q не представляет собой точного квадрата, то арифметический квадратный корень из него есть положительное иррациональное число. Например:

$$\sqrt{2}; \quad \sqrt{10}; \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ суть числа иррациональные.}$$

Сказанное относительно арифметического квадратного корня распространяется соответствующим образом на кубические корни и на корни любой степени. Например:

$$\sqrt[3]{64}=4; \quad \sqrt[4]{81}=3; \quad \sqrt[10]{1024}=2; \quad \sqrt[3]{\frac{8}{343}}=\frac{2}{7} \text{ и т. д.}$$

Корни $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{10}$; $\sqrt[10]{4}$ суть числа иррациональные.

Действительные корни нечетных степеней из отрицательного числа суть числа отрицательные. Например:

$$\sqrt[3]{-8}=-2; \quad \sqrt[5]{-32}=-2;$$

$$\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt[3]{-6}=-\sqrt[3]{6}.$$

Действительных корней четной степени из отрицательных чисел не существует.

Например, не существует такого действительного числа q, чтобы равенство

$$\sqrt{-25}=q$$

было справедливым.

В самом деле, q^2 будет положительным числом и тогда, когда q положительно, и тогда, когда q отрицательно.

Поэтому $\sqrt{-25} \neq 5$; $\sqrt{-25} \neq -5$, т. е. символ $\sqrt{-25}$ не представляет собой никакого действительного числа.

Арифметические корни из степеней

Очевидно, что

$$\sqrt{2^6} = 2^3; \qquad \sqrt{7^{10}} = 7^5; \qquad \sqrt[3]{7^{15}} = 7^5; \qquad \sqrt[n]{a^{np}} = a^p \qquad (a > 0).$$

Правило. ***Если подкоренное выражение представляет степень положительного числа a и при этом показатель этой степени делится на показатель корня, то арифметический корень будет равен степени, основанием которой служит a, а показателем — частное от деления показателя степени, стоящей под корнем, на показатель корня.***

Например,

$$\sqrt[7]{a^{21}} = a^{\frac{21}{7}} = a^3.$$

Действительно,

$$(a^3)^7 = a^{21}.$$

Примеры:

$$\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4;$$

$$\sqrt[3]{512^2} = \sqrt[3]{(2^9)^2} = \sqrt[3]{2^{18}} = 2^{\frac{18}{3}} = 2^6 = 64.$$

О выражении $\sqrt{a^2}$

Если $a > 0$, то $\sqrt{a^2} = a$.
Если же $a < 0$, то $\sqrt{a^2} = -a$.
Во всех случаях

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Например, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

О выражении $(\sqrt[n]{Q})^n$

Из определения следует, что

$$(\sqrt[n]{Q})^n = Q.$$

Действительно, пусть

$$\sqrt[n]{Q} = q.$$

Тогда

$$q^n = Q.$$

Подставляя вместо q равное ему выражение $\sqrt[n]{Q}$, получим

$$(\sqrt[n]{Q})^n = Q,$$

что и требовалось доказать.

Примеры:

$$(\sqrt{25})^2 = 25; \quad (\sqrt[mp]{a})^{mp} = a; \quad (\sqrt{13})^2 = 13.$$

§ 2. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ

Вспомогательные предложения

Прежде чем формулировать и доказывать основное свойство арифметического корня, докажем несколько вспомогательных предложений.

Определение. Если M и N два различных действительных числа, то $M > N$, если разность $M - N$ есть число положительное.

Предложение 1-е.

Если $A > B$ и $m > 0$, то $Am > Bm$.

Доказательство. Разность $Am - Bm$ можно записать в виде

$$(A - B)\,m.$$

По условию $A - B > 0$ и $m > 0$, следовательно, разность $Am - Bm$ есть число положительное, а это и значит, что $Am > Bm$. Как раз это и требовалось доказать.

Предложение 2-е.

Если $a > b$ и $c > d$ и при этом все числа a, b, c, d положительные, то

$$ac > bd.$$

Доказательство. Из того, что $a > b$ и $c > 0$ следует $ac > bc$.

Из того, что $c > d$ и $b > 0$ следует $bc > bd$.

Из того, что $ac > bc$ и $bc > bd$ следует, что $ac > bd$, что и требовалось доказать.

Предложение 3-е.

Если $x > y$ и при этом числа x, y — положительные, то $x^n > y^n$ (n — целое положительное число).

Доказательство. Из того, что $x > y$ и $x > 0$ следует $x^2 > xy$.

Из того, что $x > y$ и $y > 0$ следует $xy > y^2$.

Из того, что $x^2 > xy$ и $xy > y^2$ следует $x^2 > y^2$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим:

$$x^n > y^n,$$

что и требовалось доказать.

Предложение 4-е.

Если $x^n = y^n$ и числа x и y положительные, то $x = y$.

Доказательство. Предположим, что $x > y$, тогда $x^n > y^n$, что противоречит условию. Предположим, что $y > x$, тогда $y^n > x^n$, что также противоречит условию. Значит, не может быть, чтобы числа x и y были бы различными. Как раз это и требовалось доказать.

Примечание. Из равенства $x^n = y^n$ не всегда следует равенство $x = y$. Например, равенство $(+5)^2 = (-5)^2$ является верным, хотя числа $+5$ и -5 не равны друг другу.

Формулировка основного свойства арифметического корня

Арифметическое значение корня не изменится, если показатель корня умножить на натуральное число, а подкоренное выражение возвысить в степень этого же натурального числа, т. е.

$$\sqrt[n]{Q} = \sqrt[np]{Q^p} \quad (n \text{ и } p \text{ — натуральные числа и } Q \geqslant 0).$$

Доказательство.

Очевидно, что $(\sqrt[n]{Q})^{np} = [(\sqrt[n]{Q})^n]^p = Q^p$ (см. стр. 235).

Также очевидно, что

$$(\sqrt[np]{Q^p})^{np} = Q^p.$$

Две величины, порознь равные третьей, равны между собой. Поэтому

$$(\sqrt[n]{Q})^{np} = (\sqrt[np]{Q^p})^{np}.$$

Но так как числа $\sqrt[n]{Q}$ и $\sqrt[np]{Q^p}$ положительны, то

$$\sqrt[n]{Q} = \sqrt[np]{Q^p},$$

что и требовалось доказать.

Примеры:

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[6]{8^2}; \qquad \sqrt{25} = \sqrt[6]{25^3};$$
$$\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[35]{(2^3)^7} = \sqrt[35]{2^{21}};$$
$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{(a^n)^p} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

Основное свойство арифметического корня позволяет нам сокращать показатель корня в тех случаях, когда это возможно.

Примеры:

$$\sqrt[6]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^5}; \qquad \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5}; \qquad \sqrt[6]{125} = \sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}.$$

Основное свойство арифметического корня позволяет нам приводить к общему показателю корни, имеющие разные показатели.

Примеры:

Корни $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[5]{7}$ можно заменить соответственно следующими корнями

$$\sqrt[15]{2^5} \text{ и } \sqrt[15]{7^3}.$$

Корни $\sqrt[m]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ можно заменить соответственно корнями

$$\sqrt[mn]{a^n} \text{ и } \sqrt[mn]{b^m}.$$

Корни $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[4]{4}$ можно заменить соответственно корнями

$$\sqrt[12]{2^6}; \quad \sqrt[12]{3^4} \text{ и } \sqrt[12]{4^3}.$$

Корни $\sqrt{ab}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[6]{b}$ можно заменить соответственно корнями

$$\sqrt[6]{a^3b^3}; \quad \sqrt[6]{a^4}; \quad \sqrt[6]{b}.$$

Чтобы определить, какое из двух чисел, например, $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt[4]{4}$, больше, приведем эти корни к общему показателю:

$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81},$$

$$\sqrt[4]{4}=\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{64}.$$

Ясно, что $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$.

§ 3. ДЕЙСТВИЯ НАД АРИФМЕТИЧЕСКИМИ КОРНЯМИ

Умножение

Произведение корней, имеющих одинаковые показатели, равно корню с тем же показателем из произведения подкоренных выражений перемножаемых корней, т. е.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},$$

(n — число натуральное, a и b — числа положительные).

Доказательство. Очевидно, что

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n=ab.$$

Также очевидно, что

$$(\sqrt[n]{ab})^n=ab.$$

Две величины, порознь равные третьей, равны между собой. Поэтому

$$(\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{ab})^n.$$

Но так как числа $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{ab}$ положительные, то

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab},$$

что и требовалось доказать.

Совершенно аналогичным путем можно доказать правила для других действий.

Другие действия

1. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ (Правило деления корней, имеющих одинаковые показатели.)
2. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (Правило возведения корня в степень.)
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ (Правило извлечения корня из корня.)

Учащемуся предлагается самостоятельно сформулировать и доказать каждое из трех последних правил.

Примечание. Обратим внимание на то, что равенство

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a$$

справедливо лишь при условии, что $a\geqslant 0$. (При $a<0$ $\sqrt{a}$ не будет действительным числом.)

Примеры:

$$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{24}{3}}=\sqrt[3]{8}=2; \qquad (\sqrt[3]{2})^5=\sqrt[3]{2^5}=\sqrt[3]{32};$$

$$\frac{\sqrt[3]{36}}{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[3]{\frac{36}{12}}=\sqrt[3]{3}; \qquad (\sqrt[3]{a^2})^2=\sqrt[3]{(a^2)^2}=\sqrt[3]{a^4};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^2x^2}}{\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^2x^2}{a^2}}=\sqrt[5]{x^2}; \qquad \sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{4096}=2;$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[6]{5}.$$

Правило. ***Чтобы перемножить или разделить корни, имеющие разные показатели, необходимо привести эти корни предварительно к общему показателю.***

Примеры:

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt[12]{3^4}\cdot\sqrt[12]{4^3}=\sqrt[12]{81}\cdot\sqrt[12]{64}=\sqrt[12]{81\cdot 64}=\sqrt[12]{5184};$$

$$\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt[6]{3^2}}{\sqrt[6]{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3^2}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{9}{8}}.$$

$$\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n}\cdot\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{a^nb^m};$$

$$\sqrt[m]{a^p}\cdot\sqrt[n]{b^q}=\sqrt[mn]{a^{np}}\cdot\sqrt[mn]{b^{mq}}=\sqrt[mn]{a^{np}\cdot b^{mq}}.$$

Запишем равенство $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ в обратном порядке: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$. Отсюда правило: ***корень из произведения равен произведению корней из сомножителей.***

Пример:

$$\sqrt[3]{216\cdot 343}=\sqrt[3]{216}\cdot\sqrt[3]{343}=6\cdot 7=42.$$

Аналогично

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Пример:

$$\sqrt[3]{\frac{11}{125}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{\sqrt[3]{11}}{5}.$$

§ 4. НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Вывод множителей из-под знака корня

Пусть a и b — положительные числа. Тогда

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b};$$

$$\sqrt[3]{a^3b}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b}=a\sqrt[3]{b};$$

$$\sqrt[n]{a^nb}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt{a^6b}=\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{b}=a^3\sqrt{b};$$

$$\sqrt[3]{a^6b}=\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{b}=a^2\sqrt[3]{b};$$

$$\sqrt{a^7b}=\sqrt{a^6\cdot a\cdot b}=\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{ab}=a^3\sqrt{ab};$$

$$\sqrt[3]{a^{11}b}=\sqrt[3]{a^9\cdot a^2\cdot b}=\sqrt[3]{a^9}\cdot\sqrt[3]{a^2b}=a^3\sqrt[3]{a^2b};$$

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{243}=\sqrt[3]{3^5}=\sqrt[2]{3^3\cdot 3^2}=3\sqrt[3]{9};$$

$$\sqrt[2]{16a^5}=\sqrt[3]{8\cdot 2\cdot a^3\cdot a^2}=2a\sqrt[3]{2a^2};$$

$$\sqrt[n]{a^{kn+r}}=\sqrt[n]{a^{kn}\cdot a^r}=\sqrt[n]{a^{kn}}\cdot\sqrt[n]{a^r}=a^k\sqrt[n]{a^r}.$$

Рассмотрим выражение

$$\sqrt[n]{a^m}.$$

Пусть при делении числа m на n получается в частном k, а в остатке r. Тогда $m=kn+r$, и мы получим:

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{kn+r}}=a^k\sqrt[n]{a^r}.$$

Пусть a — отрицательное число, а b — положительное. Тогда

$$\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=|a|\cdot\sqrt{b}=-a\sqrt{b}.$$

Итак, ***если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых можно извлечь точный корень, то такие множители по извлечении из них корня могут быть выведены из-под знака корня в качестве множителей.***

Введение под знак корня

Пусть a и b — положительные числа. Тогда

$$a\sqrt{b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}; \qquad a^3\sqrt{b}=\sqrt{a^6}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^6b};$$

$$a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a^3b}; \qquad 2a\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{(2a)^3\cdot a}=\sqrt[3]{8a^4};$$

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}; \qquad a^k\sqrt[n]{a^r}=\sqrt[n]{a^{kn}}\cdot\sqrt[n]{a^r}=\sqrt[n]{a^{kn+r}}.$$

Пусть a — отрицательное число, а b — положительное. Тогда

$$a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b};$$

$$2\sqrt{2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2^3}=\sqrt{8};$$

$$-2\sqrt{2}=-\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=-\sqrt{8}.$$

Преобразование корня из дроби к корню из целого выражения

Пусть a и b — положительные числа. Тогда

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}=\frac{1}{b}\sqrt{ab}:$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}}=\frac{1}{b}\sqrt[3]{ab};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{1}{b}\sqrt[n]{ab^{n-1}};$$

$$\sqrt[5]{\frac{a}{b^2}}=\sqrt[5]{\frac{ab^3}{b^5}}=\frac{1}{b}\sqrt[5]{ab^3}.$$

Устранение иррациональности в знаменателе дроби

Устранить иррациональность в знаменателе дроби — это значит преобразовать дробь, знаменатель которой содержит корни, к новой дроби, знаменатель которой корней не содержит.

Мы рассмотрим лишь некоторые частные случаи такого преобразования.

а) Случай, когда знаменатель есть корень.

1) $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b^2}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$;

2) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[3]{b^2}}=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}}=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$;

3) $\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}$; $(b>0)$

4) $\frac{a}{\sqrt[5]{b_2}}=\frac{a\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^2}\cdot\sqrt[5]{b^3}}=\frac{a\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^5}}=\frac{a\sqrt[5]{b^3}}{b}$;

5) $\frac{4}{\sqrt[3]{25}}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{4\sqrt[3]{5}}{5}$;

6) $\frac{15\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\sqrt{6}}{3}=5\sqrt{6}$.

б) Случай, когда знаменатель есть сумма или разность, содержащая квадратные корни.

1) $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$;

$(b>0, \quad c>0, \quad b\neq c)$.

2) $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$;

$(b>0, \quad c>0, \quad b\neq c)$.

3) $\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$; $(c>0;\ b^2\neq c)$.

4) $\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{(b-\sqrt{c})(b+\sqrt{c})}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$; $(c>0;\ b^2\neq c)$.

5) $$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{[(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}]\,[(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}]}=$$

$$=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c}=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}}=$$

$$=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{[(a+b-c)+2\sqrt{ab}]\,[(a+b-c)-2\sqrt{ab}]}=$$

$$=\frac{A(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})}{(a+b-c)^2-4ab}.$$

в) Случай, когда знаменатель есть сумма или разность, содержащая кубические корни.

1) $$\frac{a}{\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{a(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{(\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}=$$
$$=\frac{a(\sqrt[3]{b^2}-\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{c^2})}{b+c};$$

2) $$\frac{a}{b-\sqrt[3]{c}}=\frac{a(b^2+b\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})}{(b-\sqrt[3]{c})(b^2+b\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})}=\frac{a(b^2+b\sqrt[3]{c}+\sqrt[3]{c^2})}{b^3-c}.$$

Устранение иррациональности в числителе дроби

Устранить иррациональность в числителе дроби — это значит преобразовать дробь, числитель которой содержит корни, к новой дроби, числитель которой корней не содержит.

Эта операция производится аналогично тому, как и операции, указанные в предыдущем пункте. Например:

1) $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{c}=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\frac{a-b}{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})};$$

2) $$\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$
$$=\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}.$$

§ 5. НОРМАЛЬНЫЙ ВИД КОРНЯ

Корень считается приведенным к нормальному виду, если:

1) возможные множители вынесены за знак корня;

2) подкоренное выражение приведено к целому виду;

3) показатель корня и показатель степени подкоренного выражения сделаны взаимно простыми.

Примеры:

1) $$A\sqrt[10]{\frac{a^{24}b^6}{c^8}}=A\sqrt[5]{\frac{a^{12}b^3}{c^4}}=Aa^2\sqrt[5]{\frac{a^2b^3}{c^4}}=Aa^2\sqrt[5]{\frac{a^2b^3c}{c^5}}=$$
$$=A\frac{a^2}{c}\sqrt[5]{a^2b^3c}=\frac{Aa^2}{c}\sqrt[5]{a^2b^3c};$$

2) $$\sqrt{\frac{2a}{3}}=\sqrt{\frac{2a\cdot 3}{3\cdot 3}}=\frac{\sqrt{6a}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{6a}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{6a};\ (a>0).$$

3) $$\sqrt[6]{16a^2b^{10}}=\sqrt[3]{4ab^5}=b\sqrt[3]{4ab^2};$$

4) $$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b};\ (a>b).$$

§ 6. ПОДОБНЫЕ КОРНИ И ИХ ПРИВЕДЕНИЕ

Определение

Корни называются подобными, если после приведения их к нормальному виду окажутся одинаковыми как их подкоренные выражения, так и показатели корней.

Примеры:

Корни $\sqrt{8}$; $\sqrt{18}$; $\sqrt{24\frac{1}{2}}$ подобны.

Действительно,

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2};$$
$$\sqrt{18}=\sqrt{9\cdot 2}=3\sqrt{2};$$
$$\sqrt{24\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{49}{2}}=\sqrt{\frac{49\cdot 2}{2^2}}=\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

Корни $\sqrt{\frac{a}{b}}$ и $\sqrt{\frac{b}{a}}$ — подобны. Действительно,

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{ab}{b^2}}=\frac{1}{b}\sqrt{ab};$$
$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{\frac{ab}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{ab};$$

Корни $\sqrt[6]{9a^4b^{10}}$ и $\sqrt[12]{81a^8b^{20}}$ подобны. Действительно,

$$\sqrt[6]{9a^4b^{10}}=\sqrt[3]{3a^2b^5};$$
$$\sqrt[12]{81a^8b^{20}}=\sqrt[3]{3a^2b^5}.$$

Приведение подобных корней

Примеры:

1) $5\sqrt{2}+7\sqrt{2}-4\sqrt{2}=8\sqrt{2};$

2) $\sqrt{8}+\sqrt{18}+\sqrt{50}=2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+5\sqrt{2}=10\sqrt{2};$

3) $$\sqrt{1\frac{1}{3}}+\sqrt{5\frac{1}{3}}+\sqrt{16\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{16}{3}}=\sqrt{\frac{49}{3}}=$$
$$=\sqrt{\frac{4\cdot 3}{3^2}}+\sqrt{\frac{16\cdot 3}{3^2}}+\sqrt{\frac{49\cdot 3}{3^2}}=$$
$$=\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{7}{3}\sqrt{3}=\frac{13}{3}\sqrt{3};$$

4) $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{1}{b}\sqrt{ab}+\frac{1}{a}\sqrt{ab}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\sqrt{ab}.$

При извлечении корня из суммы нельзя производить извлечение корней из слагаемых, т. е. нельзя писать

$$\sqrt[n]{a+b}=\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}.$$

Например:

$$\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5;$$

$$\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7.$$

Отсюда видно, что

$$\sqrt{9+16}\neq\sqrt{9}+\sqrt{16}.$$

§ 7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛОЖНОГО КОРНЯ

Выражения вида

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} \text{ и } \sqrt{a-\sqrt{b}}$$

называются сложными корнями.

Теорема. ***Если*** $a>0$, $b>0$ ***и*** $a^2-b>0$, ***то верны формулы***

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Докажем справедливость первой формулы.

Очевидно, что

$$\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2=a+\sqrt{b}.$$

С другой стороны,

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+$$

$$+\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\sqrt{a^2-(a^2-b)}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=a+\sqrt{b}.$$

Две величины, порознь равные третьей, равны между собой.

Поэтому $\left(\sqrt{a+\sqrt{b}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2.$

Основания этих квадратов положительны, а поэтому

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Совершенно так же доказывается и вторая формула.

Доказанные формулы представляют особый интерес в том случае, когда разность a^2-b представляет собой точный квадрат. В этом случае сложный корень представляется в виде суммы или разности двух несложных корней. Например:

$$\sqrt{7+\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{7^2-40}}{2}}+\sqrt{\frac{7-\sqrt{7^2-40}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{7+3}{2}}+\sqrt{\frac{7-3}{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}.$$

Замечание. Корни иногда называют радикалами. $\sqrt[n]{Q}$ есть радикал n-й степени. Символ $\sqrt[n]{}$ есть знак радикала n-й степени.

Общее определение корня

Корнем n-й степени из числа a называется всякое число x, n-я степень которого равна a.

Правило нахождения всех значений корня n-й степени из любого числа изложено в гл. «Комплексные числа».

В настоящей главе мы изучали лишь арифметические значения корней.

§ 8. О ВОЗМОЖНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ АРИФМЕТИЧЕСКОГО КОРНЯ С ЛЮБОЙ СТЕПЕНЬЮ ТОЧНОСТИ

Мы покажем сейчас, что элементарным способом можно находить значение любого арифметического корня с любой степенью точности. Сущность этого способа раскроем на примере хотя бы $\sqrt[3]{2}$.

Пусть требуется найти $\sqrt[3]{2}$. Сначала среди чисел 1,0; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2,0 найдем два таких рядом стоящих числа, чтобы куб левого был меньше 2, а куб правого — больше 2.

Очевидно, что $1{,}5^3=3{,}375$. Поэтому $1<\sqrt[3]{2}<1{,}5$.
Далее $1{,}2^3=1{,}728$. Значит, $1{,}2<\sqrt[3]{2}<1{,}5$.
Наконец, $1{,}3^3=2{,}197$. Значит, $1{,}2<\sqrt[3]{2}<1{,}3$.

Теперь можно сказать, что 1,2 будет приближенным значением $\sqrt[3]{2}$ с недостатком, а 1,3 с избытком, с точностью до $\frac{1}{10}$.

Чтобы получить приближенные значения с точностью до $\frac{1}{100}$, надо испытать числа

$$1{,}20;\quad 1{,}21;\quad 1{,}22;\quad 1{,}23;\ \ldots;\quad 1{,}29;\quad 1{,}30.$$

Этот процесс можно продолжить как угодно далеко и таким путем получить значение $\sqrt[3]{2}$ с любой степенью точности.

Изложенный элементарный способ имеет принципиальное значение, но не практическое. Практически пользоваться этим способом крайне неудобно, так как он слишком громоздок. Принципиальное же значение этого способа заключается в том, что он убеждает нас в возможности отыскания значений любого арифметического корня с любой степенью точности.

Для практического же вычисления значений любых арифметических корней существуют другие более удобные способы. Один из этих способов мы встретим в главе «Логарифмы».

Для нахождения приближенных значений часто встречающихся величин можно пользоваться готовыми таблицами. Пример подобной таблицы приведен ниже.

Таблица квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубических и обратных величин

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$
1	1	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	4	8	1,4142	1,2599	0,5000	0,7071
3	9	27	1,7321	1,4422	0,3333	0,5773
4	16	64	2,0000	1,5874	0,2500	0,5000
5	25	125	2,2361	1,7100	0,2000	0,4472
6	36	216	2,4495	1,8171	0,1667	0,4082
7	49	343	2,6458	1,9129	0,1429	0,3780
8	64	512	2,8284	2,0000	0,1250	0,3536
9	81	729	3,0000	2,0801	0,1111	0,3333
10	100	1000	3,1623	2,1544	0,1000	0,3162
11	121	1331	3,3166	2,2240	0,0909	0,3015
12	144	1728	3,4641	2,2894	0,0733	0,2887
13	169	2197	3,6056	2,3513	0,0769	0,2774
14	196	2744	3,7417	2,4101	0,0714	0,2673
15	225	3375	3,8730	2,4662	0,0667	0,2582
16	256	4096	4,0000	2,5189	0,0625	0,2500
17	289	4913	4,1231	2,5713	0,0588	0,2425
18	324	5832	4,2426	2,6207	0,0556	0,2357
19	361	6859	4,3589	2,6684	0,0526	0,2294
20	400	8000	4,4721	2,7144	0,0500	0,2236

Такого рода таблицы, значительно более полные и с более высокой степенью точности, даны, например, в книге Барлоу «Таблицы квадратов, кубов, корней квадратных, корней кубических и обратных величин».

Теперь остановимся очень кратко на понятии мнимого числа.

Изучение квадратных корней из положительных чисел привело к возникновению понятия иррационального числа.

Рассматривая же квадратные корни из отрицательных чисел, мы заметим, что такие корни не равны никакому действительному числу. В самом деле, взяв, например, $\sqrt{-25}$, мы видим, что он не равен ни 5, ни —5, ни нулю и никакому другому действительному числу.

Это происходит потому, что квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным числом. Поэтому квадратный корень из отрицательного числа назвали чисто мнимым числом.

Например, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-7}$, $\sqrt{-1}$ суть чисто мнимые числа. Сумму или же разность действительного числа, отличного от нуля, и чисто мнимого числа назвали мнимым комплексным числом. Например, $2+\sqrt{-3}$, $2-\sqrt{-3}$ суть мнимые комплексные числа.

Обратите внимание на то, что изучение квадратного корня расширило наши представления о числе. Мы узнали о существовании новых чисел: иррациональных и мнимых.

Более подробные сведения о мнимых числах изложены в главе «Комплексные числа».

После изучения главы «Комплексные числа» и главы «Число e и его простейшие применения» полезно прочитать раздел «О расширении понятия числа».

УПРАЖНЕНИЯ

146. Найти значения корней:

1) $\sqrt{25\cdot 49\cdot 121}$; 2) $\sqrt[3]{8\cdot 216\cdot 512}$; 3) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$;

4) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$; 5) $\sqrt[3]{2^6}$; 6) $\sqrt[4]{3^8}$; 7) $\sqrt[3]{-8}$.

Примечание. Во всех последующих примерах все буквы будут обозначать положительные числа.

146-а. Упростить выражения:

1) $\sqrt{16x^2}$; 2) $\sqrt[3]{8x^{15}}$; 3) $\sqrt{\frac{1}{4}x^2y^4}$; 4) $\sqrt[k]{\frac{2^k a^{3k}}{3^{2k}b^{4k}}}$;

5) $\sqrt[n]{\frac{(a+b)^{2n}}{a^{2n}(a+2b)^n}}$.

147. Вывести из-под знака корня множители:

1) $\sqrt{9\cdot 7}$; 2) $\sqrt{27}$; 3) $\sqrt[3]{16}$; 4) $\sqrt{360}$; 5) $\sqrt{a^2b}$;

6) $\sqrt{a^3}$; 7) $\sqrt[3]{2a^4b^4}$; 8) $\sqrt{\frac{a^2b}{9x^2}}$;

9) $\sqrt{5(x^2+2xy+y^2)}$; 10) $\sqrt[k]{a^{2k+1}b^{2k+3}}$.

148. Ввести множители под знак корня:

1) $2\sqrt{3}$; 2) $2\sqrt[3]{3}$;

3) $2\sqrt[4]{3}$; 4) $2\sqrt[5]{3}$; 5) $2\sqrt[6]{3}$; 6) $a\sqrt{2}$;

7) $a\sqrt[3]{a}$; 8) $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$;

9) $x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$; 10) $(a+b)\sqrt{\frac{1}{a+b}}$.

149. Упростить следующие арифметические корни:

1) $\sqrt[4]{3^2}$; 2) $\sqrt[4]{25}$; 3) $\sqrt[6]{8}$; 4) $\sqrt[4]{49a^2b^2}$; 5) $\sqrt[6]{27x^3y^3}$.

150. Привести корни к нормальному виду:

1) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; 2) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; 3) $\sqrt{\frac{a^5b^3}{c}}$; 4) $\sqrt{4a^6b^2+12a^4b^3}$;

5) $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y^4}+\frac{x^5}{y^6}}$; 6) $\sqrt[4]{(a^2+2ab+b^2)c^6}$.

151. Упростить выражения:

1) $5\sqrt{18}+2\sqrt{8}-\sqrt{50}$;

2) $3\sqrt{\frac{1}{5}}+\frac{1}{2}\sqrt{20}+\sqrt{\frac{4}{5}}$;

3) $\frac{2}{x}\sqrt[3]{x^5y}-3x\sqrt[3]{\frac{y}{x}}+4y\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}-\sqrt[3]{x^2y^4}$;

4) $5\sqrt{a^2b}+7x\sqrt[3]{a}-x^2\sqrt[3]{\frac{27a}{x^3}}-6\sqrt{\frac{bx^2}{9}}+$
$+a^2\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}-b^2\sqrt{\frac{1}{b}}$.

152. Выполнить умножение:

1) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}$; 2) $2\sqrt{7}\cdot3\sqrt{21}$;

3) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{48}$; 4) $\sqrt{5x}\cdot\sqrt{5}$;

5) $\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt[4]{8x^3}$;

6) $\left(\sqrt{xy}+2\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{1}{xy}}\right)\cdot\sqrt{xy}$;

7) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}$; 8) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[8]{a^2}$.

153. Выполнить деление корней:

1) $\sqrt{75}:\sqrt{15}$; 2) $\sqrt{5x}:\sqrt{x}$; 3) $\sqrt[3]{2\frac{2}{3}}:\sqrt[3]{1\frac{1}{8}}$;

4) $\sqrt[4]{27}:\sqrt{3}$; 5) $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$; 6) $\sqrt[3]{a^2}:\sqrt{a}$;

154. Возвести корни в степень:

1) $(\sqrt[6]{2})^3$; 2) $(\sqrt[3]{a^2})^2$; 3) $(\sqrt[n]{a})^{n+2}$.

155. Представить в виде одного корня:

1) $\sqrt{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$; 3) $\sqrt{2\sqrt{3}}$; 4) $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}$;

5) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$; 6) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; 7) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$.

156. Устранить иррациональность в знаменателе:

1) $\frac{6}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$; 3) $\frac{a}{\sqrt{a}}$; 4) $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{x+y}}$;

6) $\frac{a}{b+\sqrt{b}}$; 7) $\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}$; 8) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$;

9) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$; 10) $\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$;

11) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 12) $\frac{2}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}$;

13) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; 14) $\frac{1}{2+\sqrt[3]{3}}$; 15) $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}$.

157. Устранить иррациональность в числителе:

1) $\frac{\sqrt{a+15}-\sqrt{a}}{10}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

158. Упростить выражения:

1) $\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}+\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}\right)^2$;

3) $\frac{5}{2+\sqrt{2}}-\frac{1}{3+\sqrt{2}}-\frac{32-17\sqrt{2}}{7}$ (сначала устранить иррациональность в знаменателях);

4) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ (применить формулу преобразования сложного корня).

159. Вычислить

1) $\sqrt{74529}$; 2) $\sqrt{4343056}$.

160. Найти приближенное значение $\sqrt{5}$ с точностью до $\frac{1}{20}$.

161. Найти приближенные значения 1) $\sqrt{3}$ и 2) $\sqrt{0,9}$ с точностью до $\frac{1}{1000}$.

162. Не находя приближенных значений корней, выяснить, что больше: $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{3}$.

163. Учитывая, что выражение $\sqrt{A}$, где $A>0$, представляет собой арифметическое значение квадратного корня, т. е. является положительным числом, убедитесь в справедливости следующих равенств.

1) $\sqrt{a^2}=a$, если $a\geqslant 0$.
2) $\sqrt{a^2}=-a$, если $a\leqslant 0$.
3) $\sqrt{a^2}=|a|$ при любом значении a.
4) $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, если $a\geqslant 0$.
5) $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$, если $a\leqslant 0$.
6) $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$ при любых значениях a.
7) $x\sqrt{a}=\sqrt{ax^2}$, если $x\geqslant 0$.
8) $x\sqrt{a}=-\sqrt{ax^2}$, если $x\leqslant 0$.
9) $\sqrt{ax^2}=x\sqrt{a}$, если $x\geqslant 0$.
10) $\sqrt{ax^2}=-\sqrt{a}$, если $x\leqslant 0$.

164. Упростить выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{a^2b}}{a}$ при $a>0$; Отв. $\sqrt{b}$.
2) $\dfrac{\sqrt{a^2b}}{a}$ при $a<0$; Отв. $-\sqrt{b}$.
3) $\dfrac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$ при $a>b$; Отв. 1.
4) $\dfrac{\sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$ при $a<b$; Отв. -1.
5) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ при $x>0$; Отв. $\dfrac{1}{x}$.
6) $\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{x^2+x+1}}$ при $x<0$. Отв. $-\dfrac{1}{x}$.

165. Найти значения выражений:

1) $\sqrt{(-1)^2}$; Отв. 1.
2) $\sqrt{(-7)^2}$; Отв. 7.
3) $\sqrt{(1-x)^2}$ при $x\leqslant 1$; Отв. $1-x$.
4) $\sqrt{(1-x)^2}$ при $x\geqslant 1$; Отв. $x-1$.
5) $\sqrt{(1-x)^2}+1-x$. Отв. $\begin{cases}2(1-x), & \text{если } x\leqslant 1;\\ 0, & \text{если } x\geqslant 1.\end{cases}$

166. Частота q колебаний струны прямо пропорциональна корню квадратному из натяжения f, т. е. $q = k\sqrt{f}$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности. При натяжении 4 *кГ* струна колеблется с частотой 30 раз в секунду. Какова будет частота колебаний при натяжении 9 *кГ*?

167. Квадрат периода T обращения планеты вокруг Солнца прямо пропорционален кубу расстояния R от планеты до Солнца, т. е. $T^2 = kR^3$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности. Зная, что время обращения Земли вокруг Солнца равно 365 суткам, а расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн. *км*, найти время обращения Марса вокруг Солнца. Среднее расстояние от Марса до Солнца равно 225 млн. *км*.

ГЛАВА XVI

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ПРАКТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

До сих пор мы рассматривали лишь такие задачи, которые решались при помощи уравнений первой степени. Однако существует много задач, решение которых сводится к решению уравнений степени выше первой. Одна такая задача уже нам встречалась на стр. 146. Приведем для примера еще одну задачу.

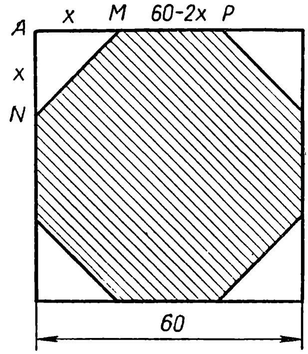


Рис. 49.

З а д а ч а. От квадрата со стороной 60 *см* надо отрезать по углам одинаковые равнобедренные треугольники так, чтобы остался восьмиугольник с равными сторонами.

Р е ш е н и е. Пусть рисунок 49 изображает квадрат и полученный из него искомый восьмиугольник (восьмиугольник заштрихован). Решить данную задачу — это значит определить длину отрезка AM (рис. 49). Длину AM, равно как и AN, обозначим в сантиметрах буквой x. Тогда по теореме Пифагора

$$MN^2 = x^2 + x^2 = 2x^2.$$

Кроме того,

$$MP = 60 - 2x.$$

По условию задачи стороны восьмиугольника должны быть одинаковыми. Поэтому $MP = MN$, или $MP^2 = MN^2$, т. е.

$$(60 - 2x)^2 = 2x^2.$$

Раскрыв скобки и сделав приведение подобных членов, получим:

$$2x^2 - 240x + 60^2 = 0,$$

или

$$x^2 - 120x + 1800 = 0.$$

Получилось уравнение второй степени, т. е. более высокой, чем уравнение первой степени.

Не зная еще теории уравнений второй степени, попробуем решить полученное уравнение с помощью преобразований.

Прибавим к левой и правой частям по 60^2:

$$x^2-120x+60^2+1800=60^2.$$

Число 60 мы получили, разделив число 120 на 2.

Мы прибавили 60^2 для того, чтобы образовать в левой части уравнения разложение квадрата разности.

Теперь наше уравнение примет вид:

$$(x-60)^2=60^2-1800,$$

или

$$(x-60)^2=1800.$$

Отсюда видно, что разность $x-60$ должна быть таким числом, квадрат которого равен 1800. Следовательно,

$$x-60=\pm\sqrt{1800}.$$

Отсюда

$$x=60\pm\sqrt{1800}.$$

Таким образом, мы нашли два решения, или два корня, нашего квадратного уравнения. Если эти решения, или корни, обозначить x_1 и x_2, то получим:

$$x_1=60+\sqrt{1800};$$

$$x_2=60-\sqrt{1800}.$$

Первый корень $x_1=60+\sqrt{1800}$, являясь решением уравнения $x^2-120x+1800=0$, не является решением нашей задачи, так как длина AM не может быть больше стороны квадрата.

Второй корень $x_2=60-\sqrt{1800}$ является и решением уравнения, и решением задачи.

Итак, $AM=AN=60-\sqrt{1800}\approx 60-42{,}4=17{,}6$ (*см*).

Решим уравнение $x^2-8x-48=0$.

Прибавим к обеим частям уравнения по 16 (число 16 мы получили возведением в квадрат половины коэффициента при неизвестном x в первой степени):

$$x^2-8x+16-48=16.$$

Теперь наше уравнение можно записать так:

$$(x-4)^2=16+48, \text{ или } (x-4)^2=64.$$

Отсюда

$$x-4=\pm\sqrt{64},$$

или

$$x = 4 \pm \sqrt{64} = 4 \pm 8.$$

Таким образом, мы нашли два решения, или два корня, данного уравнения. Если эти корни обозначить x_1 и x_2, то получим:

$$x_1 = 12, \qquad x_2 = -4.$$

Решите уравнение

$$x^2 - 10x - 24 = 0.$$

§ 2. ПОЛНЫЕ И НЕПОЛНЫЕ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, которое после преобразований может быть приведено к виду

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c — любые числа и $a \neq 0$, а x — есть неизвестное, называется уравнением второй степени с одним неизвестным или, проще, квадратным уравнением.

Например, уравнение

$$(2x+1)(2x-1) = (x+1)(x+2)$$

является квадратным. Оно приводится к виду

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$ называется общим видом квадратного уравнения.

Числа a, b, c называются так:

a — коэффициентом при неизвестном второй степени;

b — коэффициентом при неизвестном первой степени;

c — свободным членом уравнения.

Неполные квадратные уравнения. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ называется неполным, если один из коэффициентов b или c или они оба равны нулю. Если одновременно $b \neq 0$ и $c \neq 0$, уравнение называется полным.

Неполное квадратное уравнение может иметь один из следующих видов:

$$ax^2 = 0; \quad ax^2 + c = 0; \quad ax^2 + bx = 0.$$

Решение неполных квадратных уравнений:

1. Уравнение $ax^2 = 0$ удовлетворяется только при $x = 0$. Действительно, так как $a \neq 0$, то из $ax^2 = 0$ следует, что $x^2 = 0$, а потому и $x = 0$. Любое другое значение буквы x не будет решением уравнения $ax^2 = 0$.

2. Уравнение вида $ax^2 + c = 0$ равносильно уравнению

$$x^2 = -\frac{c}{a} \qquad (a \neq 0).$$

Если одновременно $a>0$ и $c>0$ или $a<0$ и $c<0$, то уравнение

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

действительных решений не имеет, так как квадрат положительного или отрицательного числа не может равняться отрицательному числу $-\frac{c}{a}$. Значит, и исходное уравнение $ax^2+c=0$ также не будет иметь действительных корней.

В этом случае говорят, что уравнение $ax^2+c=0$ имеет два чисто мнимых корня:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Например, уравнения

$$2x^2+5=0 \text{ и } -2x^2-5=0$$

не имеют действительных корней. Каждое из них имеет два чисто мнимых корня:

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{5}{2}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{-\frac{5}{2}}.$$

Если же одновременно $a>0$ и $c<0$ или $a<0$ или $c>0$, то $-\frac{c}{a}$ будет положительным числом. В этом случае уравнение $x^2 = -\frac{c}{a}$, а вместе с ним и исходное уравнение $ax^2+c=0$ имеют два действительных решения:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}},$$

т. е. два действительных корня:

$$\sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ и } -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

(Мы здесь воспользовались тем, что уравнение, например, $x^2=49$ удовлетворяется как при $x=7$, так и при $x=-7$.) Уравнение $2x^2-50=0$ имеет два действительных корня:

$$x_1 = 5 \text{ и } x_2 = -5.$$

Уравнение $3x^2-14=0$ имеет два действительных решения:

$$x_1 = \sqrt{\frac{14}{3}} \text{ и } x_2 = -\sqrt{\frac{14}{3}},$$

т. е. два действительных корня:

$$\sqrt{\frac{14}{3}} \text{ и } -\sqrt{\frac{14}{3}}.$$

3. Уравнение вида $ax^2+bx=0$ равносильно уравнению

$$x(ax+b)=0.$$

Но уравнение $x(ax+b)=0$ имеет два решения: $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$, т. е. два корня: 0 и $-\frac{b}{a}$.
Следовательно, и уравнение $ax^2+bx=0$ имеет те же два корня.

Обратим внимание на то, что один из двух корней уравнения вида $ax^2+bx=0$ всегда равен нулю.

Примеры. Уравнение $2x^2-5x=0$ имеет два корня: 0 и $\frac{5}{2}$.
Уравнение $2x^2+5x=0$ имеет два корня: 0 и $-\frac{5}{2}$.

Теория полных квадратных уравнений изложена в последующих параграфах.

УПРАЖНЕНИЯ

168. Решите уравнения:

$$5x^2=0;\ 2x^2-98=0;\ 2x^2-3=0;\ x^2+1=0;$$
$$x^2-8x=0;\quad x^2+8x=0;$$
$$2x^2-3x=0;\quad 2x^2+3x=0.$$

§ 3. ПРИВЕДЕННОЕ КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Квадратное уравнение называется приведенным, если коэффициент при квадрате неизвестного равен единице.

Приведенное квадратное уравнение в общем виде принято записывать так:

$$x^2+px+q=0.$$

Чтобы решить это уравнение, прибавим к его левой и правой частям по $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Выражение $\frac{p}{2}$ мы получили, разделив коэффициент p на 2. Мы прибавили $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ для того, чтобы образовать в левой части уравнения разложенный квадрат суммы.

После этого наше уравнение примет вид:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Теперь могут представиться три случая:

Случай 1. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$. Преобразованное уравнение, а следовательно, и исходные не могут иметь действительных решений, ибо $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ не может равняться отрицательному числу $\left(\frac{p}{2}\right)^2-p$.

Случай 2. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$. В этом случае преобразованное уравнение будет удовлетворяться только при $x+\frac{p}{2}=0$, т. е. при $x=-\frac{p}{2}$. Таким образом, в этом случае уравнение имеет единственное решение.

Случай 3. $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$. Преобразованное уравнение удовлетворяется, если

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

или

$$x+\frac{p}{2}=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

т. е. если

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q},$$

или

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Таким образом, в этом случае уравнение имеет два действительных решения:

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ и } x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Оба эти решения удобно записать в виде одной формулы:

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Эта формула читается так:

Корни приведенного квадратного уравнения равны половине коэффициента при неизвестном первой степени, взятого с противоположным знаком, плюс или минус квадратный корень из квадрата этой половины минус свободный член уравнения.

Итак, при решении приведенного квадратного уравнения могут представиться три случая:

Случай 1. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ — уравнение не имеет действительных решений. В этом случае говорят, что уравнение имеет два различных мнимых корня.

Случай 2. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ — уравнение имеет единственное решение: $x = -\frac{p}{2}$. В этом случае говорят, что уравнение имеет два одинаковых корня: $x_1 = -\frac{p}{2}$ и $x_2 = -\frac{p}{2}$.

Случай 3. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ — уравнение имеет два различных действительных решения, вычисляемых по формуле:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Выражение $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ называется дискриминантом уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Пример 1. Решим уравнение $x^2 + 8x - 65 = 0$.

Здесь $p = 8$, $q = -65$.

По формуле имеем

$$x = -4 \pm \sqrt{16 - (-65)} = -4 \pm \sqrt{81} = -4 \pm 9;$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = -13.$$

Пример 2. Решим уравнение:

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

Здесь $p = -8$, $q = 15$.

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1;$$

$$x_1 = 5; \quad x_2 = 3.$$

УПРАЖНЕНИЯ

169. Решите уравнения:

$$x^2 - 6x + 5 = 0; \qquad x^2 - 18x - 19 = 0;$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0; \qquad x^2 + 6x - 14 = 0.$$

170. Имеет ли уравнение

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

какой-нибудь действительный корень?

§ 4. ВЫВОД ФОРМУЛЫ КОРНЕЙ ОБЩЕГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Пусть требуется найти корни уравнения

$$ax^2+bx+c=0.$$

Разделив все члены на a (a не равно нулю), получим приведенное уравнение

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Здесь $p=\frac{b}{a}$ и $q=\frac{c}{a}$.

По формуле приведенного квадратного уравнения имеем:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}};$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad \text{(A)}$$

Выражение b^2-4ac называется дискриминантом уравнения

$$ax^2+bx+c=0.$$

Формула (A) читается так:

Корни квадратного уравнения равны дроби, знаменателем которой является удвоенный коэффициент при неизвестном второй степени, а числителем — коэффициент при неизвестном первой степени, взятый с противоположным знаком, плюс или минус квадратный корень из дискриминанта уравнения.

Уравнение $ax^2+bx+c=0$ называется неприведенным, если $a\neq 1$.

Пример 1. Решим уравнение:

$$2x^2+3x-5=0.$$

Здесь $a=2$, $b=3$, $c=-5$.

По формуле общего квадратного уравнения имеем:

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 2(-5)}}{2\cdot 2};$$

$$x=\frac{-3\pm 7}{4};$$

$$x_1=1; \qquad x_2=-2{,}5.$$

Пример 2. Решим уравнение:

$$3x^2-5x+2=0;$$

$$a=3;\ b=-5;\ c=2;$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3};$$

$$x=\frac{5\pm 1}{6};$$

$$x_1=1;\ x_2=\frac{2}{3}.$$

Пусть в уравнении $ax^2+bx+c=0$ коэффициент b имеет вид $2k$, т. е. имеется уравнение

$$ax^2+2kx+c=0.$$

Решая это уравнение по известной нам формуле, получим:

$$x_{1,2}=\frac{-2k\pm\sqrt{4k^2-4ac}}{2a}=\frac{-2k\pm 2\sqrt{k^2-ac}}{2a}=$$
$$=\frac{2(-k\pm\sqrt{k^2-ac})}{2a},$$

или, наконец,

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Этой формулой следует пользоваться лишь тогда, когда коэффициент b при неизвестном первой степени **четный**. Благодаря этому вычисления упрощаются.

Формула

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$$

отличается от формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

тем, что вместо коэффициента b берется его половина, произведение не учетверяется и в знаменателе коэффициент a не удваивается.

Примеры:

1) $5x^2-18x-72=0;$

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-5\cdot(-72)}}{5}=\frac{9\pm\sqrt{81+360}}{5}=\frac{9\pm 21}{5};$$

$$x_1=6;\qquad x_2=-2,4.$$

2) $3x^2+24x-144=0;$

$$x_{1,2}=\frac{-12\pm\sqrt{144-3\cdot(-144)}}{3}=\frac{-12\pm\sqrt{576}}{3}=\frac{-12\pm24}{3};$$

$$x_1=4; \qquad x_2=-12.$$

Итак, при решении полного квадратного уравнения следует пользоваться тремя формулами:

$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q};$
$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$
$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}.$

Примечание 1. Если в приведенном уравнении $x^2+px+q=0$ коэффициент p нечетный, то удобно пользоваться формулой

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2a},$$

которая следует из формулы

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Примечание 2. Дискриминантом уравнения

$$ax^2+2kx+c=0$$

называется выражение

$$k^2-ac.$$

Пользуясь дискриминантом, можно определять характер корней квадратного уравнения, не решая самого уравнения.

Если дискриминант больше нуля, то уравнение имеет два различных действительных корня.

Если дискриминант равен нулю, то уравнение имеет два одинаковых действительных корня.

Если дискриминант меньше нуля, то уравнение не имеет действительных корней, а имеет два различных мнимых корня.

Примечание. На странице 255 мы говорили, что уравнение $ax^2=0$ имеет один корень: $x=0$. Но поскольку квадратное уравнение имеет, как правило, два корня действительных или мнимых, мы будем говорить, что и уравнение $ax^2=0$ имеет два одинаковых корня: $x_1=0$ и $x_2=0$.

Примеры:

1. Корни уравнения

$$3x^2-5x+4=0$$

мнимые, так как

$$b^2-4ac=5^2-4\cdot 3\cdot 4=-23<0.$$

2. Корни уравнения

$$x^2-8x+15=0$$

действительные и различные, так как

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{8}{2}\right)^2-15=1>0.$$

3. Докажем, что корни уравнения

$$\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=\frac{1}{a^2} \qquad (a\neq 0)$$

будут действительными и различными при любых действительных значениях a, p, q.

Доказательство. После преобразования данного уравнения получим:

$$a^2(x-q)+a^2(x-p)=(x-p)(x-q);$$

$$x^2-(p+q)x+pq=2a^2x-a^2p-a^2q;$$

$$x^2-(p+q+2a^2)x+pq+a^2p+a^2q=0.$$

Дискриминант этого уравнения равен

$$(p+q+2a^2)^2-4(pq+a^2p+a^2q).$$

Преобразовав этот дискриминант, получим:

$$p^2+q^2+4a^4+2pq+4a^2p+4a^2q-4pq-4a^2p-4a^2q,$$

или

$$p^2+q^2-2pq+4a^4, \text{ или } (p-q)^2+4a^4.$$

При любых значениях a, p, q выражение

$$(p-q)^2+4a^4$$

будет числом положительным, так как $a\neq 0$.

Но если дискриминант квадратного уравнения является положительным числом, то уравнение имеет два различных действительных корня. Таким образом, высказанное утверждение доказано.

§ 5. ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ, ПРИВОДИМЫХ К КВАДРАТНОМУ УРАВНЕНИЮ

Задача 1. В квартире проектируются две комнаты одинаковой ширины (рис. 50). Длину первой комнаты хотят сделать в $1\frac{1}{2}$ раза больше ее ширины, а длину второй — равной 7,2 *м*.

Найти ширину этих комнат, если их общая площадь должна быть равной 56,7 *кв. м.*

Обозначим ширину комнат, выраженную в метрах, буквой x. Тогда площадь первой комнаты будет равна $1\frac{1}{2}x \cdot x$ $м^2$, а площадь второй $7{,}2 \cdot x$ $м^2$.

По условию задачи

$$1\frac{1}{2}x^2 + 7{,}2x = 56{,}7,$$

или

$$3x^2 + 14{,}4x - 113{,}4 = 0.$$

Отсюда

$$x_{1,2} = \frac{-7{,}2 \pm \sqrt{7{,}2^2 - 3 \cdot (-113{,}4)}}{3},$$

или последовательно

$$x_{1,2} = \frac{-7{,}2 \pm \sqrt{51{,}84 + 340{,}2}}{3},$$

$$x_{1,2} = \frac{-7{,}2 \pm \sqrt{392{,}04}}{3},$$

$$x_{1,2} = \frac{-7{,}2 \pm 19{,}8}{3}.$$

Значит

$$x_1 = 4{,}2 \text{ и } x_2 = -9.$$

Оба эти числа удовлетворяют уравнению, составленному по условиям задачи. Но самой задаче удовлетворяет лишь первый корень, так как ширина комнаты отрицательной быть не может.

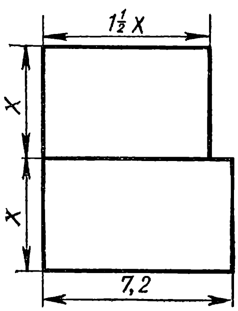


Рис. 50.

Итак, искомая ширина равна 4,2 *м.*

Задача 2. Пароход должен был пройти расстояние 48 *км* с определенной средней скоростью. Но по некоторым причинам он шел первую половину пути со скоростью, на 2 *км* в час меньшей, и вторую половину со скоростью, на 2 *км* большей, чем ему полагалось. Таким образом, пароход затратил на весь путь 5 час. На сколько минут опоздал пароход?

Пусть средняя скорость парохода должна была быть x *км* в час. На прохождение первой половины пути пароход затратил $\frac{24}{x-2}$ часа, а второй половины $\frac{24}{x+2}$ часа.

По условию

$$\frac{24}{x-2} + \frac{24}{x+2} = 5. \qquad (1)$$

Получилось дробное уравнение. Преобразуем его к виду целого уравнения. Для этого умножим обе части уравнения на общий знаменатель $(x-2)(x+2)$ всех дробей, входящих в него. После этого получим:

$$24(x+2)+24(x-2)=5(x-2)(x+2),$$

или

$$48x=5(x^2-4),$$

или

$$5x^2-48x-20=0.$$

Отсюда

$$x_{1,2}=\frac{24\pm\sqrt{24^2-5\cdot(-20)}}{5}=\frac{24\pm\sqrt{576+100}}{5}=\frac{24\pm26}{5}.$$

Итак,

$$x_1=10, \quad x_2=-\frac{2}{5}.$$

Числа 10 и $-\frac{2}{5}$, несомненно, являются корнями уравнения

$$5x^2-48x-20=0.$$

Но мы еще не можем быть уверены в том, что они являются и корнями первоначального уравнения

$$\frac{24}{x-2}+\frac{24}{x+2}=5,$$

так как во время преобразований мы умножили левую и правую части уравнения (1) на выражение $(x-2)\cdot(x+2)$, содержащее неизвестное.

Проверка показывает, что оба эти числа удовлетворяют и первоначальному уравнению.

Действительно, оба равенства

$$\frac{24}{10-2}+\frac{24}{10+2}=5, \quad \frac{24}{-\frac{2}{5}-2}+\frac{24}{-\frac{2}{5}+2}=5$$

оказываются верными.

Итак, числа 10 и $-\frac{2}{5}$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{24}{x-2}+\frac{24}{x+2}=5.$$

Но из них только число 10 удовлетворяет условиям самой задачи, так как в этой задаче скорость отрицательной быть не может. Значит, средняя скорость парохода была равной 10 *км* в час.

Теперь выясним, на сколько же минут опоздал пароход с прибытием к месту назначения. Поскольку все расстояние было равно 48 *км*, а средняя скорость, с которой он должен был пройти это расстояние, составляла 10 *км* в час, на весь путь он должен был затратить $\frac{48}{10}$ часа, т. е. 4 часа 48 мин. Но пароход затратил на весь путь 5 час. Значит, он опоздал на 12 мин.

УПРАЖНЕНИЯ

171. Решить уравнение:

$$(a^2-b^2)x^2-4abx-a^2+b^2=0. \text{ Отв. } x_1=\frac{a+b}{a-b},$$

$$x_2=\frac{b-a}{a+b}.$$

172. Найти корни уравнения $x^2-2x-5=0$ с точностью до 0,01.

173. При каком значении буквы m уравнение x^2-10x+ $+m=0$ будет иметь один двукратный корень?

Отв. $m=25$.

174. При каких значениях буквы m уравнение

$$(m-1)x^2-4x+(m+2)=0$$

будет иметь один двукратный корень?

Отв. $m_1=2$, $m_2=-3$.

175. От листа железа квадратной формы отрезали полосу шириной 25 *см*. Определить размеры первоначального листа, если площадь оставшейся части оказалась равной 4400 *кв. см*.

Отв. 80 *см*.

176. Известно, что комната прямоугольной формы производит наиболее приятное впечатление, когда отношение суммы длины и ширины к длине равно отношению длины к ширине. Каково должно быть отношение длины комнаты к ширине, чтобы комната производила наиболее приятное впечатление?

177. Две машины, работая совместно, могут скосить участок поля за 12 час. Первая из них в отдельности может скосить участок на 10 час. скорее, чем одна вторая. За сколько часов может скосить участок каждая машина в отдельности?

178. Токарь должен был изготовить в назначенный ему срок некоторое число одинаковых деталей. Если бы он ежедневно стал изготовлять на одну деталь больше, то выполнил бы эту работу на 5 дней раньше срока, а если бы он стал изготовлять в день на одну деталь меньше, то опоздал бы на 7 дней против назначенного срока. Сколько деталей и в какой срок токарь должен был изготовить?

179. Магазин продал по ошибке на 312 руб. ткани по цене, на 50 коп. меньшей прейскурантной цены, и на такую же сумму по цене, на 50 коп. большей той же прейскурантной цены. Всего ткани по ошибочным ценам было продано 50 *м*. Какую сумму недополучил магазин в результате этих ошибок?

180. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v = 980$ *м/сек.* Через сколько секунд оно упадет на землю, если расстояние S тела от поверхности земли определяется формулой $S = vt - \frac{gt^2}{2}$, где t — время в секундах, $g \approx 9{,}8\ \frac{м}{сек^2}$. (Сопротивлением воздуха мы пренебрегаем.)

Указание. В момент падения тела на землю $S = 0$.

§ 6. ВЫДЕЛЕНИЕ ПОЛНОГО КВАДРАТА ИЗ МНОГОЧЛЕНА 2-й СТЕПЕНИ

Выражение $Ax^2 + Bx + C$ называется многочленом 2-й степени относительно величины x, записанным в общем виде. Здесь буква x может принимать любые значения, т. е. она обозначает собой величину, могущую изменяться как угодно. Что же касается букв A, B и C, то они обозначают собой наперед выбранные известные числа, остающиеся неизменными при всех изменениях величины x. Буквы A, B и C называются коэффициентами многочлена, причем предполагается, что $A \neq 0$. Буква же x называется независимой переменной. (Если мы здесь величину x называем «независимой переменной», то это значит, что она может изменяться как угодно, независимо ни от чего.)

Выделение полного квадрата из многочлена 2-й степени является одним из важных преобразований, имеющим применения в ряде вопросов большой значимости. Это преобразование мы выполним сначала без пояснений, а затем дадим и пояснения.

Преобразование без пояснений:

$$Ax^2 + Bx + C = A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right) =$$
$$= A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{B^2}{4A^2} + \frac{C}{A}\right) =$$
$$= A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 - \left(\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}\right)\right].$$

Пояснения:

1. Мы начали с того, что многочлен $Ax^2 + Bx + C$ представили в виде произведения

$$A\left(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}\right).$$

Законность этой операции вытекает из распределительного свойства умножения.

2. Вторая операция заключалась в том, что мы заменили внутри скобок выражение $x^2+\frac{B}{4A}x+\frac{C}{A}$ равным ему выражением

$$x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}-\frac{B^2}{4A^2}+\frac{C}{A},$$

которое получилось введением двух новых вспомогательных членов $+\frac{B^2}{4A^2}$ и $-\frac{B^2}{4A^2}$.

Вспомогательный член $\frac{B^2}{4A^2}$ образован следующим образом: мы взяли множитель $\frac{B}{A}$, стоящий перед буквой x во втором члене многочлена $x^2+\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}$, затем разделили этот множитель на два и получили выражение $\frac{B}{2A}$; после этого выражение $\frac{B}{2A}$ возвели в квадрат, т. е. умножили само на себя, в результате чего и получилось $\frac{B^2}{4A^2}$.

3. Далее выражение $x^2+\frac{B}{A}x+\frac{B^2}{4A^2}$ заменили тождественно равным ему выражением $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2$, а остальные два члена многочлена заключили в скобки, поставив перед скобками знак минус.

Примеры на выделение полного квадрата:

1. $x^2+10x+60=x^2+10x+25-25+60=(x+5)^2+35;$
2. $x^2-10x+50=x^2-10x+25-25+50=(x-5)^2+25;$
3. $$2x^2+5x+20=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+10\right)=$$
$$=2\left(x^2+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}+10\right)=$$
$$=2\left[\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+8\frac{7}{16}\right];$$
4. $$-x^2+10x-20=(-1)\ (x^2-10x+20)=$$
$$=(-1)\ (x^2-10x+25-25+20)=$$
$$=(-1)\ [(x-5)^2-5]=-(x-5)^2+5=5-(x-5)^2;$$
5. $$-2x^2+5x-10=(-2)\left(x^2-\frac{5}{2}x+5\right)=$$
$$=(-2)\left(x^2-\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}-\frac{25}{16}+5\right)=$$
$$=(-2)\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+3\frac{7}{16}\right];$$
6. $$x^2+3xy+2y^2=$$
$$=x^2+3xy+\frac{9}{4}y^2-\frac{9}{4}y^2+2y^2=$$
$$=\left(x+\frac{3}{2}y\right)^2-\frac{1}{4}y^2.$$

Выделение полного квадрата из многочлена 2-й степени будем называть ради краткости «выделением полного квадрата». Первые применения этого преобразования к решению задач мы имели в главе III § 8.

§ 7. СВОЙСТВА КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ*

1. Корни уравнения $ax^2+bx+c=0$ обозначим через x_1 и x_2. Как известно,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } x^2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Очевидно, что

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$\text{а } x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Итак, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1x_2=\frac{c}{a}$. Например, для уравнения $5x^2-48x-20=0$

$$x_1+x_2=\frac{48}{5} \text{ и } x_1x_2=\frac{-20}{5}=-4.$$

2. Полученный результат можно записать в таком виде:

$$b=-a(x_1+x_2),$$
$$c=ax_1x_2.$$

Для уравнения

$$x^2+px+q=0$$

получим, что

$$x_1+x_2=-\frac{p}{1}=-p \text{ и } x_1x_2=\frac{q}{1}=q.$$

Итак, ***в приведенном квадратном уравнении сумма корней равна коэффициенту при неизвестном первой степени, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену:***

$$x_1+x_2=-p, \quad x_1x_2=q.$$

---

* Свойства корней квадратного уравнения являются частным случаем теоремы Виета о свойствах корней уравнения любой степени (см. гл. «Теорема Гаусса и свойства целой рациональной функции»).

3. Полученные результаты можно сформулировать и иначе: ***в приведенном квадратном уравнении коэффициент при неизвестном первой степени равен взятой с противоположным знаком сумме корней,*** т. е.

$$p = -(x_1 + x_2),$$

а свободный член равен произведению корней, т. е.

$$q = x_1 \cdot x_2$$

§ 8. КОРЕНЬ МНОГОЧЛЕНА

1. ***Корнем многочлена (целой рациональной функции)***

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

называется всякое число, которое, будучи подставлено в этот многочлен вместо буквы x, обращает значение многочлена в нуль. Например, числа: 1; -2; 5 суть корни многочлена

$$x^3 - 4x^2 - 7x + 10.$$

2. Совокупность корней многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

это то же самое, что и совокупность корней уравнения

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

3. Буква x, входящая в многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, обозначает собой независимую переменную, т. е. величину, могущую принимать любые значения. Та же буква x в уравнении

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

обозначает собой величину неизвестную, могущую принимать лишь такие значения, которые удовлетворяют этому уравнению.

Корнями многочлена

$$ax^2 + bx + c$$

будут как раз корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

и наоборот.

Корни многочлена

$$ax^2 + bx + c$$

можно находить путем решения уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

§ 9. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ МНОГОЧЛЕНА ax^2+bx+c

Теорема. ***Многочлен ax^2+bx+c тождественно равен произведению***

$$a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни этого многочлена.

Докажем теорему двумя способами.

Способ 1. Обозначим корни многочлена ax^2+bx+c через x_1 и x_2. Тогда $b=-a(x_1+x_2)$ и $c=ax_1x_2$ (см. стр. 269). Поэтому

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=a[x^2-x_1x-x_2x+ +x_1x_2]=a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]=a(x-x_1)(x-x_2),$$

что и требовалось доказать.

Способ 2.

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right]=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{*}=$$

$$=a\left[x-\left(\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2}}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right]=$$

$$=a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Выражения $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ как раз представляют собой корни x_1 и x_2 уравнения $ax^2+bx+c=0$, а значит, и корни многочлена ax^2+bx+c.

Замечание. Если x_1 и x_2 будут действительными и различными числами, то линейные множители $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$ в разложении $a(x-x_1)(x-x_2)$ будут действительными и различными. Если же x_1 и x_2 будут мнимые, то и линейные множители $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$ будут также мнимыми. В том случае, когда $x_1=x_2$, разложение примет вид $a\cdot(x-x_1)^2$.

Примеры:

1) Корни многочлена $5x^2-48x-20$ суть 10 и $-\frac{2}{5}$. Поэтому

$$5x^2-48x-20=5(x-10)\left(x+\frac{2}{5}\right).$$

---

* Мы воспользовались формулой $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$.

2) Корни многочлена $2x^2 - 7x + 6$ суть $\frac{3}{2}$ и 2. Поэтому

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2).$$

3) Корни многочлена

$$x^2 - 8x + 15 \text{ суть } 3 \text{ и } 5.$$

Поэтому

$$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5).$$

§ 10. СОСТАВЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ЕГО КОРНЯМ

Способ 1. Пусть x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения. Тогда само уравнение (см. стр. 269) будет:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Примеры:

1) Если корни уравнения 3 и 5, то само уравнение будет:

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

2) Если корни $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$, то уравнение

$$x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0,$$

или

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

3) Если корни $\frac{m}{n}$ и $\frac{n}{m}$, то уравнение

$$x^2 - \left(\frac{m}{n} + \frac{n}{m}\right)x + 1 = 0,$$

или

$$mnx^2 - (m^2 + n^2)x + mn = 0.$$

Способ 2. Если корни уравнения x_1 и x_2, то само уравнение будет:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Этот способ мы можем применить к составлению уравнений любых степеней.

Пусть корни уравнения 3; 5 и 10, тогда само уравнение будет:

$$(x - 3)(x - 5)(x - 10) = 0,$$

или

$$x^3 - 18x^2 + 95x - 150 = 0.$$

Пусть корни уравнения -1; -2: -3; -4. Тогда само уравнение будет:

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=0,$$

или

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+24=0.$$

§ 11. УСЛОВИЕ, ПРИ КОТОРОМ ТРЕХЧЛЕН Ax^2+Bx+C ПРЕДСТАВЛЯЕТ ТОЧНЫЙ КВАДРАТ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

Мы знаем, что

$$Ax^2+Bx+C=A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2-4AC}{4A^2}\right].$$

Но правая часть этого тождества будет точным квадратом тогда и только тогда, когда

$$B^2-4AC=0 \text{ и } A>0.$$

В этом случае мы получаем, что

$$Ax^2+Bx+C=A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2=\left[\sqrt{A}\left(x+\frac{B}{2A}\right)\right]^2.$$

Итак, трехчлен 2-й степени будет точным квадратом линейной функции с действительными коэффициентами тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю, а коэффициент при высшем члене положителен.

§ 12. НАИМЕНЬШЕЕ ИЛИ НАИБОЛЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЕ КВАДРАТНОЙ ФУНКЦИИ

С помощью выделения полного квадрата можно представить функцию

$$y=ax^2+bx+c$$

в виде

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Из этой формулы видно следующее:

1. Если $a>0$, то квадратная функция $y=ax^2+bx+c$ будет иметь наименьшее значение при $x=-\frac{b}{2a}$.

Действительно, при $a>0$ выражение $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ не может принимать отрицательных значений. Значит, самое меньшее значение, которое оно может принять, есть нуль. Нулю же оно будет равно лишь при $x=-\frac{b}{2a}$.

Следовательно, функция

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

а значит, и функция

$$y=ax^2+bx+c$$

будут иметь наименьшее значение при $x=-\frac{b}{2a}$. Наименьшее значение функции y будет равно $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. Если $a<0$, то квадратная функция $y=ax^2+bx+c$ будет иметь наибольшее значение при $x=-\frac{b}{2a}$.

Действительно, при $a<0$ выражение $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ не может принимать положительных значений. Значит, самое большее значение, которое оно может принять, есть нуль. Нулю же оно будет равно лишь при $x=-\frac{b}{2a}$.

Следовательно, функция

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a},$$

а значит, и функция

$$y=ax^2+bx+c$$

будут иметь наибольшее значение при $x=-\frac{b}{2a}$.

Наибольшее значение функции y будет равно $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

Примеры на нахождение наименьшего и наибольшего значения многочлена ax^2+bx+c мы уже встречали при решении задач в § 8 главы III.

Примечание. Многочлен ax^2+bx+c при $a>0$ не имеет наибольшего значения, а при $a<0$ не имеет наименьшего значения.

§ 13. ПОНЯТИЕ О КРАТНЫХ КОРНЯХ

Число a удовлетворяет каждому из уравнений

$$x-a=0,\ (x-a)^2=0,\ (x-a)^3=0,\ \ldots,\ (x-a)^n=0.$$

По отношению к уравнению $(x-a)^n=0$ принято говорить, что число a является его n-кратным корнем, или корнем, имеющим кратность n. Это объясняется так:

Уравнение $(x-a)^n=0$ можно представить в виде

$$(x-a)(x-a)\ldots(x-a)=0.$$

Приравнивая нулю каждый множитель, получим n корней, каждый из которых равен a. Поэтому число a и называется n-кратным корнем этого уравнения.

Корень, кратность которого равна единице, называется простым.

Следовательно, число a является простым корнем уравнения $x-a=0$, двукратным корнем уравнения $(x-a)^2=0$, трехкратным корнем уравнения $(x-a)^3=0$ и т. д.

Для уравнения $5x^2=0$ нуль является двукратным корнем. Для уравнения $(x-4)(x-7)^2(x-8)^3=0$ число 4 является простым корнем, число 7 — двукратным, а число 8 — трехкратным корнем.

Теперь, когда мы ввели понятие о кратности корней уравнения, нам необходимо уточнить определение о равносильности уравнений, данное ранее (стр. 152).

Если всякий корень кратности n одного уравнения является корнем той же кратности другого уравнения и наоборот, то такие уравнения называются равносильными.

Уравнения $x^2-2x+1=0$ и $x-1=0$ не равносильны. (Для первого уравнения единица является двукратным корнем, а для второго лишь простым.)

Уравнения $(x-7)^3=0$ и $(x-7)^2=0$ не равносильны. (Для первого уравнения число 7 является трехкратным корнем, а для второго лишь двукратным.)

УПРАЖНЕНИЯ

181. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

182. Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа $m+\sqrt{n}$ и $m-\sqrt{n}$.

183. Разложить на множители: 1) $x^2-19x+48$; 2) $15x^2-7x-2$.

184. Не решая уравнения $ax^2+bx+c=0$, найти сумму квадратов его корней.

Отв. $\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

185. Разложить на множители выражение

$$(x^2+x+5)^2+8x(x^2+x+5)+15x^2.$$

186. Какому условию должны удовлетворять числа a и b, чтобы многочлен

$$(a^2+b^2+1)x^2+(a+b)x+\frac{1}{4}$$

стал точным квадратом линейной функции?

187. Вывести формулу для решения уравнения

$$x^2+px+q=0$$

с помощью преобразования $x=y+h$, где буквой y обозначено новое неизвестное, а буква h обозначает число, которое надо выбрать так, чтобы коэффициент при новом неизвестном y в преобразованном уравнении обратился в нуль.

188. Вывести формулу для решения уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

с помощью преобразования $x=y+h$.

189. Доказать, что площадь прямоугольника с заданным периметром p имеет наибольшую площадь тогда, когда его длина и ширина будут одинаковыми.

190. Радиус основания прямого кругового конуса равен r, а высота конуса равна h. В конус вписан цилиндр. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы боковая поверхность цилиндра оказалась наибольшей? (Боковая поверхность цилиндра равна $2\pi xy$, где x — радиус основания, а y — высота цилиндра.)

ГЛАВА XVII

УРАВНЕНИЯ С ЧИСЛОВЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ПРИВОДИМЫЕ К КВАДРАТНЫМ*

§ 1. БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Целое уравнение, содержащее только четвертую вторую и нулевую степени неизвестного, называется биквадратным.

Общий вид биквадратного уравнения таков:

$$ax^4+bx^2+c=0.$$

Решим несколько биквадратных уравнений с числовыми коэффициентами.

Примеры:

1. Найти все корни уравнения

$$x^4-13x^2+36=0.$$

Примем x^2 за новую неизвестную, т. е. положим, что $x^2=y$. Тогда получим, что

$$y^2-13z+36=0.$$

Отсюда

$$y=\frac{13\pm\sqrt{13^2-4\cdot 36}}{2}, \text{ т. е.}$$

$$y_1=9 \text{ и } y_2=4.$$

Принимая сначала $x^2=9$, получим, что $x_1=3$; $x_2=-3$. Принимая затем $x^2=4$, получим, что $x_3=2$, $x_4=-2$.

Итак, первоначальное уравнение имеет четыре корня:

$$2;\ -2;\ 3;\ -3.$$

2. Найти все действительные корни уравнения

$$x^4-5x^2-36=0.$$

---

* Такие же уравнения с буквенными коэффициентами будут рассмотрены во второй части курса.

Положив $x^2=y$, получим, что $y^2-5y-36=0$; из этого уравнения следует, что

$$y_1=9 \text{ и } y_2=-4.$$

Отсюда, во-первых, $x^2=9$ и, во-вторых, $x^2=-4$. Первое уравнение имеет два корня: 3 и -3. Второе уравнение действительных корней не имеет.

Итак, данное биквадратное уравнение имеет лишь два действительных корня: 3 и -3.

3. Показать, что уравнение $x^4+3x^2+2=0$ не имеет ни одного действительного корня.

Полагая $x^2=y$, получим:

$$y^2+3y+2=0.$$

Отсюда

$$y=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2},$$

или

$$y_1=-1 \text{ и } y_2=-2.$$

Уравнения $x^2=-1$ и $x^2=-2$ действительных корней не имеют, а поэтому и данное биквадратное уравнение не имеет ни одного действительного корня.

§ 2. УРАВНЕНИЯ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ КВАДРАТНЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЫРАЖЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО НЕИЗВЕСТНОЕ

Уравнение

$$az^2+bz+c=0$$

есть квадратное уравнение относительно z.

Уравнение

$$a(x^2-3x+2)^2+b(x^2-3x+2)+c=0$$

есть квадратное уравнение относительно x^2-3x+2.

Примеры:

$$(x^2-3x+6)^2-13(x^2-3x+6)+36=0.$$

1. Полагая $x^2-3x+6=y$, получим, что $y^2-13y+36=0$. Отсюда $y_1=4$ и $y_2=9$. Принимая сначала $x^2-3x+6=4$, получим, что $x^2-3x+2=0$, отсюда $x_1=1$ и $x_2=2$. Принимая затем $x^2-3x+6=9$, получим, что $x^2-3x-3=0$, отсюда $x_3=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ и $x_4=\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Итак, первоначальное уравнение имеет четыре корня:

$$1;\ 2;\ \frac{3+\sqrt{21}}{2} \text{ и } \frac{3-\sqrt{21}}{2}.$$

2. Найти действительные корни уравнения

$$(x^2+x+1)^2-2x^2-2x-26=0.$$

Перепишем уравнение в виде: $(x^2+x+1)^2-2x^2-2x-2-24=0$, или

$$(x^2+x+1)^2-2(x^2+x+1)-24=0.$$

Полагая $x^2+x+1=y$, получим:

$$y^2-2y-24=0,$$

отсюда

$$y_1=6 \text{ и } y_2=-4.$$

Принимая сначала $x^2+x+1=6$, получим:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \text{ и } x_2=\frac{-1-\sqrt{21}}{2}.$$

Принимая затем $x^2+x+1=-4$, получим:

$$x^2-x+5=0.$$

Последнее уравнение действительных корней не имеет. Поэтому первоначальное уравнение имеет лишь два действительных корня:

$$\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \text{ и } \frac{-1-\sqrt{21}}{2}.$$

§ 3. ВОЗВРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ 3-й и 4-й СТЕПЕНИ

Общий вид возвратного уравнения 3-й степени таков:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0 \qquad (a\neq 0).$$

Общий вид возвратного уравнения 4-й степени таков:

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \qquad (a\neq 0).$$

1. Решим возвратное уравнение 3-й степени:

$$2x^3-11x^2-11x+2=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители. Для этого перепишем уравнение в виде:

$$2(x^3+1)-11x(x+1)=0,$$

или

$$(x+1)[2(x^2-x+1)-11x]=0,$$

или

$$(x+1)(2x^2-13x+2)=0.$$

Последнее уравнение удовлетворяется и тогда, когда $x+1=0$, и тогда, когда $2x^2-13x+2=0$. Ни при каких других условиях оно не удовлетворяется.

Решая уравнение $x+1=0$, получим, что $x=-1$.
Решая уравнение $2x^2-13x+2=0$, получим:

$$x=\frac{13+\sqrt{153}}{4} \text{ и } x=\frac{13-\sqrt{153}}{4}.$$

Итак, первоначальное уравнение имеет три корня:

$$-1;\ \frac{13+\sqrt{153}}{4} \text{ и } \frac{13-\sqrt{153}}{4}.$$

2. Решим возвратное уравнение 4-й степени:

$$x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0.$$

В этом уравнении x не может равняться нулю. Поэтому мы можем разделить все члены данного уравнения на x^2 и записать его в следующем виде:

$$x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

или

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0.$$

Полагая $x+\frac{1}{x}=y$, получим, что $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2$,
или

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Принимая все это во внимание, получим следующее уравнение с неизвестным y:

$$y^2-2-10y+26=0,$$

или

$$y^2-10y+24=0.$$

Отсюда найдем два значения неизвестного y, а именно: $y=6$ и $y=4$. Принимая сначала $x+\frac{1}{x}=6$, получим, что $x^2-6x+1=0$. Отсюда найдем два значения неизвестного x, а именно:

$$x_1=3+\sqrt{8} \text{ и } x_2=3-\sqrt{8}.$$

Принимая затем $x+\frac{1}{x}=4$, получим, что $x^2-4x+1=0$, откуда найдем еще два значения неизвестного x, а именно:

$$x_3=2+\sqrt{3} \text{ и } x_4=2-\sqrt{3}.$$

Итак, первоначальное уравнение имеет четыре корня:

$$3+\sqrt{8};\ 3-\sqrt{8};\ 2+\sqrt{3}\ \text{и}\ 2-\sqrt{3}.$$

Вопрос о решении разобранных в этой главе типов уравнений будет рассмотрен полнее во второй части курса.

УПРАЖНЕНИЯ

191. Решить уравнения:

1) $3x^4-7x^2+2=0$; 2) $(x^2-5x)^2-4(x^2-5x)=12$;

3) $(x^2-x+2)^2-3(x^2-x+3)=1$;

4) $2x^3-5x^2-5x+2=0$;

5) $x^4-3x^3+2x^2-3x+1=0$.

ГЛАВА XVIII
ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Задача. В треугольнике ABC (рис. 51):

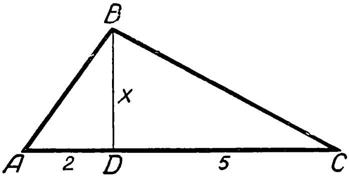


Рис. 51.

$$BD \perp AC,$$
$$AD = 2 \text{ см}, \quad DC = 5 \text{ см},$$
$$AB + BC = 9 \text{ см}.$$

Найти BD.

Решение. Пусть длина отрезка BD равна x *см*. Тогда

$$AB = \sqrt{x^2 + 4} \text{ и } BC = \sqrt{x^2 + 25}.$$

По условию

$$\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 25} = 9.$$

Получилось уравнение, в котором неизвестное входит в подкоренное выражение. Такое уравнение называется иррациональным. Решение этого уравнения приведено на странице 285 (пример 2).

Определение. ***Уравнение, в котором неизвестное входит в какое-либо выражение, стоящее под знаком корня, называется иррациональным.***

Во многих случаях иррациональное уравнение, как это ниже показано на примерах, может быть преобразовано в рациональное, являющееся его следствием. Но прежде чем показать это на примерах, мы изложим предварительные сведения, необходимые для понимания процесса решения иррациональных уравнений.

1. Всякий корень четной степени из положительного числа, входящий в иррациональное уравнение, мы будем считать, как и раньше, арифметическим. Поясним это. Если $A > 0$ и в иррациональное уравнение входит $\sqrt[2k]{A}$, то всегда будем считать, что

$$\sqrt[2k]{A} > 0.$$

Принимая во внимание сказанное выше, мы должны считать, что, например, уравнение

$$\sqrt{x-3}=-1$$

не имеет корней. Действительно,

при $x>3$ $\sqrt{x-3}>0$,

при $x=3$ $\sqrt{x-3}=0$,

при $x<3$ $\sqrt{x-3}$ — мнимое число.

Таким образом, $\sqrt{x-3}$ никогда не может равняться числу -1, а это и значит, что уравнение

$$\sqrt{x-3}=-1$$

корней не имеет.

Было бы ошибкой считать число 4 корнем уравнения $\sqrt{x-3}=-1$, так как $\sqrt{1}\neq-1$. Аналогично можно убедиться, что ни одно из следующих уравнений $\sqrt{x-1}+1=-3$; $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=-2$; $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$ также не имеет корней.

2. Теорема. ***Если обе части уравнения $A=B$ возвысить в квадрат, то полученное уравнение $A^2=B^2$ будет иметь своими корнями все корни данного уравнения $A=B$ и корни уравнения $A=-B$.*** (Уравнение $A=-B$ будем называть сопряженным уравнению $A=B$.) Но прежде чем доказывать эту теорему, поясним ее содержание на примере. Рассмотрим уравнение $x+1=5$ и уравнение, ему сопряженное, т. е. $x+1=-5$. У первого уравнения имеется единственный корень 4, а у второго — 6. Возведя левую и правую части уравнения $x+1=5$ в квадрат, получим, что $(x+1)^2=25$.

Решив это уравнение, убедимся, что его корнями будут числа 4 и -6, т. е. только корни данного уравнения $x+1=5$ и сопряженного ему уравнения $x+1=-5$.

Как раз в этом и заключается смысл сформулированной выше теоремы.

Доказательство теоремы. Уравнение $A^2=B^2$ равносильно уравнению $A^2-B^2=0$, или уравнению $(A-B)(A+B)=0$. Но это последнее уравнение удовлетворяется как при $A=B$, так и при $A=-B$ и никогда больше. Теорема доказана.

Следствие. Из доказанной теоремы вытекает, что при переходе от уравнения $A=B$ к уравнению $A^2=B^2$ потери корней не произойдет, но могут появиться посторонние корни, а именно корни уравнения $A=-B$.

Если окажется, что уравнение $A=-B$ не имеет корней, то посторонних корней не окажется.

§ 2. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ТОЛЬКО ОДИН РАДИКАЛ

Возьмем уравнение

$$5+\sqrt{x^2+x+7}=2x.$$

Уединив корень, получим:

$$\sqrt{x^2+x+7}=2x-5.$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат. В результате получим рациональное уравнение

$$x^2+x+7=(2x-5)^2.$$

Решив последнее уравнение, получим, что

$$x_1=6 \text{ и } x_2=1.$$

Теперь необходимо проверить, являются ли числа 6 и 1 корнями данного уравнения. Проверка показывает, что число 6 является корнем уравнения $5+\sqrt{x^2+x+7}=2x$, а число 1 его корнем не является. Мы возводили в квадрат левую и правую части уравнения $\sqrt{x^2+x+7}=2x-5$. Значит, число 1 есть корень сопряженного уравнения, т. е. уравнения

$$\sqrt{x^2+x+7}=-(2x-5).$$

Итак, иррациональное уравнение

$$5+\sqrt{x^2+x+7}=2x$$

имеет лишь один корень, равный числу 6.

Возьмем еще одно уравнение, содержащее только один радикал, а именно:

$$\sqrt{x-5}=10.$$

Здесь корень уже уединен. Поэтому, возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x-5=10^2, \text{ откуда } x=105.$$

Проверка показывает, что число 105 является корнем данного уравнения. Здесь мы не получили постороннего корня, потому что сопряженное уравнение, т. е. уравнение $\sqrt{x-5}=-10$, корней не имеет.

Примеры:

а) $x+\sqrt{x^2+(x+7)^2}=18$; г) $x^2+50x-275=0$;

б) $\sqrt{x^2+(x+7)^2}=18-x$; д) $x=-25\pm\sqrt{625+275}$;

в) $x^2+(x+7)^2=(18-x)^2$; е) $x_1=5$ и $x_2=-55$.

Проверка показывает, что оба числа 5 и -55 являются корнями уравнения

$$\sqrt{x^2+(x+7)^2}=18-x.$$

Значит, сопряженное уравнение, т. е. уравнение

$$\sqrt{x^2+(x+7)^2}=-(18-x),$$

корней не имеет.

§ 3. УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ДВА КВАДРАТНЫХ РАДИКАЛА

Пример 1. $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$.
Уединим один из корней:

$$\sqrt{2x-15}=\sqrt{x+16}-1.$$

Возведем в квадрат левую и правую части последнего уравнения:

$$2x-15=x+16-2\sqrt{x+16}+1.$$

Уединим один оставшийся корень:

$$x-32=-2\sqrt{x+16}, \qquad x=34\pm\sqrt{1156-960}.$$
$$(x-32)^2=(-2\sqrt{x+16})^2, \qquad x=34\pm 14.$$
$$x^2-64x+1024=4(x+16), \quad x_1=48 \text{ и } x_2=20.$$
$$x^2-68x+960=0.$$

Проверкой устанавливаем, что данное уравнение $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$ имеет только один корень, равный числу 20.

Пример 2. В качестве второго примера решим уравнение

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+25}=9,$$

составленное по условиям задачи, поставленной в начале настоящей главы.

$$\sqrt{x^2+25}=9-\sqrt{x^2+4}; \quad x^2+25=(9-\sqrt{x^2+4})^2; \quad x^2+25=$$
$$=81-18\sqrt{x^2+4}+x^2+4; \quad 18\sqrt{x^2+4}=60; \quad 3\sqrt{x^2+4}=10;$$
$$9x^2+36=100; \quad 9x^2=64; \quad x_1=\frac{8}{3} \text{ и } x_2=-\frac{8}{3}.$$

Легко убедиться, что оба числа $\frac{8}{3}$ и $-\frac{8}{3}$ являются корнями уравнения $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+25}=9$. Но мы знаем, что не всякий корень уравнения, составленного по условиям задачи, обязательно должен являться и решением самой задачи. В данном случае решением задачи будет только положительный корень $\frac{8}{3}$. Значит, искомая высота BD треугольника ABC будет равна $2\frac{2}{3}$ *см*.

Пример 3.

$$\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=5.$$

Уединим один из корней: $\sqrt{x+17}=5+\sqrt{x-7}$.
Возведем в квадрат левую и правую части этого уравнения:

$$x+17=(5+\sqrt{x-7})^2,$$
$$x+17=25+10\sqrt{x-7}+x-7,$$
$$-1=10\sqrt{x-7}.$$

Последнее уравнение корней не имеет, ибо его левая часть есть отрицательное число, а правая часть ни при каком значении x не может быть числом отрицательным. Значит, и первоначальное уравнение корней не имеет.

§ 4. ИСКУССТВЕННЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пример 1.

$$\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0.$$

Примем $\sqrt[3]{x}$ за новое неизвестное и положим, что $\sqrt[3]{x}=y$. Тогда $\sqrt[3]{x^2}=y^2$, и данное уравнение примет вид:

$$y^2-3y+2=0.$$

Отсюда $y_1=2$ и $y_2=1$.

Приняв $\sqrt[3]{x}=2$, получим, что $x_1=8$.

Приняв затем $\sqrt[3]{x}=1$, получим, что $x_2=1$. Оба числа 8 и 1 являются корнями данного уравнения.

Пример 2.

$$2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1.$$

Положим, что $\sqrt{x^2-2x+4}=y$. Тогда $x^2-2x+4=y^2$ и $x^2-2x=y^2-4$. Относительно нового неизвестного y данное уравнение примет вид:

$$2y-\sqrt{y^2+5}=1.$$

Освободившись от корня, получим:

$$3y^2-4y-4=0.$$

Отсюда $y_1=2$ и $y_2=-\frac{2}{3}$.

Значение $y_2=-\frac{2}{3}$ следует отбросить, так как буквой y мы обозначили $\sqrt{x^2-x+4}$, который отрицательных значений принимать не может.

Взяв $y=2$ и подставив это значение неизвестного y в уравнение $x^2-2x+4=y^2$, получим $x^2-2x+4=4$, или $x^2-2x=0$. Откуда $x_1=0$ и $x_2=2$.

Числа 0 и 2 являются корнями первоначального уравнения. Других действительных корней данное уравнение не имеет.

Пример 3.

$$\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}=\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Подстановкой убеждаемся, что 1 не есть корень данного уравнения. Поэтому, разделив обе части уравнения на $\sqrt[3]{(x-1)^2}$, получим уравнение

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-1=\sqrt[3]{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}},$$

равносильное данному.

После сокращения последнее уравнение принимает вид:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}-1=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Обозначив $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ через y, получим:

$$y^2-1=y, \quad \text{или} \quad y^2-y-1=0.$$

Отсюда

$$y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Следовательно,

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2},$$

или

$$\frac{x+1}{x-1}=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3.$$

Составим производную пропорцию, воспользовавшись тем, что сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения к их разности. Получим, что

$$\frac{(x+1)+(x-1)}{(x+1)-(x-1)}=\frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3+1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3-1},$$

т. е.

$$x=\frac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3+1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^3-1}.$$

§ 5. СПОСОБ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *

Решение всякого иррационального уравнения можно свести к решению соответствующей системы рациональных уравнений. Общий метод, позволяющий это сделать, покажем на примерах.

1. Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5.$$

Полагая

$$8-x=a^4 \text{ и } 89+x=b^4,$$

получим систему:

$$\begin{cases} a+b=5, \\ a^4+b^4=97. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2,$$

и тем, что $a+b=5$, получим уравнение:

$$(25-2ab)^2-2a^2b^2=97,$$

или

$$2a^2b^2-100ab+528=0,$$

или

$$a^2b^2-50ab+264=0.$$

Отсюда 1) $ab=6$ и 2) $ab=44$.

Теперь остается решить две системы:

$$1) \begin{cases} a+b=5, \\ ab=6 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} a+b=5, \\ ab=44. \end{cases}$$

Первая система дает $a=2$, $b=3$ и $a=3$, $b=2$.

Вторая система действительных решений не имеет.

Пользуясь, например, уравнением $8-x=a^4$ и полученными значениями неизвестного a, найдем действительные корни данного иррационального уравнения:

$$1)\ x_1=-8 \quad \text{и} \quad 2)\ x_2=-73.$$

2. Решить уравнение:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{x-4}=11.$$

Полагая

$$x+7=a^2 \text{ и } x-4=b^2,$$

---

* Если излагаемый в настоящем параграфе материал окажется трудным, то его можно изучать после прохождения гл. XX.

получим систему:

$$\begin{cases} a+b=11, \\ a^2-b^2=11, \end{cases}$$

или равносильную ей систему:

$$\begin{cases} a+b=11, \\ a-b=1. \end{cases}$$

Отсюда

$$a=6.$$

Из уравнения $x+7=a^2$ находим, что $x=29$.

3. Решить уравнение:

$$\sqrt[3]{(8-x)^2}-\sqrt[3]{(8-x)(27+x)}+\sqrt[3]{(27+x)^2}=7.$$

Полагая

$$\sqrt[3]{8-x}=a \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{27+x}=b,$$

получим:

$$a^2-ab+b^2=7,$$

$$a^3=8-x, \quad b^3=27+x.$$

Из последних двух равенств будем иметь:

$$a^3+b^3=35.$$

Решая систему

$$\begin{cases} a^2-ab+b^2=7, \\ a^3+b^3=35, \end{cases}$$

или равносильную ей систему

$$\begin{cases} a^2-ab+b^2=7, \\ a+b=5, \end{cases}$$

получим:

$$1)\ a=2 \quad \text{и} \quad 2)\ a=3.$$

Пользуясь уравнением $\sqrt[3]{8-x}=a$ и найденными значениями неизвестного a, найдем корни первоначального уравнения:

$$1)\ x=0 \text{ и } 2)\ x=-19.$$

УПРАЖНЕНИЯ

192. Решить уравнения:

1) $\sqrt{3x+1}=x-1$;

2) $\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}x+3$;

3) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$;

4) $x^2+x+3+\sqrt{x^2+x+5}=28$;

5) $\sqrt{2x-1+\sqrt{x+2}}=4$;

6) $\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}=\sqrt{9-5x}$;

7) $\sqrt[5]{(x+1)^2}-\sqrt[5]{(x-1)^2}=\sqrt[5]{x^2-1}$.

ГЛАВА XIX

ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

§ 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Наблюдая какое-либо явление, мы видим, что одни величины, участвующие в нем, остаются неизменными, в то время как другие изменяются. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Пусть тепловоз движется по направлению от Ленинграда к Москве. Тогда такие величины, как, скажем, длина тепловоза, число колес, объем топливного бака, будут оставаться неизменными, а запас горючего, имеющийся на тепловозе, будет изменяться. Расстояние от Ленинграда до Москвы будет оставаться неизменным, а расстояния от тепловоза до Ленинграда и Москвы будут изменяться.

Пример 2. Пусть происходит нагревание газа, заключенного в плотно закрытом сосуде. Тогда объем и число молекул газа будут оставаться неизменными, в то время как температура газа и его упругость (давление газа на стенки сосуда) будут изменяться.

Пример 3. Пусть один конец пружины прикреплен к неподвижному предмету, а к другому концу подвешены два груза (рис. 52).

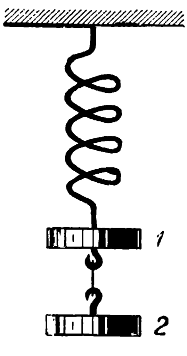


Рис. 52.

Если срезать шнур, которым второй груз прикреплен к первому, то первый груз станет совершать колебательное движение. Во время этого движения объем и масса первого груза будут оставаться постоянными, а расстояние груза до укрепленного конца пружины будет изменяться: то уменьшаясь, то увеличиваясь.

Пример 4. Пусть имеется окружность с центром O и диаметром AA_1 (рис. 53) и пусть по этой окружности движется точка M. Тогда расстояние точки M от центра окружности будет оставаться неизменным, а ее расстояние MP до диаметра AA_1 будет изменяться: то увеличиваясь, то уменьшаясь.

Величина, участвующая в том или ином процессе и остающаяся неизменной, называется постоянной.

Величина, участвующая в том или ином процессе и изменяющаяся во время этого процесса, называется переменной.

2. Всякая величина, как постоянная, так и переменная, обозначается в математике какой-либо одной буквой. При этом постоянные величины принято обозначать преимущественно начальными буквами латинского алфавита, например буквами a, b, c и т. д., а величины переменные — последними буквами алфавита, например буквами x, y, z, u, v, s, t и т. д.

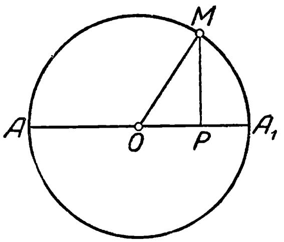


Рис. 53.

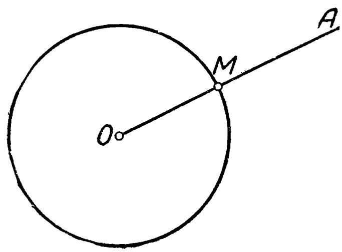


Рис. 54.

Однако бывают случаи, когда величины, обозначенные буквами a, b, c и т. д., приходится рассматривать как переменные, а величину, обозначенную, скажем, буквой x или y, как постоянную. Поэтому само по себе обозначение какой-либо величины, например, буквой a или x не дает еще никаких указаний на то, будет ли эта величина постоянной или переменной; характер величины, обозначенной какой-либо буквой, должен всякий раз быть особо оговорен.

Кроме того, надо иметь в виду, что одна и та же величина может быть постоянной в одном процессе и переменной в другом. Например, расстояние точки M (рис. 54) от точки O будет величиной постоянной, если точка M движется по окружности, и переменной, если движение точки M будет происходить по лучу OA.

§ 2. ФУНКЦИЯ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Если длину стороны квадрата, выраженную в какой-либо единице длины, обозначить буквой x, то площадь квадрата будет равна x^2 соответствующим единицам.

Каждой длине стороны квадрата, т. е. каждому положительному значению x, будет соответствовать единственное определенное значение выражения x^2. Например, при $x=4$ выражение x^2 будет равняться 16, при $x=\frac{1}{4}$ получим $\frac{1}{16}$ и т. д.

Если бы рассматривать выражение x^2 вне каких-либо условий, то букве x можно задавать любые значения, а не только положительные.

Если мы условимся задавать значения букве x по нашему произволу, а значение выражения x^2 вычислять каждый раз в соответствии с выбранным значением x, то тогда величина x будет называться независимой переменной или аргуме́нтом, а величина x^2 — зависимой переменной или функцией аргуме́нта x.

Аналогично этому мы можем рассматривать выражения, например, x^3; $6x^2$; x^2+x+1; x^2-1 и т. д. как различные функции одного и того же аргумента x.

Если условиться обозначать функцию какой-либо буквой, например буквой y, то можно писать:

$$y=x^2; \quad y=x^3 \text{ и т. д.}$$

Разумеется, что в каждом из этих равенств буквы x и y могут иметь свой смысл. Например, в равенстве $y=x^2$ можно считать, что x — длина стороны квадрата, а y — площадь; в равенстве $y=x^3$ можно считать, что x — длина ребра куба, а y — объем.

В рассмотренных примерах мы обозначали аргуме́нт буквой x, а функцию — буквой y. Однако это не обязательно. Аргуме́нт и функцию можно обозначать и любыми другими буквами.

Например, формулу

$$S=\pi R^2$$

можно читать так: S (площадь круга) есть функция аргумента R (радиуса).

Приведем п р и м е р и з ф и з и к и.

Наибольшая высота h, которой достигает камень, брошенный вертикально вверх, есть функция его начальной скорости v, а именно $h=\frac{v^2}{2g}$. Здесь h измеряется в метрах, v — в метрах в секунду, $g=9{,}8$.

Если две переменных x и y связаны между собой так, что каждому значению переменной x соответствует одно и только одно совершенно определенное значение переменной y, то говорят, что y есть функция аргумента x.

Та переменная, значение которой мы задаем п р о и з в о л ь н о, называется независимой переменной или а р г у м е́ н т о м.

Та же переменная, значение которой вполне определяется значением аргуме́нта, называется зависимой величиной или ф у н к ц и е й.

Но всякий раз, когда мы рассматриваем величину y как функцию величины x, мы обязаны указывать, какие значения может принимать x. Эти значения называются допустимыми. Например, рассматривая объем шара V как функцию его радиуса R, мы должны указать, что в данном случае допустимыми значениями аргумента R будут только положительные числа, поскольку радиус шара может быть только положительным числом.

Определение. ***Величина y называется функцией величины x, если каждому значению x из некоторого множества чисел соответствует единственное, вполне определенное значение величины y.***

Таким образом, можно сказать, что площадь квадрата есть функция его стороны; объем куба есть функция ребра; площадь поверхности куба есть еще некоторая новая функция ребра и т. д.

Совокупность всех возможных значений аргумента называется областью определения функции. Совокупность же всех значений функции называется областью изменения функции.

Приведем пример. Примем за аргумент x длину стороны квадрата, а за функцию y — площадь квадрата. Тогда получим, что $y=x^2$. Здесь x может принимать только положительные значения, так как длина стороны квадрата не может равняться ни нулю, ни отрицательному числу. Поэтому областью определения этой функции будет все множество положительных чисел. Областью изменения этой функции будет также множество всех положительных чисел, так как площадь квадрата не может равняться ни нулю, ни отрицательному числу, но может равняться любому положительному числу.

Если функция задана формулой, то ее областью определения называется множество всех чисел, для которых можно выполнить действия, указанные формулой. Например, областью определения функции

$$y=\frac{1}{x-5}$$

является все множество чисел, кроме $x=5$, т. е. вся числовая ось, кроме точки $x=5$.

Областью определения функции $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x-5}$ является множество всех чисел, удовлетворяющих соотношениям $x\geqslant 2$, $x\neq 5$.

Пусть буква Σ_n обозначает сумму квадратов натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. $\Sigma_n=1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2$.

Во второй части учебника в главе «Последовательности» доказано, что эта сумма определяется по формуле

$$\Sigma_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Здесь n есть аргумент, а Σ_n — функция. В этом примере возможными значениями аргумента n являются лишь целые положительные числа.

§ 3. ГРАФИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

1. Рассмотрим какую-нибудь функцию y одного аргумента x, например функцию $y=\frac{1}{4}x^2$.

Составим таблицу значений этой функции для некоторых произвольно взятых значений аргумента x:

x	...	-100	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...	100	...
y	...	2500	...	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	...	2500	...

(А)

Эта таблица позволяет в некоторой степени составить себе представление о ходе изменения данной функции. Так, например, она показывает, что значения данной функции отрицательными быть не могут. Таблица показывает, что при двух противоположных значениях аргумента x значения функции оказываются одинаковыми.

Далее, при неограниченном возрастании абсолютной величины x величина функции y также возрастает неограниченно. Характеру изменения функции можно придать наглядность с помощью ее графического изображения. Что называется графическим изображением функции или графиком функции будет разъяснено ниже.

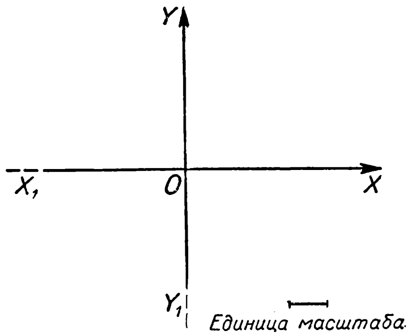


Рис. 55.

2. Возьмем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси X_1X и Y_1Y, пересекающиеся в точке O (рис. 55), и примем некоторый отрезок за единицу масштаба. Эти оси делят плоскость на четыре четверти: I, II, III и IV.

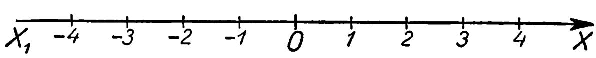


Рис. 56.

Теперь, пользуясь составленной выше таблицей (А), построим на оси X_1X изображения различных значений аргумента x. Например, на рисунке 56 изображены значения x, равные -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4.

Затем изобразим с помощью вертикальных отрезков значения y, соответствующие отмеченным значениям аргумента x. Причем эти вертикальные отрезки будем направлять вверх, когда они изображают положительные значения y, и вниз в противном случае.

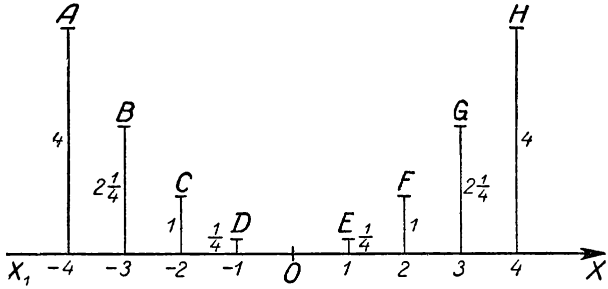


Рис. 57.

Например, на рисунке 57 изображены вертикальные отрезки, изображающие значения y, соответствующие выбранным значениям x. По расположению точек $ABCDEFGH$ можно судить о функциональной зависимости, выраженной равенством

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Если вообразить, что вертикальные отрезки построены не только для нескольких целых, но и для всевозможных значений буквы x, то тогда множество концов вертикальных отрезков образуют некоторую линию AOH (рис. 58), которая и называется графическим изображением функции $y = \frac{1}{4}x^2$ или, проще, графиком этой функции.

X_1X — есть граница между верхней и нижней полуплоскостями.

График функции $y = \frac{1}{4}x^2$ представляет собой кривую, расположенную в верхней полуплоскости и простирающуюся бесконечно.

3. Графическое изображение функции $y = \frac{1}{4}x^2$, т. е. кривая линия AOH, наглядно показывает, что при переходе значения аргумента x от какого-либо отрицательного значения к другому отрицательному значению, имеющему меньшую абсолютную величину, значение функции убывает. При переходе же значения x от какого-либо положительного значения к большему положительному значению значение функции возрастает.

В разобранном примере все вертикальные отрезки расположены в верхней полуплоскости.

Графики функций широко применяются в науке, технике, естествознании и в разнообразных планирующих и проектирующих организациях. В самой математике есть графическое дифференцирование, графическое интегрирование, графическое решение числовых уравнений и систем уравнений и многие другие вычисления, осуществляемые с помощью графиков.

Железнодорожное движение и движение судов планируются с помощью графиков.

Рис. 58.

Графиками систематически пользуются в статистике.

Колебания земной коры изучаются по графикам, начерченным сейсмографом, и т. д. и т. д.

Чтобы удобнее строить графики функций и эффективнее ими пользоваться, целесообразно ввести понятие о координатах.

§ 4. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

Ознакомиться с прямоугольной системой координат и изучить ее надо потому, что с ее помощью мы сможем представлять в наглядной (геометрической) форме функциональные зависимости и решать уравнения и системы уравнений особым способом, называемым графическим.

Разобьем плоскость на четыре части двумя взаимно перпендикулярными направленными прямыми (осями) X_1X и Y_1Y (рис. 59).

Ось X_1X называется осью абсцисс, а ось Y_1Y — осью ординат. Точка пересечения осей (точка O) называется началом координат.

Совокупность осей X_1X и Y_1Y при выбранной единице масштаба называется прямоугольной (декартовой) системой координат. Оси X_1X и Y_1Y называются осями координат.

Эти оси делят плоскость на четыре части, называемые квадрантами (или четвертями). Эти квадранты нумеруются так, как показано на рисунке 59.

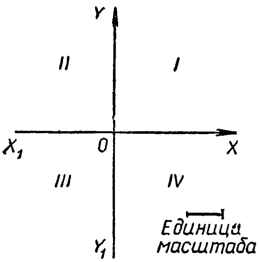


Рис. 59.

Ось X_1X разделяет плоскость на две полуплоскости: верхнюю и нижнюю.

Ось Y_1Y разделяет плоскость на две полуплоскости: правую и левую.

Плоскость, на которой расположены координатные оси, называется координатной плоскостью.

Теперь установим такое правило, с помощью которого можно определять положение точки на плоскости.

Абсциссой x любой точки плоскости назовем число, выражающее расстояние этой точки до оси Y_1Y, взятое со знаком плюс, если точка лежит справа от оси Y_1Y, и со знаком минус — если слева.

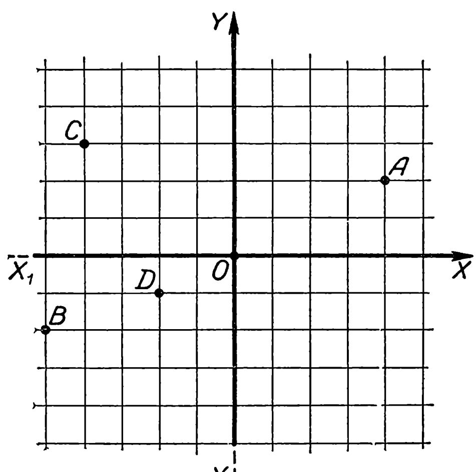


Рис. 60.

Например, абсцисса x точки A (рис. 60) равна 4.
Абсцисса точки B равна -5.
Абсцисса точки C равна -4.
Абсцисса точки D равна -2.

Ординатой y любой точки назовем число, выражающее расстояние этой точки до оси X_1X, взятой со знаком плюс, если точка лежит выше оси X_1X, и со знаком минус — если ниже.

Например, ордината точки A (рис. 60) равна 2.

Ордината точки B равна -2.

Ордината точки C равна 3.

Ордината точки D равна -1.

Абсцисса точки O равна нулю.

Ордината точки O равна нулю.

Чтобы показать, что точка D имеет абсциссу $x=-2$ и ординату $y=-1$, пишут кратко: $D(-2;\ -1)$.

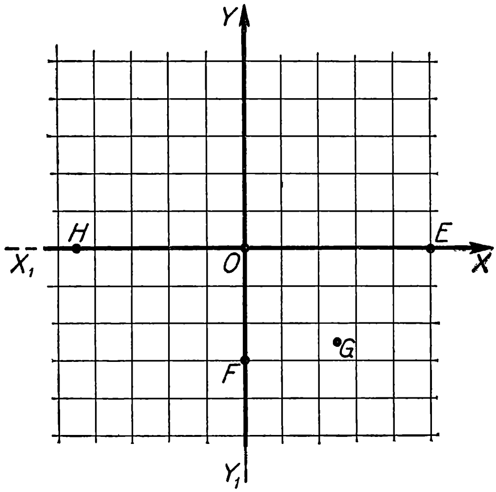


Рис. 61.

Числа x и y, определяющие положение точки на плоскости, называются прямоугольными координатами точки.

На рисунке 61 изображены точки:

$$E(5;\ 0);\quad F(0;\ -3);$$

$$G\left(2\frac{1}{2};\ -2\frac{1}{2}\right);\quad H\left(-4\frac{1}{2};\ 0\right);\quad O(0;\ 0).$$

Множество точек, у которых $x=0$, образует ось Y_1Y. Поэтому говорят, что геометрическим изображением, или графиком уравнения $x=0$, является ось Y_1Y.

Множество точек, у которых $y=0$, образует ось X_1X. Поэтому говорят, что графиком уравнения $y=0$ является ось X_1X.

Множество точек, у которых $y=x$, образует прямую, проходящую через начало координат и делящую I и III квадранты пополам.

УПРАЖНЕНИЯ

193. Построить четырехугольник по координатам его вершин $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 4)$, $C(4;\ 5)$, $D(6;\ 1)$ и определить по чертежу приближенно координаты точки пересечения его диагоналей (чертеж сделать на миллиметровой бумаге).

194. Что представляет собой множество точек, у которых: a) $x=1$, b) $y=1$, c) $y=-x$, d) $x>1$.

§ 5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Если вспомнить построение графика функции $y=\frac{1}{4}x^2$ (§ 3) и воспользоваться понятием о прямоугольных координатах точки плоскости, то можно принять такое определение:

Графиком функции называется множество точек, у которых абсциссы являются допустимыми значениями аргумента x, а ординаты — соответствующими значениями функции y.

Если следовать этому определению, то для построения графика функции надо найти все пары соответствующих значений аргумента и функции и построить все точки с этими координатами. В большинстве случаев это сделать практически невозможно, так как таких точек бесконечно много. Поэтому строят некоторое количество точек, принадлежащих графику, и проводят через них плавную кривую. Однако во многих случаях можно строить графики удобнее и легче, если воспользоваться очевидными свойствами функции. Поясним все это на примерах.

Пример 1. Пусть требуется построить график функции

$$y=\frac{1}{1+x^2}.$$

Сначала отметим очевидные свойства этой функции и вытекающие из них особенности графика.

Областью определения данной функции является вся числовая ось.

Значения функции y будут все положительными. Следовательно, весь график расположится в верхней полуплоскости.

При любых двух противоположных значениях x функция y принимает одинаковые значения. Следовательно, график симметричен относительно оси Y_1Y, т. е. его левая часть есть зеркальное отображение правой. Поэтому для построения искомого графика достаточно построить сначала лишь ту его часть, которая расположена в I квадранте. Обратим внимание еще на следующее. Из формулы $y=\frac{1}{1+x^2}$ видно, что при неограниченном возрастании x величина y будет стремиться к нулю. Это означает, что точки графика по мере удаления от оси Y_1Y будут неограниченно приближаться к оси X_1X.

Придавая в формуле $y=\frac{1}{1+x^2}$ аргументу x значения 0; 1; 2; 3; ..., получим для y значения 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{10}$; ....

Примем каждую пару значений аргумента x и функции y за координаты точки и построим эти полученные точки $(0;\ 1)$, $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(2;\ \frac{1}{5}\right)$, $\left(3;\ \frac{1}{10}\right)$.

Этих четырех точек явно недостаточно для построения графика, особенно на участках оси X_1X от 0 до 1 и от 1 до 2. Поэтому дадим аргументу x еще несколько промежуточных значений $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $1\frac{1}{2}$. Соответствующими значениями функции будут $\frac{4}{5}$; $\frac{16}{25}$; $\frac{4}{13}$.

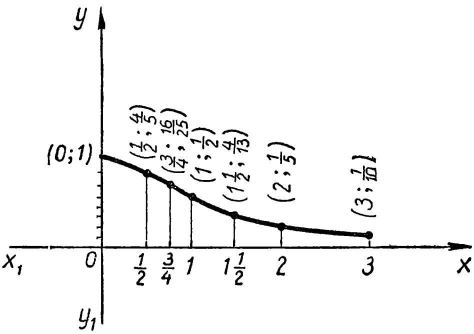


Рис. 62.

Теперь построим найденные семь точек и проведем через них плавную кривую (рис. 62).

Часть графика, расположенная в левой полуплоскости, есть зеркальное отражение части, расположенной в правой (как это уже было объяснено выше). Поэтому искомый график будет иметь вид, изображенный на рисунке 63.

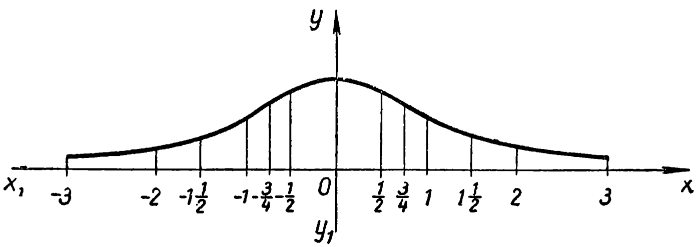


Рис. 63.

П р и м е р 2. Пусть требуется построить график функции

$$y=\frac{|x|}{x}.$$

Областью определения этой функции является вся числовая ось, за исключением точки $x=0$.

При $x>0$ имеем $y=1$.

При $x<0$ имеем $y=-1$.

Следовательно, график данной функции состоит из двух полупрямых, параллельных оси X_1X и отстоящих от нее на расстоянии 1. Одна из этих полупрямых расположена в I квадранте, а другая — в III (см. рис. 64).

Точки (0; 1) и (0; —1) не входят в состав точек графика. Обратим внимание на то, что для построения этого графика не потребовалось строить его отдельные точки.

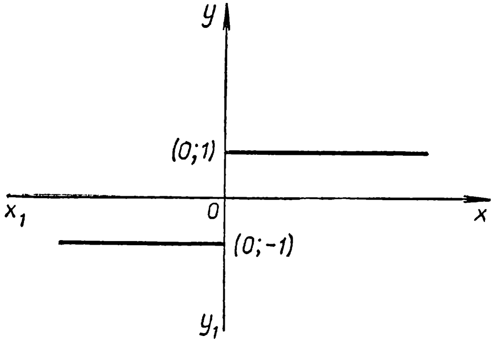


Рис. 64.

Пример 3. Построить график функции

$$y=\frac{1}{x-1}.$$

Областью определения этой функции является вся числовая ось, за исключением точки $x=1$.

Придавая аргументу x несколько отдельных значений, составим две таблицы (см. табл. 1 и 2).

x	y
2	1
3	$\frac{1}{2}$
4	$\frac{1}{3}$
5	$\frac{1}{4}$

Таблица 1.

x	y
0	-1
-1	$-\frac{1}{2}$
-2	$-\frac{1}{3}$
-3	$-\frac{1}{4}$

Таблица 2.

Построив по полученным координатам точки, получим рисунок 65.

Из формулы $y=\frac{1}{x-1}$ видно следующее.

Если величина x будет неограниченно возрастать, то величина y, оставаясь положительной, будет неограниченно приближаться к нулю. Поэтому часть графика будет иметь вид, указанный на рисунке 66.

Если величина x, оставаясь отрицательной, будет неограниченно возрастать по своей абсолютной величине, то величина y, оставаясь отрицательной, будет неограниченно приближаться к нулю. Поэтому часть графика, расположенная в III квадранте, будет иметь вид, указанный на рисунке 67.

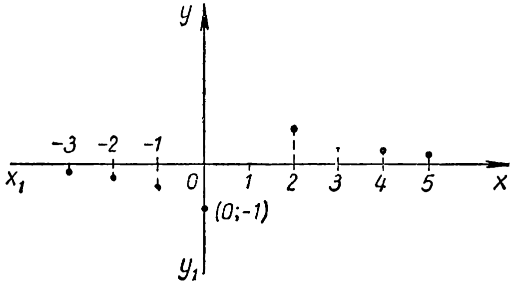


Рис. 65.

Осталась непостроенной та часть графика, которая соответствует значениям x от 0 до 1 и от 1 до 2.

Для того чтобы построить и эту часть, придадим аргументу x промежуточные значения между 0 и 1 и между 1 и 2. А именно,

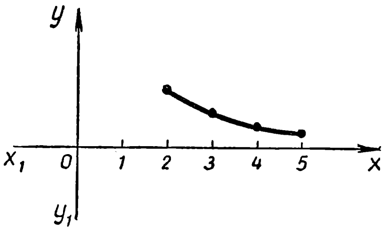


Рис. 66.

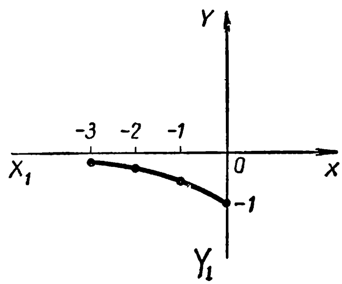


Рис. 67.

значения $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ и $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$. Тогда получим две таблицы (см. табл. 3 и 4).

x	y
$\frac{1}{4}$	$-\frac{4}{3}$
$\frac{1}{2}$	-2
$\frac{3}{4}$	-4

Таблица 3.

x	y
$1\frac{1}{2}$	2
$1\frac{1}{4}$	4

Таблица 4.

Точки, построенные по этим координатам, даны на рисунке 68. Из формулы $y=\frac{1}{x-1}$ видно следующее.

Если величина x, уменьшаясь, неограниченно приближается к 1, то величина y неограниченно возрастает. Поэтому соответствующая часть графика будет представлять собой кривую, под-

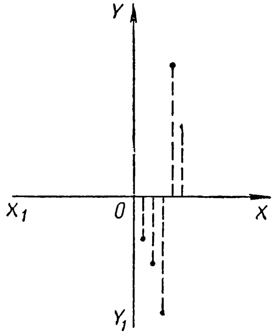


Рис. 68.

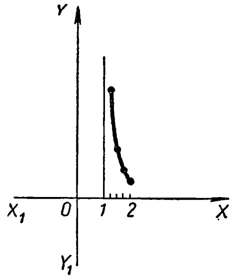


Рис. 69.

нимающуюся неограниченно вверх и при этом неограниченно приближающуюся к прямой $x=1$ (см. рис. 69).

Если величина x, возрастая, приближается к 1, то величина y, оставаясь отрицательной, будет неограниченно возрастать по своей абсолютной величине. Поэтому соответствующая часть графика

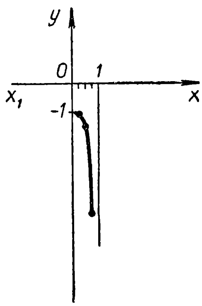


Рис. 70.

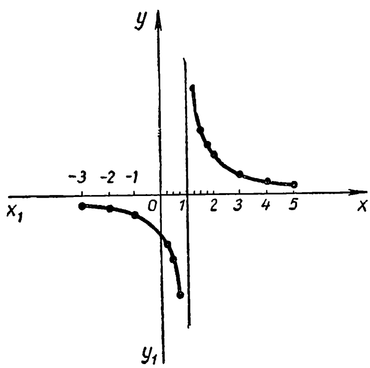


Рис. 71.

будет представлять собой кривую, неограниченно опускающуюся вниз и при этом неограниченно приближающуюся к прямой $x=1$ (см. рис. 70). Из всего изложенного следует, что график данной функции представится в виде, указанном на рисунке 71.

Этот график состоит из двух отдельных частей: он разрывается на две бесконечные ветви.

При $x=1$ нет точки графика, так как дробь $\frac{1}{x-1}$ теряет смысл при $x=1$.

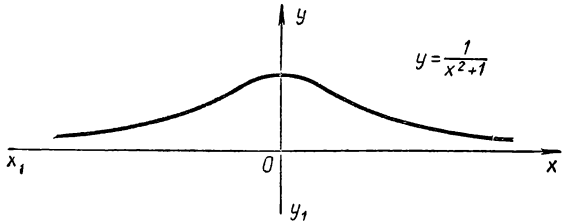


Рис. 72.

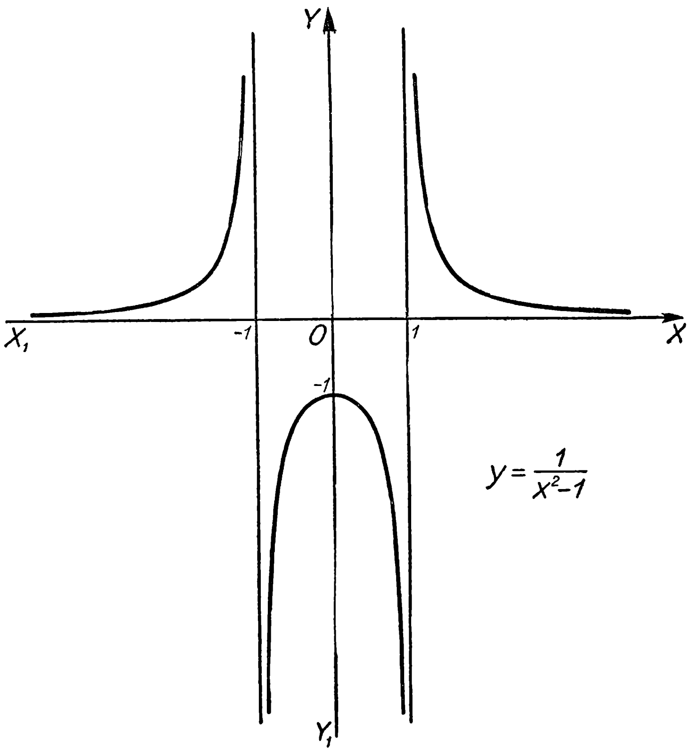


Рис. 73.

График дает наглядное представление об общем характере поведения функции и ее особенностях.

Например, характер поведения и особенности функций

$$y=\frac{1}{x^2+1} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{x^2-1}$$

раскроются в наглядной форме, если мы посмотрим на их графики (см. рис. 72, 73).

Эти два графика свидетельствуют об огромном различии в характере поведения и особенностях функций

$$y=\frac{1}{x^2+1} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{x^2-1},$$

хотя формулы, которыми эти функции заданы, очень похожи друг на друга.

§ 6. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ $y=ax$ и $y=ax+b$

Постройте графики функций

$$y=2x \quad \text{и} \quad y=-2x$$

и примите к сведению без доказательства, что графиком функции $y=ax$ является прямая, проходящая через начало координат. Если $a>0$ эта прямая лежит в I и III квадрантах, если же $a<0$, то во II и IV.

График функции $y=ax$ называется **графиком прямо пропорциональной зависимости**. Для построения графика функции $y=ax$ достаточно найти, кроме начала координат, только одну какую-нибудь точку графика. Тогда прямая, проходящая через эту найденную точку и начало координат, будет искомым графиком.

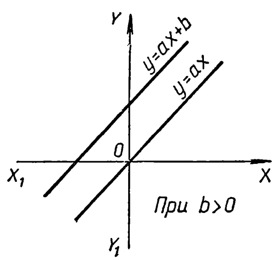


Рис. 74.

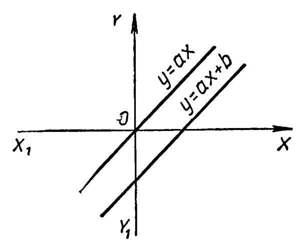


Рис. 75.

Например, графиком функции $y=5x$ будет прямая, проходящая через точку (1; 5) и начало координат.

График функции $y=ax+b$ можно получить из графика функции $y=ax$ параллельным переносом на отрезок b в положительном направлении оси Y_1Y, если $b>0$ (рис. 74), и в отрицательном направлении, если $b<0$ (рис. 75).

При таком параллельном переносе любая точка с координатами $(x; y)$ переходит в точку $(x; y+b)$.

Таким образом, график функции $y=ax+b$ есть прямая линия. Поэтому функция $y=ax+b$ называется **линейной**.

Для построения графика функции $y=ax+b$ достаточно найти какие-нибудь две его точки и через них провести прямую.

Построим таким способом, например, график функции

$$y=2x+3.$$

При $x=0$ имеем $y=3$.

При $y=0$ имеем $x=-\frac{3}{2}$.

Проведя прямую через точки $(0;\ 3)$ и $\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$, получим искомый график.

УПРАЖНЕНИЯ

195. Построить графики следующих линейных функций:

$$y=x+2, \qquad y=x-2,$$
$$y=-x+1, \qquad y=-2x+3.$$

196. Построить графики функций

$$y=x+2 \quad \text{и} \quad y=2x-2$$

и найти графически координаты точки их пересечения.

§ 7. ГРАФИК ФУНКЦИИ $y=\frac{a}{x}$

Формула $y=\frac{a}{x}$ выражает обратно пропорциональную зависимость между переменными x и y. Постоянная величина a, отличная от нуля, является коэффициентом обратной пропорциональности.

Построим график обратной пропорциональной зависимости, взяв для определенности $a=2$, т. е. построим график функции $y=\frac{2}{x}$. Составим таблицу значений x и y:

x	-5	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	5	...
$y=\frac{2}{x}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	-8	...	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	...

Построив найденные точки и проведя через них плавную линию, получим искомый график (рис. 76).

Этот график состоит из двух бесконечных ветвей. Одна ветвь расположена в I четверти, а другая — в III четверти.

Когда значение аргумента x неограниченно возрастает, значение функции y неограниченно приближается к нулю, оставаясь положительным.

Когда аргумент x принимает отрицательные значения, неограниченно возрастающие по абсолютной величине, то функция y также неограниченно приближается к нулю, оставаясь отрицательной.

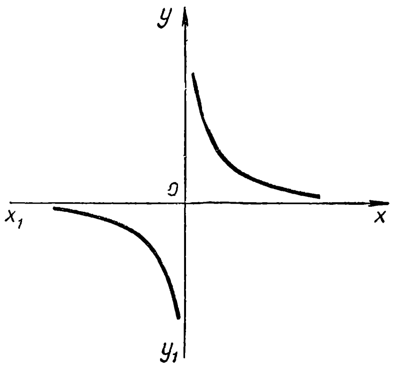


Рис. 76.

Когда x приближается к нулю, оставаясь положительным, то y неограниченно возрастает.

Когда x приближается к нулю, оставаясь отрицательным, то y остается отрицательным и неограниченно возрастает по абсолютной величине.

График функции $y=\frac{-2}{x}$ располагается во II и IV четвертях.

§ 8. УРАВНЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть в момент времени t_0 часов поезд начинает двигаться равномерно со скоростью v *км* в час со ст. Ларино * по направлению к Москве (рис. 77).

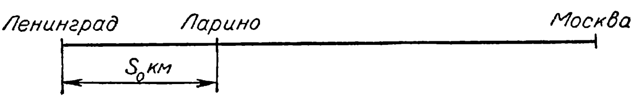


Рис. 77.

Обозначим расстояние от Ленинграда до ст. Ларино в километрах буквой s_0; момент времени в часах — буквой t; расстояние от Ленинграда до движущегося поезда в момент времени t — буквой s. Положение поезда в момент времени t показано на рисунке 78.

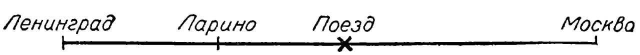


Рис. 78.

При этих условиях получим, что

$$s=v(t-t_0)+s_0.$$

Здесь v, t_0 и s_0 — величины постоянные, а t и s — переменные.

* Здесь и дальше названия станций вымышленные.

Равенство

$$s = v(t - t_0) + s_0$$

называется **уравнением равномерного движения**.

Во время движения поезда t и s меняются. Легко видеть, что s зависит от t, т. е. что s есть функция аргумента t. Действительно, при изменении t меняется s, причем каждому значению t соответствует определенное значение s.

Если принять

$$v = 80, \quad t_0 = 2 \quad \text{и} \quad s_0 = 43,$$

то получим, что

$$s = 80(t - 2) + 43, \quad \text{или} \quad s = 80t - 117.$$

Здесь опять же t есть аргумент, а s — функция. При $t = 3$ получим, что $s = 123$, если же $t = 4\frac{1}{2}$, то $s = 243$ и т. д.

§ 9. ГРАФИК РАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИЯ

Мы знаем, что равенство

$$y = kx + b$$

выражает линейную функцию величины y от аргумента x и что график этой функции есть прямая линия (см. стр. 306).

Перепишем уравнение равномерного движения

$$s = v(t - t_0) + s_0$$

в виде

$$s = vt + (s_0 - vt_0).$$

Здесь величина $(s_0 - vt_0)$ постоянная и величина v тоже постоянная. Величины же t и s, как было указано выше, переменные. Значит, s есть линейная функция от t, а график равномерного движения представляет собой прямую линию.

Построим, например, график равномерного движения по уравнению

$$s = 80t - 117.$$

(Здесь t — время в часах, а s — расстояние в километрах.) При $t = 2$ получаем, что $s = 43$. Эта пара чисел дает нам одну точку графика A (2; 43) (рис. 79). Теперь, положив, что $t = 3$, получим, что $s = 123$. Эта пара чисел дает нам вторую точку графика B (3; 123).

Так как график линейной функции есть прямая линия, то прямая, проведенная через две точки A и B, и будет искомым графиком заданного равномерного движения. Продолжение прямой линии AB вниз в данном примере не требуется, так как по условию поезд начал свое движение в 2 часа со ст. Ларино по направлению к Москве. Пусть ст. Сокол находится от ст. Ларино

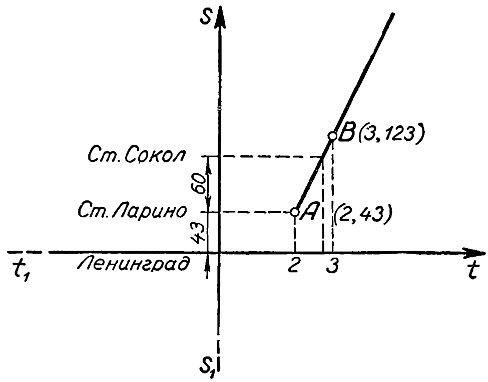


Рис. 79.

на расстоянии 60 *км* в сторону Москвы. По графику движения поезда (рис. 79) можно усмотреть, что поезд проходит ст. Сокол между двумя и тремя часами, примерно в 2 часа 40 мин.

§ 10. ГРАФИК ДВИЖЕНИЯ ПОЕЗДОВ

График движения поездов строится следующим образом.

1) Движение поезда на каждом отдельном перегоне рассматривается как равномерное, с установленной для этого перегона средней скоростью. Поэтому графиком движения поезда на каждом перегоне будет отрезок прямой линии.

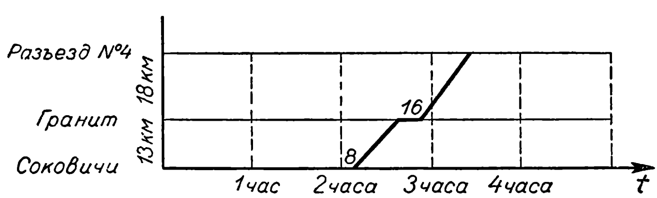


Рис. 80.

2) Стоянки поезда изображаются горизонтальными отрезками прямой, изображающими продолжительность стоянки (рис. 80).

Отметка «8» показывает, что поезд отправляется от ст. Соковичи в 2 часа 08 мин. Отметка «16» показывает, что поезд должен иметь на ст. Гранит 16 мин. стоянки.

График движения на перегоне Гранит — Разъезд № 4 идет круче, чем график на перегоне Соковичи — Гранит. Это значит, что средняя скорость на перегоне Гранит — Разъезд № 4 больше, чем на перегоне Соковичи — Гранит.

Продолжительность хода поезда для каждого перегона рассчитывается с учетом времени на разгон и на замедление поезда.

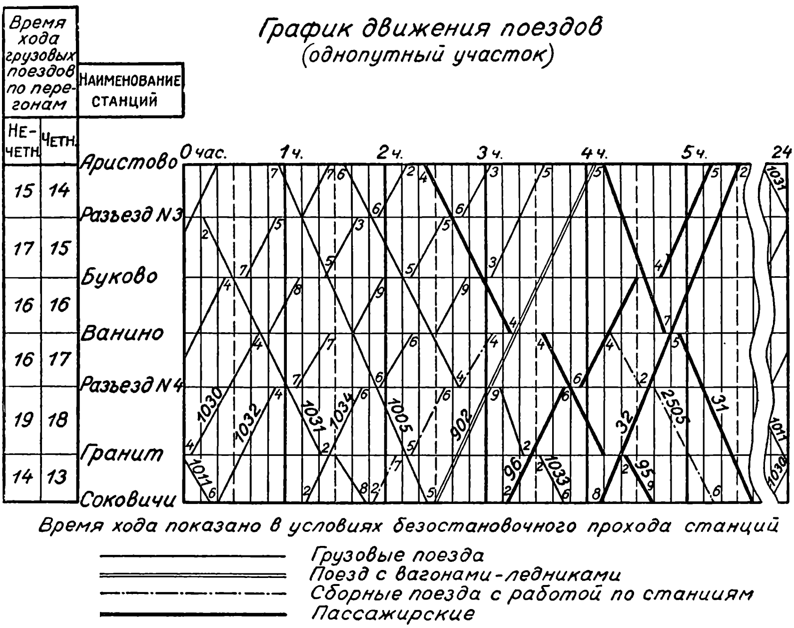


Рис. 81.

Аналогично строятся графики движения поездов, идущих в противоположном направлении, т. е., скажем, в направлении от Разъезда № 4 по направлению к Соковичи.

На рисунке 81 дан график движения поездов на участке Аристово — Соковичи для шестичасового промежутка времени. Этот график является частью суточного графика.

План участка

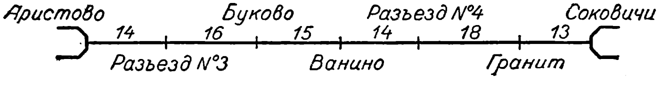


Рис. 82.

Пометки 14, 16, 15, 14, 18, 13 обозначают длины перегонов в километрах. Нечетные поезда идут от ст. Аристово к ст. Соковичи.

Поезда за № 1001, 1031, 1005 — грузовые нечетные, № 31 — пассажирский нечетный, № 1032, 1034 — грузовые четные, № 96 и 32 — пассажирские четные, № 902 — ускоренный грузовой (для перевозки, например, живности, молока, свежих овощей и т. д.). Графики движения пассажирских поездов изображаются обычно красными линиями. На рисунке же 81 они изображены черными жирными линиями.

§ 11. ГРАФИК МНОГОЧЛЕНА 2-й СТЕПЕНИ $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$

1. Частные случаи

Случай 1. $y=ax^2$.

Этот случай получается при $b=c=0$. График функции $y=ax^2$ называется параболой.

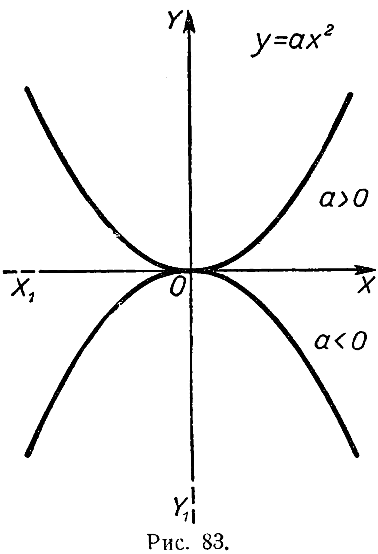


Рис. 83.

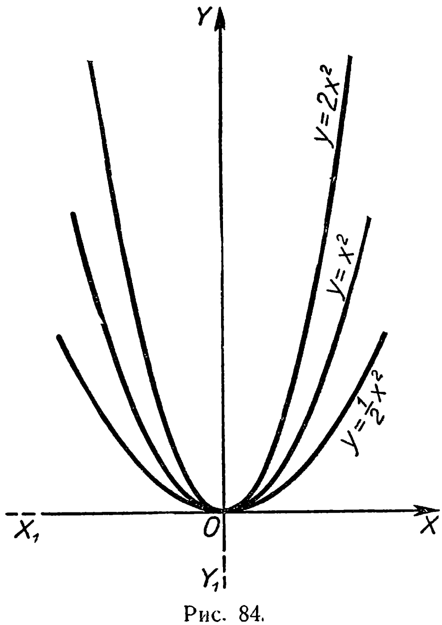


Рис. 84.

Предлагается учащемуся построить графики функций

$$y=\frac{1}{2}x^2,\qquad y=x^2,\qquad y=2x^2,$$

$$y=-\frac{1}{2}x^2,\quad y=-x^2,\quad y=-2x^2$$

и убедиться в справедливости следующего утверждения.

Парабола $y=ax^2$ располагается в верхней полуплоскости, когда $a>0$, и в нижней, когда $a<0$ (рис. 83).

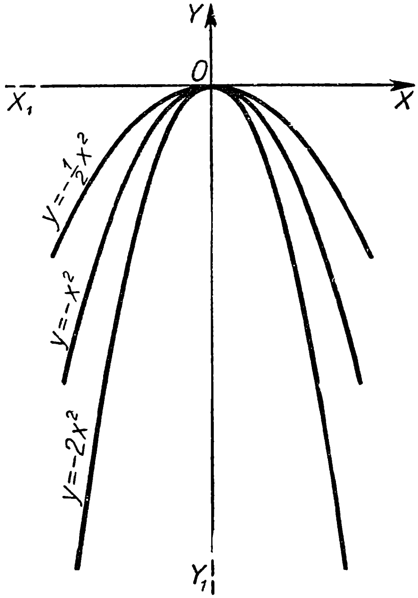


Рис. 85.

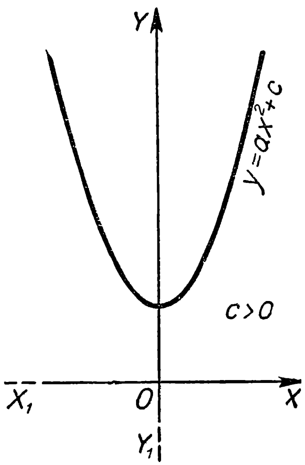


Рис. 86.

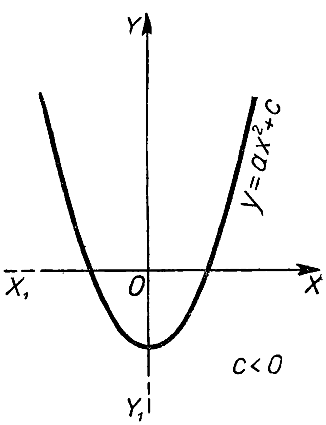


Рис. 87.

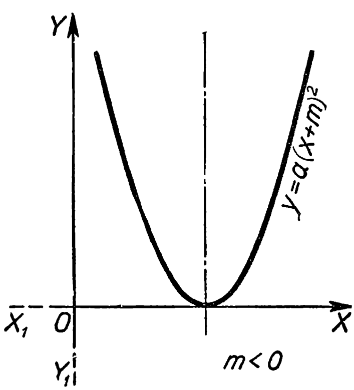


Рис. 88.

Эта парабола располагается симметрично относительно оси Y_1Y. Ось симметрии параболы называется ее осью. Точка пересечения параболы со своей осью называется вершиной параболы.

Парабола $y=ax^2$ располагается тем ближе к оси Y_1Y, чем больше абсолютное значение коэффициента a (рис. 84, 85).

Случай 2. $y=ax^2+c$.

Этот случай получается при $b=0$. Предлагается учащемуся построить графики функций

$$y=\frac{1}{2}x^2+3 \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{2}x^2-3$$

и убедиться в следующем.

График функции $y=ax^2+c$ есть парабола, смещенная параллельно оси X_1X вверх, когда $c>0$ (рис. 86), и вниз, когда $c<0$ (рис. 87). Осью этой параболы опять же является ось Y_1Y, а вершиной точка $(0;\ c)$.

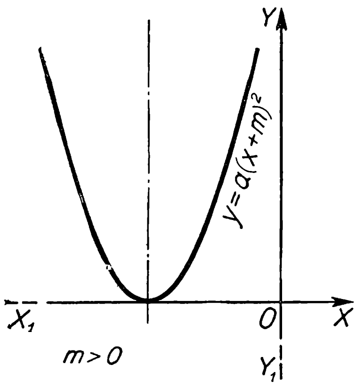


Рис. 89.

Случай 3. $y=a(x+m)^2$.

Предлагается учащемуся построить графики функций

$$y=\frac{1}{2}(x+2)^2 \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{2}(x-2)^2$$

и убедиться в следующем.

График функции $y=a(x+m)^2$ есть парабола $y=ax^2$, смещенная параллельно оси X_1X вправо, когда $m<0$ (рис. 88), и влево, когда $m>0$ (рис. 89). Осью этой параболы является прямая, параллельная оси Y_1Y, проходящая через точку $(-m;\ o)$. Вершиной служит эта же точка $(-m;\ o)$.

2. График функции $y=ax^2+bx+c$

(общий случай)

С помощью выделения полного квадрата получим:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Теперь видно, что график функции $y=ax^2+bx+c$ есть парабола $y=ax^2$, смещенная вверх или вниз и вправо или влево.

Если $\frac{4ac-b^2}{4a}>0$, то смещение происходит вверх;

если же $\frac{4ac-b^2}{4a}<0$, то вниз.

Если $\frac{b}{2a}>0$, то смещение происходит влево, если же $\frac{b}{2a}<0$, то вправо.

Вершина параболы $y=ax^2+bx+c$ находится в точке

$$\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right),$$

а ось проходит параллельно оси Y_1Y.

Ветвь параболы обращена вверх, когда $a>0$, и вниз, когда $a<0$.

Пример 1. Построить график функции $y=x^2-4x+5$.

Выделив полный квадрат, получим:

$$y=(x-2)^2+1.$$

Вершина параболы находится в точке (2; 1); ветвь обращена вверх (рис. 90). Найдя еще несколько точек параболы, легко построить искомый график.

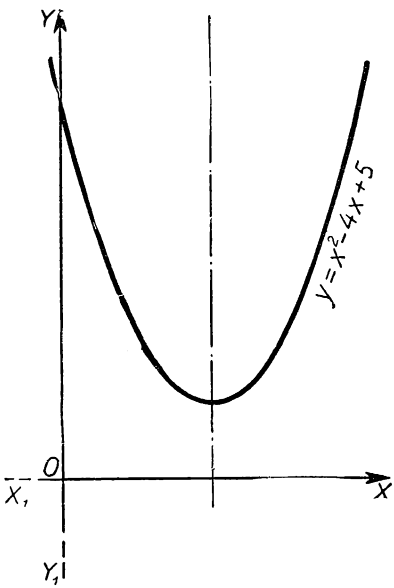


Рис. 90.

Пример 2. Построить график функции

$$y=-\frac{1}{2}x^2-x+2.$$

Выделив полный квадрат, получим:

$$y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+2\frac{1}{2}.$$

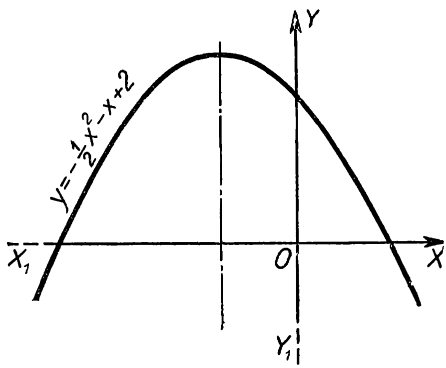


Рис. 91.

Вершина параболы находится в точке $\left(-1;\ 2\frac{1}{2}\right)$; ветвь обращена вниз (рис. 91).

Парабола является одной из замечательных кривых и имеет многочисленные важные практические применения.

Доказано, что параболой оказывается сечение поверхности прямого круглого конуса плоскостью, параллельной одной из ее образующих (рис. 92).

Доказано, что параболой оказывается траектория тела, брошенного горизонтально или наклонно к горизонту. На рисунке

93 изображена траектория тела, брошенного горизонтально со скоростью 15 *м* в секунду с высоты 300 *м*. (Сопротивлением воздуха мы здесь пренебрегаем.)

Отражающие поверхности рефлекторов и прожекторов делаются параболическими. (Поверхность называется параболической, если она получается вращением параболы около ее оси.) Благодаря этому лучи света, выйдя из источника и отразившись от зеркальной поверхности рефлектора или прожектора, идут дальше пучком, параллельным оси зеркала. Таким свойством обладает только параболическая форма поверхности зеркала.

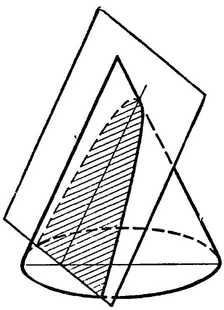


Рис. 92.

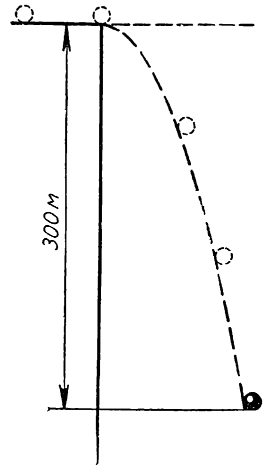


Рис. 93.

Крупнейшие мосты в мире имеют параболическую форму. Благодаря этому достигается красота их формы и лучшая механическая приспособленность к напряжениям и деформациям, вызываемым весом этих сооружений, т. е. достигается наибольшая прочность моста.

§ 12. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Обратимся теперь к самому правилу соответствия между значениями переменных, которое составляет сущность понятия функциональной зависимости. Правило это может быть весьма разнообразной природы, поскольку оно ничем не было ограничено.

1. Аналитический способ

Наиболее простым и естественным представляется осуществление этого правила в виде аналитического выражения или формулы, содержащей указания на те операции или действия над постоянными числами и над значением независимой переменной x, которые надо произвести, чтобы получить соответствующее значение y. Этот аналитический способ задания функций является наиболее важным в математике.

Примерами аналитического задания функции могут служить:

$$y=\frac{1}{1+x^2};\quad y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\quad y=ax^2+bx+c.$$

2. Табличный способ

В технике и естествознании часто встречаются такие величины x и y, зависимость между которыми заведомо существует, но неизвестна. Тогда производят ряд опытов, в каждом из которых измеряют значение величины x и соответствующее ему значение y. В результате составляется более или менее обширная таблица, в которой сопоставляются измеренные значения x измеренным значениям y.

t	p
...	...
...	...
...	...
...	...

Полученная таблица и будет представлять собой табличное задание функциональной зависимости величины y от величины x.

Например, подвергая воду различным давлениям p (атм.) и измеряя каждый раз температуру t (°C) кипения воды, можно получить табличное задание функциональной зависимости температуры t кипения от давления p.

Таблица логарифмов чисел или тригонометрических величин представляет собой примеры табличного способа задания функции.

Немало примеров табличного способа задания функции можно встретить в технических справочниках.

3. Графический способ

В некоторых случаях при помощи самопишущих приборов функциональная зависимость между физическими величинами задается непосредственно графиком. Например, «индикаторная диаграмма», снимаемая при помощи индикатора, дает зависимость между объемом v и давлением p пара в цилиндре работающей паровой машины; «барограмма», записываемая барографом, представляет суточный ход атмосферного давления и т. п.

Хотя в математическом анализе функции графически не задают, но к графической иллюстрации функций прибегают очень часто. Приведем еще один пример.

Пусть y есть ребро куба, а x его объем. Тогда функциональная зависимость y от x изобразится:

1) аналитически формулой $y=\sqrt[3]{x}$,
2) графически кривой (рис. 94),

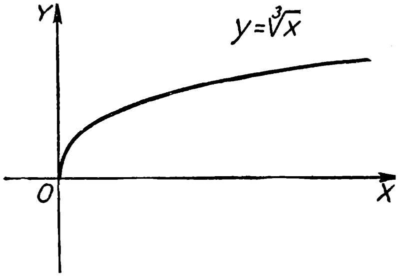


Рис. 94.

3) табличным способом следующей таблицей:

x	y
1	1,000000
2	1,259921
3	1,442250
4	1,587401
5	1,709976
	......

4. Другие способы задания функций

Было бы ошибочным думать, что не существует иных способов задания функций, кроме аналитического, табличного и графического. В самой математике нередки случаи, когда функция определяется без помощи формулы. Такова, например, функция $E(x)$ — «целая часть числа x» *.

Легко сообразить, что

$E(1)=1$; $E(2{,}5)=2$; $E(\sqrt{13})=3$; $E(-10{,}5)=-11$; $E(-\pi)=-4$ и т. п.

Другим примером может служить функция Дирихле $y=D(x)$, определяемая следующим образом:

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число.} \end{cases}$$

Так что $D(5)=1$; $D(\sqrt{5})=0$ и т. п.

Идея функциональной зависимости возникла на почве всеобщего принципа причинной зависимости, которым прониклись естествознание и другие науки, особенно в XVII и XVIII веках. Однако между этим принципом и математической идеей функциональной зависимости есть существенное различие. Принцип причинной зависимости предполагает исчерпывающее перечисление действительных причин, приводящих к известному следствию. Функциональная же зависимость, давая связь между величинами, не всегда предполагает, что изменение одной из них есть фактическая причина изменения другой.

Например, изменение температуры воздуха в течение суток является следствием многочисленных причин — изменений силы ветра, интенсивности солнечной радиации, степени влажности воздуха и т. п.; функциональная же зависимость здесь может быть установлена просто между температурой и временем суток, хотя течение

---

* Символ $E(x)$ обозначает собой наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

времени само по себе не является, конечно, «причиной» изменения температуры.

Если функция задается аналитическим выражением без всяких дополнительных условий, то всегда подразумевают, что областью ее определения является область определенности этого аналитического выражения.

§ 13. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ ЗНАК

Пусть некоторая функция от аргумента x нам неизвестна. В этом случае принято ее обозначать одним из следующих символов:

$$F(x),\ f(x),\ \Phi(x),\ g(x).$$

Пусть каким-нибудь способом нам удалось обнаружить, что этой ранее неизвестной функцией $F(x)$ является выражение x^2+x+1. Тогда мы должны считать, что в данном случае

$$\begin{aligned} &F(x)=x^2+x+1; && F(0)=1; \\ &F(5)=5^2+5+1; && F(-2)=(-2)^2+(-2)+1; \\ &F(a)=a^2+a+1; && F(a+b)=(a+b)^2+(a+b)+1. \end{aligned}$$

Если $F(x)=x^2\sqrt{2x+1}$, то $F(3)=3^2\sqrt{2\cdot 3+1}$;

$$F(1)=\sqrt{3} \text{ и } F(a)=a^2\sqrt{2a+1}.$$

Таким образом, символ $F(c)$ во всех случаях есть значение функции $F(x)$ при $x=c$, где c — любое число.

§ 14. ПОНЯТИЕ О ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЯХ

Существуют функции, значения которых не меняются при замене аргумента x на $-x$. Таким свойством обладает, например, функция $y=x^4+x^2+5$. Действительно, $(-x)^4+(-x)^2+5=x^4+x^2+5$. Функции, обладающие таким свойством, называются четными.

Определение. ***Функция $f(x)$ называется четной, если***

$$f(-x)=f(x).$$

Примеры четных функций:

$$y=(x^3+x)(x^5+x);\quad y=(x^2-1)^2.$$

График четной функции симметричен относительно оси Y_1Y. На рисунке 95 изображен график четной функции $y=\frac{1}{x^2+1}$.

Существуют функции, абсолютное значение которых не меняется, а знак меняется на противоположный при замене аргумента x на $-x$.

Таким свойством обладает, например, функция

$$y = x^3 + x.$$

Действительно,

$$(-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x).$$

Функции, обладающие таким свойством, называются нечетными.

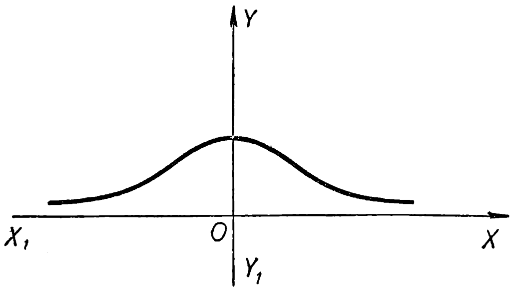


Рис. 95.

Определение. ***Функция $f(x)$ называется нечетной, если***

$$f(-x) = -f(x).$$

Примеры нечетных функций:

$$y = x^3;\ y = \frac{1}{x};\ y = (x^2 + 1)(x - x^3).$$

График нечетной функции симметричен относительно начала координат. На рисунке 96 изображен график нечетной функции $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

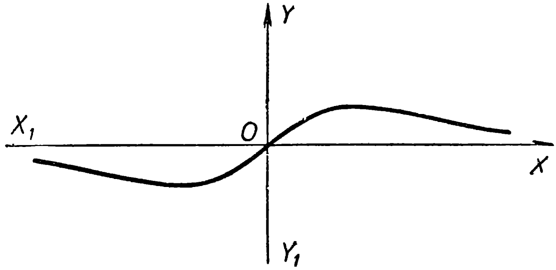


Рис. 96.

Существуют функции, которые не являются четными и в то же время не являются нечетными. Например, функция

$$y = x^2 + x + 1$$

не является ни четной, ни нечетной.

Известно, что $\cos(-x)=\cos x$. Это значит, что функция $y=\cos x$ является четной.

Известно далее, что $\sin(-x)=-\sin x$. Это значит, что функция $y=\sin x$ является нечетной.

§ 15. ПОНЯТИЕ О ПРОМЕЖУТКАХ* ВОЗРАСТАНИЯ И УБЫВАНИЯ ФУНКЦИИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Пусть кривая ABC (рис. 97) есть график некоторой функции $y=f(x)$ на промежутке изменения аргумента x от a до c.

Рассматривая кривую ABC, мы видим, что при возрастании аргумента x от a до b функция $y=f(x)$ возрастает, а при возрастании аргумента x от b до c функция $y=f(x)$ убывает. В подобных случаях принято говорить, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке (a, b) и убывает на промежутке (b, c).

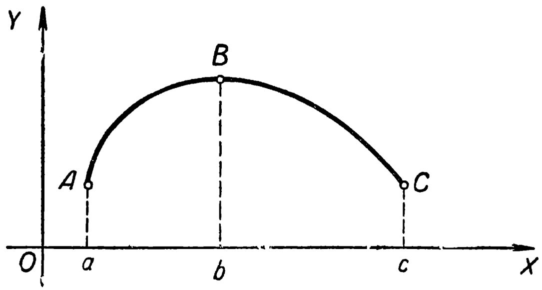


Рис. 97.

Определение. ***Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке (a, b), если для любых чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенствам***

$$a<x_1<x_2<b,$$

выполняется неравенство

$$f(x_1)<f(x_2).$$

Если же при

$$a<x_1<x_2<b$$

выполняется неравенство

$$f(x_1)>f(x_2),$$

то функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке (a, b).

* Промежутком, или интервалом, между числами a и b называется множество чисел, расположенных между a и b (сами числа a и b этому множеству не принадлежат). Такой промежуток обозначается символом (a, b).

Пример 1. Докажем, что функция $y=\frac{x}{x^2+1}$ возрастает на промежутке $(-1;\ 1)$.

Пусть x_1 и x_2 — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$-1<x_1<x_2<1.$$

Докажем, что

$$\frac{x_1}{x_1^2+1}<\frac{x_2}{x_2^2+1}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{x_2}{x_2^2+1}-\frac{x_1}{x_1^2+1}=\frac{x_1^2x_2+x_2-x_1x_2^2-x_1}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\frac{-x_1x_2(x_2-x_1)+x_2-x_1}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=$$
$$=\frac{(x_2-x_1)(1-x_1x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}.$$

Так как $x_2>x_1$ и $|x_1\cdot x_2|<1$, последняя дробь является положительным числом. А это и значит, что

$$\frac{x_1}{x_1^2+1}<\frac{x_2}{x_2^2+1}.$$

Следовательно, функция $y=\frac{x}{x^2+1}$ возрастает на промежутке $(-1;\ 1)$.

Пример 2. Докажем, что функция $y=x^3-6x$ убывает на промежутке $(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$.

Пусть $-\sqrt{2}<x_1<x_2<\sqrt{2}$. Тогда

$$(x_1^3-6x_1)-(x_2^3-6x_2)=x_1^3-x_2^3-6x_1+6x_2=$$
$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)-6(x_1-x_2)=$$
$$=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6).$$

Последнее произведение есть положительное число, так как оба его множителя отрицательны. Действительно,

$$x_1-x_2<0,$$

так как $x_1<x_2$;

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-6<0,$$

так как

$$|x_1^2+x_1x_2+x_2^2|\leqslant|x_1^2|+|x_1x_2|+|x_2^2|<2+2+2=6.$$

(Мы воспользовались тем, что абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных значений слагаемых, см. стр. 63.)

Следовательно,

$$(x_1^3-6x_1)-(x_2^3-6x_2)>0,$$

или

$$x_1^3-6x_1>x_2^3-6x_2,$$

а это и значит, что функция $y=x^3-6x$ убывает на промежутке $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}.)$

Пример 3. Докажем следующее утверждение: функция $y=\frac{x+1}{x-1}$ убывает на промежутке $(1; b)$, где b — любое положительное число, большее единицы.

Пусть x_1 и x_2 — любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам $1<x_1<x_2<b$.

Тогда

$$\frac{x_1+1}{x_1-1}-\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}.$$

Согласно нашим условиям $\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$. Следовательно, $\frac{x_1+1}{x_1-1}>\frac{x_2+1}{x_2-1}$, а это и означает, что сделанное нами утверждение справедливо.

§ 16. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ РАЗЪЯСНЕНИЕ О СПОСОБАХ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Изучая вопросы, связанные с понятием функции, учащиеся нередко упускают из виду точное определение понятия функции, привыкают представлять себе функцию прежде всего как формулу, как аналитическое выражение и вне этой связи, как правило, не умеют мыслить о функциональной зависимости. Такое ограниченное представление о функциональной зависимости может затруднить понимание многих других вопросов, связанных с понятием функции. Поэтому мы считаем целесообразным еще раз остановить внимание учащегося на определении понятия функции и на способах ее задания.

Напомним еще раз определение понятия функции. Величина y есть функция величины x, определенная на некотором множестве (совокупности) действительных значений x, если каждому значению x из этого множества соответствует некоторое определенное значение величины y.

Таким образом, при слове «функция» мы должны мыслить о соответствии между множеством значений величины x и множеством значений величины y, не связывая это обязательно с какой-нибудь одной формулой или одним аналитическим выражением. Правило, устанавливающее соответствие между множеством значений величины x и множеством значений величины y, может быть каким угодно.

Это правило может выражаться при помощи одной формулы, нескольких формул или словесной формулировкой и другими способами. Приведем примеры.

1. Пусть функция $y=f(x)$ изображается графически ломаной линией, состоящей из биссектрис первого и второго координатных углов (рис. 98).

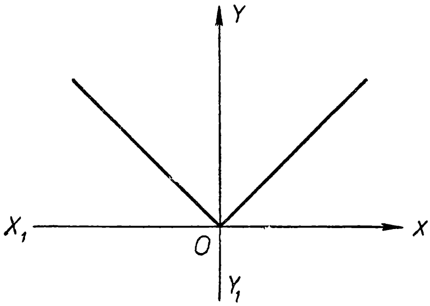


Рис. 98.

В данном случае соответствие между значениями величины x и значениями величины y устанавливается графически.

Это соответствие можно выразить довольно просто и аналитически, а именно

$$y=\begin{cases} -x & \text{при } x<0; \\ x & \text{при } x\geqslant 0 \end{cases}$$

либо записью $y=|x|$.

Однако не следует думать, что переход от графического задания функции к аналитическому всегда можно сделать, да еще с такой легкостью.

Вопрос о том, когда такой переход возможен, и методы такого перехода изучаются в курсе высшей математики.

2. Пусть задана функция $y=f(x)$ следующей записью:

$$y=\begin{cases} 1 & \text{при } x<-1; \\ x+2 & \text{при } 1\leqslant x<0; \\ 1 & \text{при } x=0; \\ -x+2 & \text{при } 0<x\leqslant 1; \\ 1 & \text{при } x>1. \end{cases}$$

Здесь мы имеем полноценную запись соответствия между значениями величины x и значениями величины y, т. е. имеем пол-

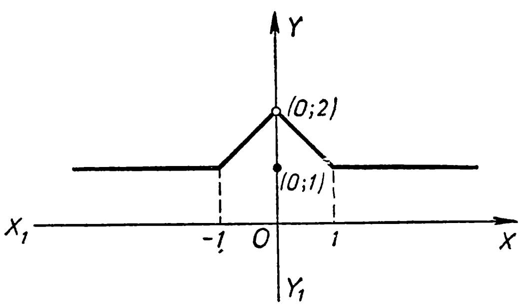


Рис. 99.

ноценное задание одной единственной функции $y=f(x)$, график который изображен на рисунке 99.

Этот график состоит из одной изолированной точки (0; 1) и одной бесконечно простирающейся ломаной линии, лишенной точки (0; 2).

Таким образом, функциональная зависимость одной и той же функции может задаваться различными аналитическими выражениями на различных участках и определенными числами в отдельных точках.

3. Пусть задана функция $y=f(x)$ следующей записью:

$$x=f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } x<0; \\ 1 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

Эта функция определена для всех значений x, кроме значения $x=0$. Ее можно выразить с помощью одного аналитического выражения таким образом:

$$y=\frac{|x|}{x}.$$

При $x=0$ эта функция не определена, так как выражение $\frac{0}{0}$ не является определенным числом.

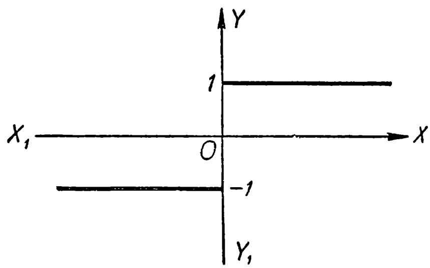


Рис. 100.

График этой функции изображен на рисунке 100.

У этого графика нет точки с нулевой абсциссой. Точки (0; 1) и (0; —1) не принадлежат графику.

4. Пусть задана функция $y=f(x)$ следующей записью:

$$y=f(x)=\begin{cases} -1 & \text{при } x<0; \\ 1 & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Эта функция определена для всех значений x. Ее график имеет точку с нулевой абсциссой. Ордината этой точки равна единице. Этому графику не принадлежит точка (0; —1). Сравните этот график с графиком, относящимся к примеру 3.

5. Рассмотрим одну из функций, определяемых словесно. Пусть функция $y=E(x)$ определяется следующим правилом. За значение величины y принимается всякий раз целая часть значения величины x.

Следуя этому правилу, получим, например:

x	...	−6,8	−6	−2,4	−0,9	−0,1	0	0,1	0,9	1	1,2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	π	...
y	...	−7	−6	−3	−1	−1	0	0	0	1	1	1	1	3	...

Примечание. Целой частью целого отрицательного числа мы считаем само это число. Целой частью нецелого отрицательного числа мы считаем ближайшее к нему, но меньшее его, целое отрицательное число.

Функция $y=E(x)$ называется «целой частью от x» или кратко «антье от x». Слово «антье» происходит от французского слова entier, что означает «целое».

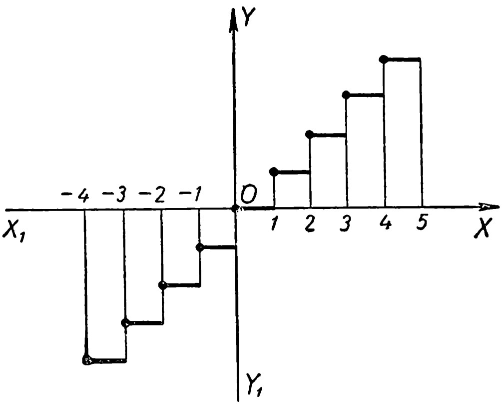


Рис. 101.

График функции $y=E(x)$ изображен на рисунке 101.

Этот график представляет собой ступенчатую линию, состоящую из отдельных отрезков прямой, расположенных параллельно оси X_1X. Левые концы этих отрезков принадлежат графику, а правые не принадлежат. График функции $y=\sqrt{|x|}$ изображен на рисунке 102.

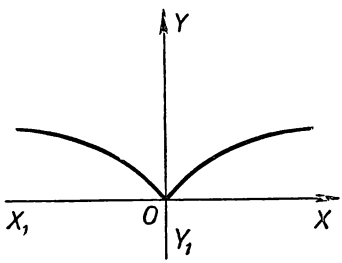


Рис. 102.

Ограничимся этими шестью примерами задания функции, хотя можно было бы привести еще много других не менее интересных примеров.

В определении понятия функции не требуется, чтобы при изменении независимой переменной функция обязательно изменялась. Важным является лишь то, чтобы каждому рассматриваемому значению независимой переменной соответствовало определенное значение функции. Поэтому естественно считать функцией и величину, которая вовсе не меняется при изменении аргумента, иными словами, являющуюся постоянной. К этой точке зрения приводит еще и такое соображение: величина, зависящая от некоторой переменной величины и вообще изменяющаяся вместе с ней, может оказаться в частных предположениях постоянной. Конечно, нецелесообразно выделять из общего случая частный и считать, что в этом частном случае наша величина не есть уже функция.

Например, из формулы

$$y = a\sin^2 x + b\cos^2 x \qquad (A)$$

видно, что каждому значению x будет соответствовать одно определенное значение y. Следовательно, y есть функция от x. При изменении значения x будет изменяться и значение y. Но если в формуле (А) мы возьмем $b = a$, то величина y, оставаясь функцией от x, станет принимать при всех значениях аргумента x неизменно одно и то же значение, равное a.

Итак, постоянную можно тоже рассматривать как функцию, именно как функцию, значения которой для всех значений независимой переменной равны между собой. Это не противоречит определению понятия функции.

§ 17. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОТЫСКАНИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОРНЕЙ УРАВНЕНИЯ

Могут быть случаи, когда точные корни уравнения найти либо очень трудно, либо даже невозможно. Между тем как для практических целей бывает достаточно знать хотя бы приближенные значения этих корней (разумеется, с требуемой степенью точности). В этих случаях хорошим вспомогательным средством может служить графический метод. Мы называем этот метод вспомогательным, потому что он один не может дать полное решение вопроса. С помощью графического метода мы можем найти значения корней лишь с весьма ограниченной степенью точности. Но и такие приближенные значения корней будут представлять ценность, потому что, имея их, можно путем вычислений отыскать значения корней уже с любой степенью точности. (Графики очень удобно строить на миллиметровой бумаге.)

Поясним сказанное на примере.

Найти приближенные значения корней уравнения

$$x^3 - 4x + 1 = 0.$$

Очевидно, что корнями данного уравнения будут те значения буквы x, при которых функция $y = x^3 - 4x + 1$ обращается в нуль. Поэтому корни данного уравнения изобразятся теми точками числовой оси X_1X, в которых график функции

$$y = x^3 - 4x + 1$$

пересекает эту ось (рис. 103).

Теперь точки пересечения этого графика с осью X_1X позволяют обнаружить, что уравнение $x^3 - 4x + 1 = 0$ имеет три корня, приближенные значения которых будут: $-2,1$; $0,2$ и $1,8$.

При графическом решении уравнения (или системы уравнений) ответы определяются лишь грубо приближенно. Однако существуют алгебраические способы, позволяющие, исходя из этих грубых приближений, получить ответы с любой требуемой степенью точности.

Покажем простейший способ уточнения корня.

Один из корней уравнения

$$x^3-4x+1=0,$$

найденный нами, равен 0,2 с точностью до 0,1.

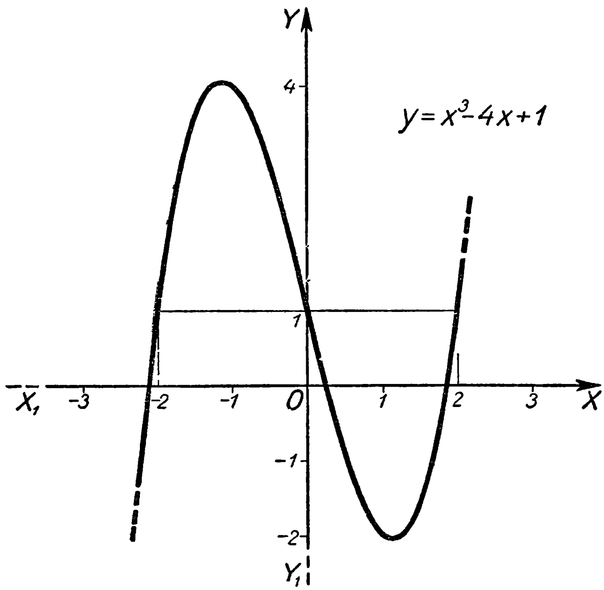


Рис. 103.

Прежде всего выясним, меньше или больше истинного корня число 0,2.

При $x=0,2$ $\quad x^3-4x+1>0$, так как

$$0,2^3-4\cdot 0,2+1=0,008-0,8+1>0.$$

При $x=0,3$ $\quad x^3-4x+1<0$, так как

$$(0,3)^3-4\cdot 0,3+1=0,027-1,2+1<0.$$

Значит, 0,2 меньше истинного значения корня. Более того, этот корень заключается между числами 0,2 и 0,3.

Попробуем найти более тесные границы, между которыми лежит истинный корень. Для этого испытаем число 0,25.

При $x=0,25$ $\quad x^3-4x+1>0$, так как

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3-4\cdot\frac{1}{4}+1=\frac{1}{64}-1+1>0.$$

Значит истинное значение корня заключается между числами 0,25 и 0,30.

Испытаем теперь число 0,26.

При $x=0{,}26$ $\quad x^3-4x+1<0$, так как

$$(0{,}26)^3-4\cdot 0{,}26+1=0{,}018-1{,}040+1<0.$$

Значит, истинное значение корня заключается между числами 0,25 и 0,26, разность между которыми равна 0,01.

Следовательно, число 0,25 есть приближенное значение корня с точностью до 0,01 с недостатком, а 0,26 — с той же точностью с избытком. Продолжая изложенный процесс, можно отыскать корень и с требующейся нам степенью точности.

Более совершенные и практически более удобные способы нахождения приближенных корней уравнений с числовыми коэффициентами излагаются в курсах высшей алгебры.

§ 18. ПОНЯТИЕ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОБРАЗЕ (ГРАФИКЕ) УРАВНЕНИЯ

Мы уже знаем, что называется графиком функции. Теперь введем понятие о графике уравнений.

Возьмем какое-нибудь уравнение с двумя неизвестными, например уравнение

$$x^2+y^2=25.$$

Тогда все множество точек плоскости можно по отношению к этому уравнению разбить на два класса:

1) на точки, координаты которых не удовлетворяют этому уравнению, и

2) на точки, координаты которых этому уравнению удовлетворяют.

Примерами точек первого класса служат, например, точки:

$A(1;\ 2)$; $B(1;\ -2)$; $C(0;\ 4)$; $D(1;\ 1)$; $E(-1;\ -1)$ и т. д.

Примерами точек второго класса служат, например, точки:

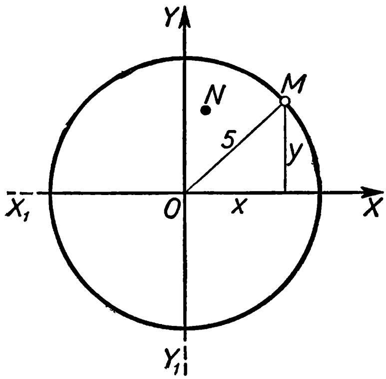
$$(0;\ 5);\quad (0;\ -5);\quad (5;\ 0);\quad (-5;\ 0);\quad (3;\ 4);\quad (3;\ -4);$$
$$(-3;\ 4);\quad (-3;\ -4) \text{ и т. д.}$$

Множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$x^2+y^2=25,$$

есть геометрический образ, или график, этого уравнения.

Пользуясь теоремой Пифагора, нетрудно сообразить, что геометрическим образом уравнения $x^2+y^2=25$ будет окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 5 (рис. 104). В самом деле, если взять любую точку на этой окружности и ее координаты обозначить буквами x и y, то по теореме Пифагора получим, что $x^2+y^2=25$. Если же взять точку внутри круга, то окажется, что $x^2+y^2<25$. Для точек, лежащих вне круга, $x^2+y^2>25$.



Рис, 104.

Таким образом, мы доказали, что множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=25$, будет представлять собой окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 5. Эта окружность является как бы наглядной моделью уравнения $x^2+y^2=25$. Аналогично уравнение $x^2+y^2=r^2$ изображает окружность с центром в начале координат и с радиусом r.

Обобщая изложенное, примем следующее определение:

Графиком уравнения, связывающего неизвестные x и y, называется множество тех и только тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Рассмотрим еще уравнение первой степени

$$Ax+By+C=0$$

с двумя неизвестными x и y.

Предположим сначала, что $B\neq 0$. Тогда получим, что

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Таким образом, при $B\neq 0$ y есть линейная функция от x и ее графиком будет прямая линия, не параллельная оси Y_1Y.

Теперь допустим, что $B=0$, но $A\neq 0$. При этом условии мы получим:

$$Ax+C=0,$$

или

$$x=-\frac{C}{A}.$$

Следовательно, графиком будет прямая, параллельная оси Y_1Y.

Итак, если A и B не равны нулю одновременно, то графиком уравнения $Ax+By+C=0$ является прямая линия.

Построим, например, график уравнения $2x+3y=6$.

Полагая $x=0$, имеем $y=2$. Полагая $y=0$, имеем $x=3$.

Прямая, проходящая через точки (0; 2) и (3; 0), и будет искомым графиком.

§ 19. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Пусть нам задана система:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ 2x+y=3. \end{cases}$$

Очевидно, что решением этой системы будет:

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Построив на клетчатой или миллиметровой бумаге геометрические образы уравнений

$$x+y=2 \quad \text{и} \quad 2x+y=3,$$

убедитесь, что координатами точки пересечения полученных двух прямых линий будут:

$$x=1 \quad \text{и} \quad y=1.$$

Система

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=3 \end{cases}$$

не имеет ни одного решения. Геометрически это означает, что прямые $x+y=1$ и $2x+2y=3$ параллельны и различны.

Система

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений, которые можно получать как решения одного из данных уравнений. Геометрически это означает, что прямые $x+y=1$ и $2x+2y=2$ сливаются в одну прямую.

Система

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+3y=1 \end{cases}$$

имеет только одно решение:

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$$

Геометрически это означает, что прямые

$$x+y=1 \quad \text{и} \quad 2x+3y=1$$

являются пересекающимися.

Итак, *система двух линейных уравнений с двумя неизвестными имеет:*

одно решение, если графики данных уравнений пересекаются,
ни одного решения, если эти графики параллельны, и
бесконечное множество решений, если графики сливаются.

УПРАЖНЕНИЯ

197. Построить на координатной плоскости точки:

$A\,(4;\,1)$; $B\,(-2;\,3)$; $C\,(-3;\,-1)$; $D\,(5;\,0)$; $E\,(0;\,-2)$.

198. Построить графики функций:

1) $y=-x+1$; 2) $y=-x$; 3) $y=-\frac{3}{x}$;

4) $y=\frac{1}{4}x^2-x+1$; 5) $y=\frac{1}{x^2+1}$.

199. Найти графически корни уравнения

$$x^3-3x^2+2=0.$$

200. Построить линии

$$x^2+y^2=9 \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{4}x^2-x+1$$

и по чертежу определить приближенно координаты точек пересечений этих линий.

201. Зная, что $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$, найти $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$.

202. Зная, что $f(x)=|x-3|+|x-4|$, найти $f(0)$; $f(1)$; $f(-1)$.

203. Зная, что $f(x,\,y)=(x+y)^3-x^3-y^3$, найти $f(1,\,2)$; $f(2,\,-1)$.

204. Доказать, что функция

$$y=12x-x^3$$

на промежутке $(-2;\,2)$ возрастает.

205. Доказать, что функция $y=(x^2-1)^2$ на промежутке $(-1;\,0)$ возрастает и на промежутке $(0;\,1)$ убывает.

206. Доказать, что произведение

$$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})\,(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{99}+x^{100})$$

является четной функцией.

207. Определить геометрический образ уравнения

$$y+|y|=x+|x|.$$

ГЛАВА XX

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ И ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫШЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Как нам уже известно, системой уравнений называется совокупность двух или нескольких уравнений, в которых одноименные неизвестные обозначают одну и ту же величину.

Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными, например системы

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ x^2 + y^2 = 5, \end{cases}$$

называется пара чисел, подстановка которых в каждое уравнение системы (первого вместо x, а второго вместо y) превращает каждое уравнение системы в тождество.

Например, пара чисел (1; 2) есть одно решение системы:

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Пара чисел (—2; —1) будет представлять собой еще одно решение этой же системы. Пара же чисел, скажем (3; 2), ее решением уже не будет.

Решение системы можно записывать и в другой форме. Например, вместо записи (1; 2) или (—2; —1) можно написать так:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2 \end{cases} \text{ (первое решение)}$$

$$\begin{cases} x = -2, \\ y = -1 \end{cases} \text{ (второе решение).}$$

Что значит решить систему двух уравнений с двумя неизвестными?

Решить систему двух уравнений с двумя неизвестными — это значит найти все решения этой системы или же убедиться в отсутствии таковых.

Две системы уравнений называются равносильными (эквивалентными), если всякое решение первой системы является решением второй и, наоборот, всякое решение второй системы представляет собой решение первой.

В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением решений лишь простейших систем. Более сложные системы и с большей полнотой будут рассмотрены во второй части учебника.

§ 2. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ОДНО УРАВНЕНИЕ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ И ОДНО — ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Система уравнений с двумя неизвестными x и y, в котором одно уравнение первой степени, а другое — второй степени, имеет следующий общий вид:

$$\begin{cases} mx+ny+p=0, \\ ax^2+bxy+cy^2+dx+cy+f=0. \end{cases}$$

Основной способ решения такой системы есть способ подстановки. Из уравнения первой степени выражают одно неизвестное (например, y) в зависимости от другого (от x). Полученное выражение для неизвестного y подставляют вместо буквы y в уравнение второй степени. Находят корни полученного квадратного уравнения с одним неизвестным (неизвестным x).

После этого для каждого найденного значения x находят соответствующее значение неизвестного y.

Полученные пары

$$\begin{cases} x=x_1, \\ y=y_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x=x_2, \\ y=y_2 \end{cases}$$

и будут решениями данной системы.

Пример 1.

$$\begin{cases} y-x=1, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

Из уравнения первой степени выразим одно неизвестное через другое. Удобно взять $y=1+x$. Заменив в уравнении второй степени y через $1+x$, получим уравнение

$$x^2+(x+1)^2=5.$$

Решив это квадратное уравнение, получим, что

$$x_1=1 \quad \text{и} \quad x_2=-2.$$

Теперь, пользуясь уравнением $y=x+1$, получим, что при $x_1=1$ будет $y_1=2$, а при $x_2=-2$ будет $y_2=-1$.

Итак, получили два решения данной системы:

$$(1;\ 2) \quad \text{и} \quad (-2;\ -1),$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \text{(первое решение);}$$

$$\begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = -1 \end{cases} \quad \text{(второе решение).}$$

Система двух уравнений, из которых одно первой степени, а другое второй степени, имеет, вообще говоря, два решения.

Пример 2.

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ 12x^2 - 4xy - 4y^2 + 8x - 8y + 21 = 0. \end{cases}$$

Решение. $y = x + 1$;

$$12x^2 - 4x(x+1) - 4(x+1)^2 + 8x - 8(x+1) + 21 = 0;$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0, \quad (2x-3)^2 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 1{,}5$ и $x_2 = 1{,}5$.

При $x = 1{,}5$ будет $y = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$.

Мы получили одно решение.

Возникает вопрос: почему получилось только одно решение, а не два, как можно было ожидать? Это объясняется тем, что корни квадратного уравнения $4x^2 - 12x + 9 = 0$, полученного нами после исключения неизвестного y, оказались одинаковыми. В подобных случаях говорят, что система имеет два одинаковых решения. Поэтому мы скажем, что данная нам система имеет два одинаковых решения:

$$\begin{cases} x = 1{,}5, \\ y = 2{,}5 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1{,}5, \\ y = 2{,}5. \end{cases}$$

Пример 3.

$$\begin{cases} y - x = 1, \\ 2x^2 - xy - y^2 + 2x - 2y + 6 = 0. \end{cases}$$

Решение. $y = x + 1$;

$$2x^2 - x(x+1) - (x+1)^2 + 2x - 2(x+1) + 6 = 0;$$

$$-3x + 3 = 0; \quad x = 1.$$

При $x = 1$ будет $y = 1 + 1 = 2$.

Мы опять получили одно решение:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Возникает вопрос: почему и в данном случае получилось одно решение, а не два? Объясняется это тем, что после исключения неизвестного y мы получили уравнение первой степени $-3x+3=0$, а не квадратное, как можно было ожидать. В подобных случаях говорят, что система имеет только одно решение. Здесь можно сказать, что второе решение системы исчезло потому, что исчез член, содержащий вторую степень неизвестного x в уравнении, полученном после исключения неизвестного y. Действительно, после исключения неизвестного y получилось уравнение $-3x+3=0$, т. е. уравнение не второй степени, а первой степени.

Замечание. Могут быть случаи, когда система, в которой одно уравнение первой, а другое — второй степени, не имеет ни одного действительного решения. Например, система

$$\begin{cases} x+y=10, \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$$

не имеет ни одного действительного решения.

§ 3. СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ, В КОТОРЫХ ОБА УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Общий вид системы двух уравнений с двумя неизвестными x и y, в которой оба уравнения 2-й степени, таков:

$$\begin{cases} Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0, \\ A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0. \end{cases}$$

Решение такой системы представляет большие трудности и не входит в курс элементарной алгебры. Поэтому мы здесь рассмотрим лишь некоторые частные случаи таких систем, решаемых искусственным путем.

Некоторые системы, решаемые искусственным способом

Пример 1.

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6. \end{cases}$$

Сложив левые и правые части этих уравнений, получим квадратное уравнение с одним неизвестным:

$$2x^2+2x=24, \quad \text{или} \quad x^2+x-12=0.$$

Отсюда

$$1)\ x=3 \quad \text{и} \quad 2)\ x=-4.$$

Подставляя сначала в одно из данных уравнений, например в уравнение $x^2+y^2+x+y=18$, вместо буквы x найденное число 3, получим:

$$3^2+y^2+3+y=18, \quad \text{или} \quad y^2+y-6=0.$$

Отсюда

$$1)\ y=2 \quad \text{и} \quad 2)\ y=-3,$$

что дает два следующих решения системы: (3; 2); (3; —3), или в другой форме записи:

$$1) \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2; \end{cases} \qquad 2) \quad \begin{cases} x=3, \\ y=-3. \end{cases}$$

Теперь сделаем то же самое, приняв $x=-4$;

$$(-4)^2+y^2+(-4)+y=18, \quad \text{или} \quad y^2+y-6=0.$$

Отсюда

$$1)\ y=2 \quad \text{и} \quad 2)\ y=-3,$$

что дает еще два следующих решения системы:

$$(-4;\ 2) \quad \text{и} \quad (-4;\ -3).$$

Итак, данная система имеет четыре решения:

$$(3;\ 2),\ (3;\ -3),\ (-4;\ 2),\ (-4;\ -3).$$

Пример 2.

$$\begin{cases} x^2-xy-\ \ \ y^2=5, \\ 2x^2+xy-10y^2=11. \end{cases}$$

Умножим обе части первого уравнения на 11, а второго — на —5. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 11x^2-11xy-11y^2=\ \ 55, \\ -10x^2-\ \ 5xy+50y^2=-55. \end{cases}$$

Сложив левые и правые части уравнений последней системы, получим:

$$x^2-16xy+39y^2=0.$$

Докажем, что y не может равняться нулю. В самом деле, если бы $y=0$, то из уравнения $x^2-xy-y^2=5$ мы получили бы $x^2=5$, а из уравнения $2x^2+xy-10y^2=11$ получили бы $x^2=\frac{11}{2}$, т. е. результат, противоречащий предыдущему равенству $x^2=5$. Значит, $y \neq 0$. Поэтому мы можем разделить все члены уравнения $x^2-16xy+39y^2=0$ на y^2. После этого будем иметь:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-16\cdot\frac{x}{y}+39=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\frac{x}{y}$, получим:

$$\frac{x}{y}=8\pm\sqrt{64-39},$$

т. е.

$$1)\quad \frac{x}{y}=13 \text{ и } 2)\ \frac{x}{y}=3.$$

Из $\frac{x}{y}=13$ следует, что $x=13y$.

Подставляя это найденное значение неизвестного x в одно из уравнений данной системы, например в уравнение

$$x^2-xy-y^2=5,$$

получим:

$$169y^2-13y^2-y^2=5,$$

откуда

$$1)\ y=+\frac{1}{\sqrt{31}} \text{ и } 2)\ y=-\frac{1}{\sqrt{31}}.$$

Этим двум значениям неизвестного y будут соответствовать из уравнения $x=13y$ два значения неизвестного x, а именно:

$$1)\ x=\frac{13}{\sqrt{31}} \text{ и } 2)\ x=-\frac{13}{\sqrt{31}}.$$

Таким образом, мы нашли пока два решения данной системы:

$$\left(\frac{13}{\sqrt{31}};\ \frac{1}{\sqrt{31}}\right) \text{ и } \left(-\frac{13}{\sqrt{31}};\ -\frac{1}{\sqrt{31}}\right).$$

Теперь примем во внимание второй ответ для неизвестного $\frac{x}{y}$, а именно то, что

$$\frac{x}{y}=3, \text{ или } x=3y.$$

Поступая так же, как и в предыдущем случае, мы найдем еще два решения данной системы: (3; 1) и (— 3; — 1).

Итак, данная система имеет четыре решения:

$$\left(\frac{13}{\sqrt{31}};\ \frac{1}{\sqrt{31}}\right),\ \left(-\frac{13}{\sqrt{31}};\ -\frac{1}{\sqrt{31}}\right),\ (3;\ 1) \text{ и } (-3;\ -1).$$

Пример 3.

$$\begin{cases} x+y=30, \\ xy=209. \end{cases}$$

Неизвестные x и y мы можем рассматривать * как корни такого приведенного квадратного уравнения, свободный член которого 209, а коэффициент при неизвестном 1-й степени —30, т. е. уравнения

$$z^2-30z+209=0.$$

Решая это уравнение, найдем два его корня: 19 и 11. Один из этих корней мы должны принять за значение одного неизвестного, а другой — за значение второго неизвестного. Но так как это можно сделать двумя способами, мы получим два решения данной системы:

$$1) \begin{cases} x=19, \\ y=11 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x=11, \\ y=19. \end{cases}$$

Этот прием рекомендуется применять к любой системе вида:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

Пример 4.

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3. \end{cases}$$

Умножив обе части второго уравнения на два и произведя соответствующее сложение с первым уравнением, получим:

$$x^2+2xy+y^2=16,$$

или

$$(x+y)^2=16.$$

Отсюда либо $x+y=4$, либо $x+y=-4$.

Решив систему

$$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3, \end{cases}$$

найдем два решения первоначальной системы: (1; 3) и (3; 1). Затем, решив систему

$$\begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3, \end{cases}$$

найдем еще два решения:

$$(-1;\ -3) \text{ и } (-3;\ -1).$$

Итак, первоначальная система имеет четыре решения:

$$(1;\ 3),\ (3;\ 1),\ (-1;\ -3) \text{ и } (-3;\ -1).$$

---

* См. стр. 269.

Пример 5.

$$\begin{cases} x^4+y^4=17, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy.$$

Но так как $x+y=3$, то $x^2+y^2=9-2xy$.
Также очевидно, что

$$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2.$$

Но так как $x^2+y^2=9-2xy$, то $x^4+y^4=(9-2xy)^2-2x^2y^2=$ $=81-36xy+2x^2y^2$.

После этих преобразований первоначальная система примет вид:

$$\begin{cases} 2x^2y^2-36xy+81=17, \\ x+y=3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2y^2-18xy+32=0, \\ x+y=3. \end{cases}$$

Примем произведение xy за новую неизвестную z. Тогда первое уравнение системы примет вид:

$$z^2-18z+32=0.$$

Отсюда $z_1=16$, $z_2=2$.

Теперь остается решить в отдельности каждую из двух систем:

$$1) \begin{cases} x+y=3, \\ xy=16 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2. \end{cases}$$

Первая система действительных решений не имеет. Вторая дает два решения. Следовательно, первоначальная система имеет только два действительных решения:

$$(2;\ 1) \text{ и } (1;\ 2).$$

Решение систем со многими неизвестными рассмотрено в § 6 настоящей главы.

§ 4. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Если система легко разрешима аналитически, то нет смысла решать ее графически. Однако встречаются такие системы, решить которые аналитически крайне трудно. Между тем для практических целей важно находить решения таких систем хотя бы приближенно. В этих случаях графический метод оказывается очень полезным средством. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Решить систему:

$$\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=-\frac{20}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{40}{9}. \end{cases}$$

Посмотрим, к чему приведет нас попытка решить эту систему аналитически.

Подставляя в первое уравнение выражение неизвестного y, взятое из второго, получим:

$$x^2+\left(-\frac{20}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{40}{9}\right)^2=9,$$

или

$$x^2+\left(\frac{20}{9}\right)^2(-x^2+x+2)^2=9,$$

или

$$x^2+\frac{400}{81}(x^4+x^2+4-2x^3-4x^2+4x)=9,$$

или

$$400x^4-800x^3-1119x^2+1600x+871=0.$$

Решение этого уравнения представляет значительные трудности и выходит за рамки элементарной алгебры. Поэтому обратимся к графическому методу.

Геометрическим образом первого уравнения системы, т. е. уравнения $x^2+y^2=9$, как нам известно, является окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 3. Построим эту окружность на миллиметровой бумаге (рис. 105). На этой же координатной плоскости построим геометрический образ второго уравнения системы, т. е. уравнения

$$y=-\frac{20}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{40}{9}.$$

Как известно, геометрическим образом этого уравнения является парабола с осью, параллельной оси Y_1Y. Эта парабола простирается неограниченно «вниз». Ее вершиной служит точка $\left(\frac{1}{2};\ 5\right)$ (см. стр. 315).

Чтобы построить эту параболу, составим таблицу значений y, соответствующих значениям x.

Для удобства вычислений уравнение

$$y=-\frac{20}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{40}{9}$$

запишем в виде

$$y=-\frac{20}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+5.$$

Теперь легко получить следующую таблицу:

x	...	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	$8\frac{8}{9}$	0	$4\frac{4}{9}$	$4\frac{4}{9}$	0	$8\frac{8}{9}$	...

Пользуясь этой таблицей, построим кривую, являющуюся изображением параболы:

$$y = -\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{40}{9} \qquad \text{(рис. 105).}$$

Полученные линии (окружность и парабола) пересекаются в четырех точках.

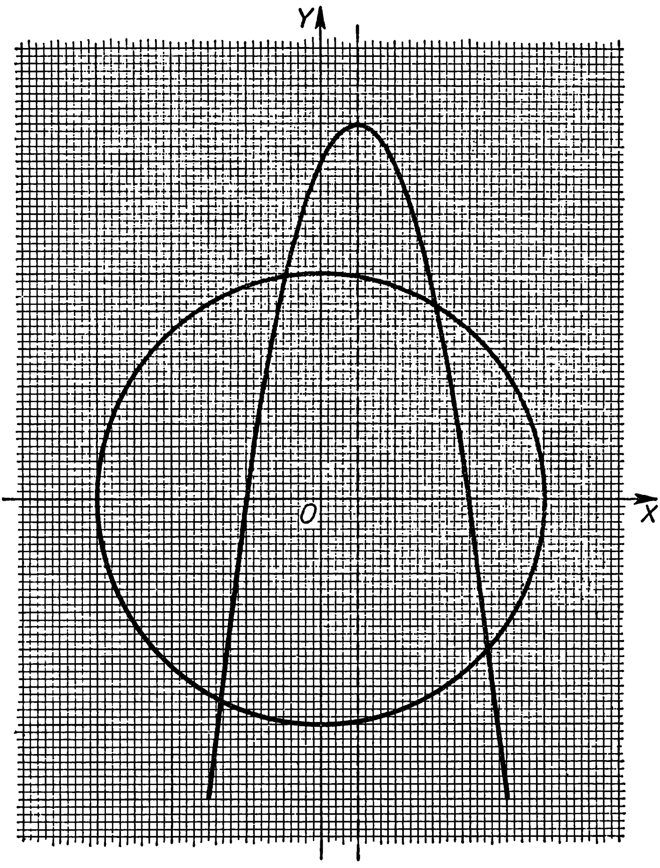


Рис. 105.

Следовательно, данная система имеет четыре решения:

1) $\begin{cases} x \approx -1{,}33, \\ y \approx -2{,}70; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \approx -0{,}47, \\ y \approx 2{,}97; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \approx 1{,}57, \\ y \approx 2{,}60; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \approx 2{,}55, \\ y \approx -2{,}00. \end{cases}$

Недостатком графического метода является то, что решения системы получаются, как правило, приближенные, с весьма ограниченной степенью точности. Повысить же эту точность путем увеличения масштаба, принимаемого для построения графика, неудобно. Например, чтобы определить еще один десятичный знак, кроме найденных, пришлось бы масштаб увеличить в 10 раз. В таком увеличении масштаба нет необходимости, так как существуют алгебраические способы, позволяющие из найденных графически решений получать решения с любой степенью точности. Эти способы здесь не излагаются.

Приведем еще один пример графического решения системы.

Пример 2. Решить систему:

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ y = x^4 - 2x^2 + 1. \end{cases}$$

Подставляя в первое уравнение выражение неизвестного y, взятое из второго, получим:

$$x - 2(x^4 - 2x^2 + 1) + 3 = 0, \quad \text{или} \quad 2x^4 - 4x^2 - x - 1 = 0.$$

Это уравнение алгебраически трудно решить. Поэтому опять обратимся к графическому методу.

Для удобства вычислений перепишем уравнение

$$y = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \text{в виде} \quad y = (x^2 - 1)^2.$$

Чтобы построить график функции $y = (x^2 - 1)^2$, составим следующую таблицу:

x	...	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	...
y	...	64	9	$1\frac{9}{16}$	0	$\frac{9}{16}$	1	$\frac{9}{16}$	0	$1\frac{9}{16}$	9	64	...

Пользуясь этой таблицей, построим на миллиметровой бумаге график функции $y = (x^2 - 1)^2$ (рис. 106). Как видно из этого же графика, геометрическим образом уравнения $x - 2y + 3 = 0$ будет прямая, проходящая через точки $(-3;\ 0)$ и $\left(0;\ \frac{3}{2}\right)$. Последние две точки мы получили следующим образом. Полагая $x = -3$, из уравнения $x - 2y + 3 = 0$ нашли, что $y = 0$; полагая $x = 0$, нашли, что $y = \frac{3}{2}$.

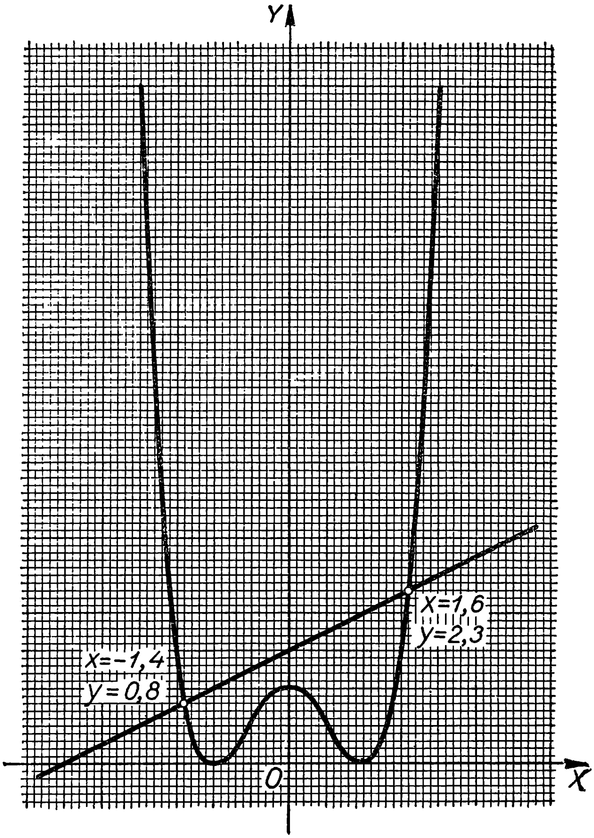


Рис. 106.

Полученные две линии: кривая и прямая — пересекаются в двух точках (— 1,4; 0,8) и (1,6; 2,3).

Следовательно, данная система имеет два решения:

$$1) \begin{cases} x \approx -1{,}4, \\ y \approx \quad 0{,}8; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x \approx 1{,}6, \\ y \approx 2{,}3. \end{cases}$$

§ 5. ОТЫСКАНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЛИНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров нахождения точек пересечения двух линий, заданных своими уравнениями.

Найти точки пересечения двух линий, заданных своими уравнениями, — это значит найти координаты этих точек.

Так как точка пересечения двух линий является общей точкой этих линий, то ее координаты должны удовлетворять обоим уравнениям этих линий одновременно.

Следовательно, чтобы найти точки пересечения двух линий, заданных своими уравнениями, достаточно решить систему, составленную из этих уравнений.

Поясним сказанное на простом примере.

Пусть требуется найти точку пересечения двух прямых:

$$x+2y=7 \text{ и } x-y=1.$$

Решив систему

$$\begin{cases} x+2y=7, \\ x-y=1, \end{cases}$$

получим:

$$\begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

Следовательно, данные прямые пересекаются в точке (3; 2).

Прямая и парабола

Пример 1. Найти точки пересечения прямой $x = 2y - 2 = 0$ и параболы $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Для решения этой задачи достаточно решить систему:

$$\begin{cases} x-2y-2=0, \\ y=\frac{1}{2}x^2-2x+1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2y=x-2, \\ 2y=x^2-4x+2. \end{cases}$$

Приравнивая друг другу два выражения, обозначающие одну и ту же величину $2y$, получим:

$$x^2-4x+2=x-2, \quad \text{или} \quad x^2-5x+4=0.$$

Отсюда

$$x_1=4, \text{ а } x_2=1.$$

Подставляя в уравнение $2y=x-2$ вместо буквы x число 4, найдем первое решение данной системы:

$$\begin{cases} x_1=4, \\ y_1=1. \end{cases}$$

Подставляя $x=1$, найдем второе решение системы:

$$\begin{cases} x_2=1, \\ y_2=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно, данная парабола и данная прямая пересекаются в двух точках: (4; 1) и $\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$. Геометрическая иллюстрация полученного результата дана на рисунке 107.

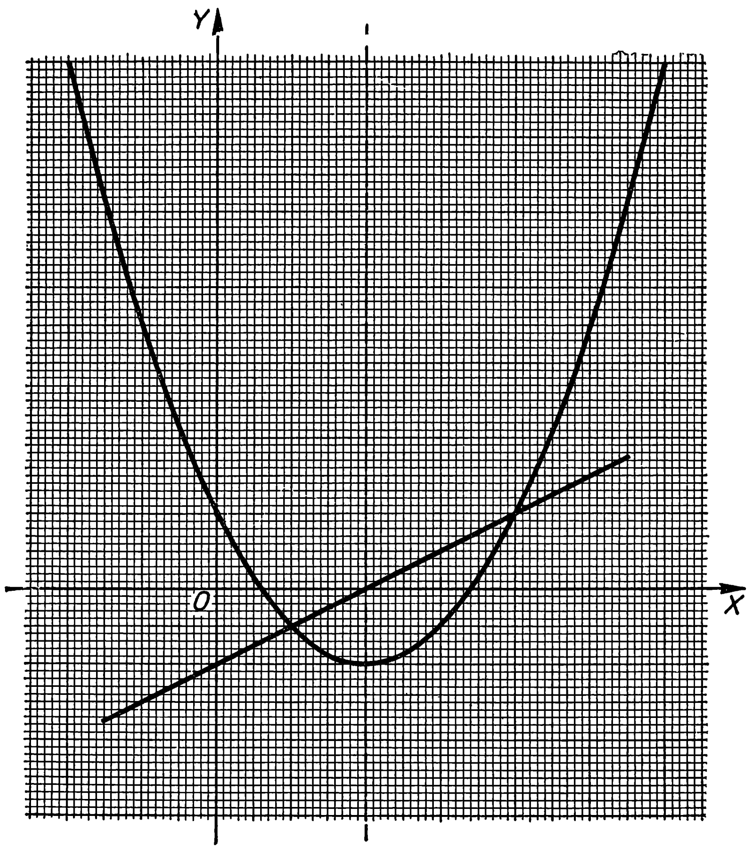


Рис. 107.

Пример 2. Найти точки пересечения прямой $2x-y-7=0$ и параболы $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

Для решения этой задачи достаточно решить систему:

$$\begin{cases} 2x-y-7=0, \\ y=\frac{1}{2}x^2-2x+1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x-7, \\ y=\frac{1}{2}x^2-2x+1. \end{cases}$$

Приравнивая друг другу два выражения, обозначающие одну и ту же величину y, получим.

$$\frac{1}{2}x^2-2x+1=2x-7, \text{ или } x^2-8x+16=0.$$

Последнее уравнение имеет один двукратный корень, равный 4. Зная, что $x=4$, найдем из уравнения $y=2x-7$, что $y=1$. Таким образом, данная система имеет два совпадающих решения:

$$1)\begin{cases} x=4, \\ y=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$$

Следовательно, в данном случае обе точки пересечения прямой и параболы сливаются в одну, т. е. прямая касается параболы в точке (4; 1) (см. рис. 108).

Прямая и гипербола

Пример 1. Найти точки пересечения прямой $4x+3y+8=0$ и гиперболы $xy=1$.

Решив систему $\begin{cases} 4x+3y+8=0, \\ xy=1, \end{cases}$

получим два решения:

$$1)\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=-2; \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x=-\frac{3}{2}, \\ y=-\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, данная прямая и гипербола пересекаются в двух точках:

$$\left(-\frac{1}{2};\ -2\right) \text{ и } \left(-\frac{3}{2};\ -\frac{2}{3}\right).$$

Иллюстрация дана на рисунке 109.

Пример 2. Найти точки пересечения прямой $x+y-2=0$ и гиперболы $xy=1$.

Решив систему

$$\begin{cases} x+y-2=0, \\ xy=1, \end{cases}$$

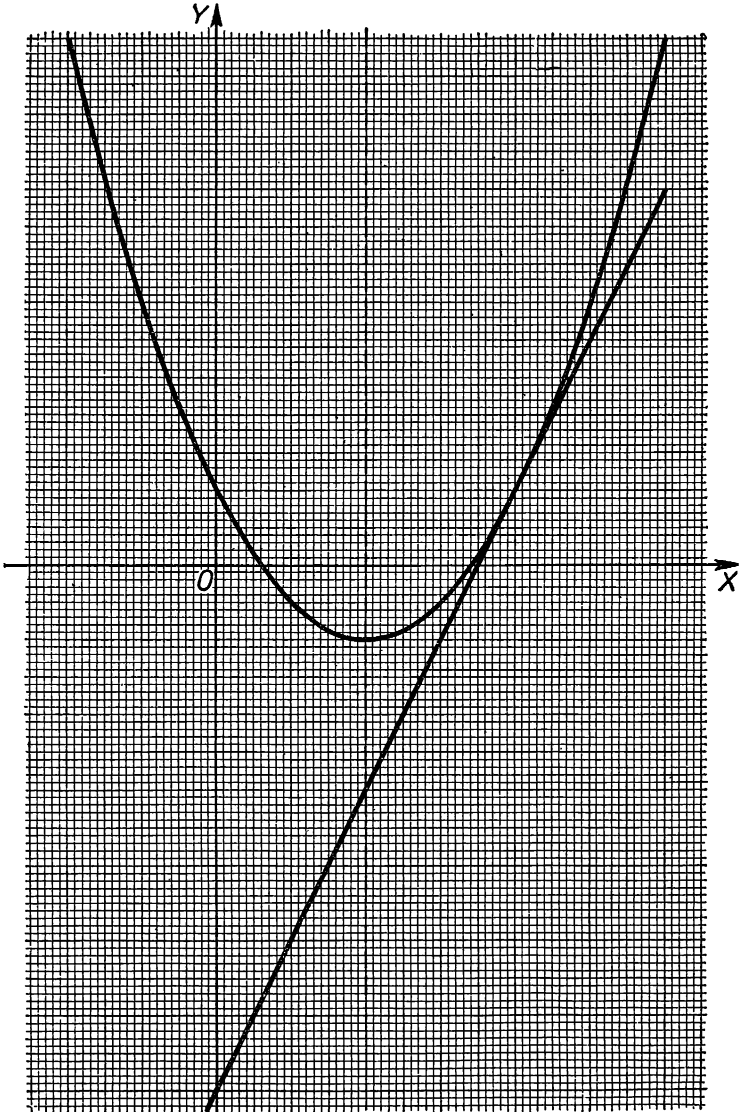


Рис. 108.

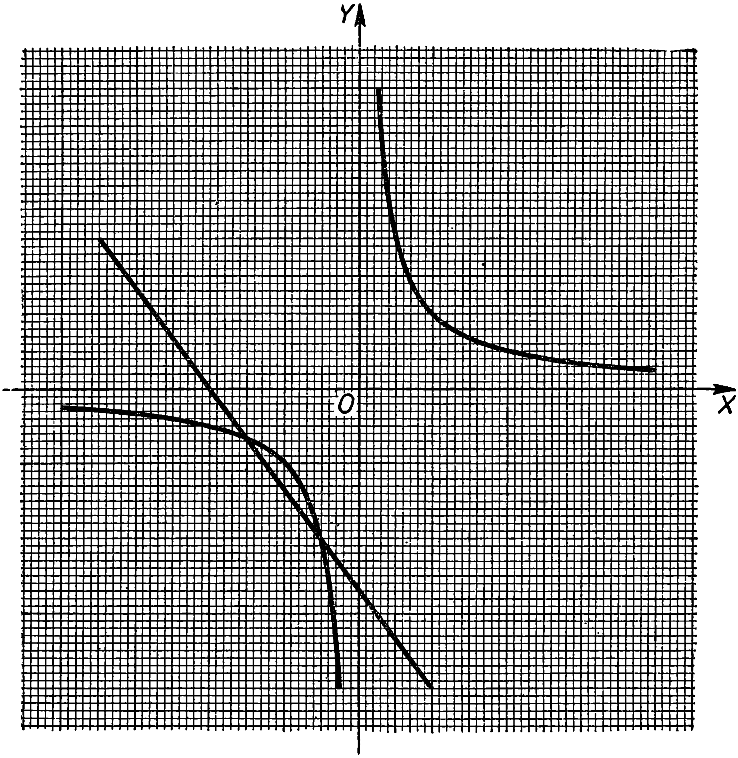


Рис. 109.

найдем два совпадающих решения:

$$1) \begin{cases} x=1, \\ y=1 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Следовательно, обе точки пересечения сливаются в одну, т. е. прямая касается гиперболы в точке (1; 1) (см. рис. 110).

Пересечение двух парабол

Пример 1. Найти точки пересечения параболы

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x+1 \text{ с параболой } y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1.$$

Решив соответствующую систему, найдем две точки пересечения:

$$(2+\sqrt{2};\ 0) \text{ и } (2-\sqrt{2};\ 0).$$

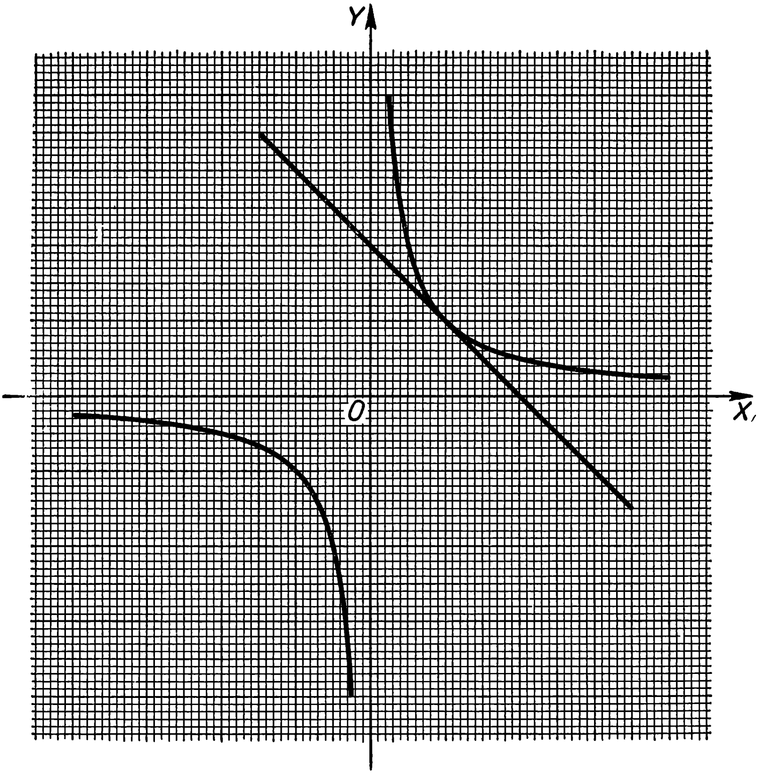


Рис. 110.

Геометрическую иллюстрацию рекомендуется учащемуся привести самостоятельно.

Пример 2. Найти точки пересечения параболы

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x+1 \text{ с параболой } y=-4x^2-8x-3.$$

Решив систему

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2-2x+1, \\ y=-4x^2-8x-3, \end{cases}$$

обнаружим, что она действительных решений не имеет. Следовательно, данные параболы не пересекаются.

Рекомендуется учащемуся построить обе параболы и наглядно убедиться в том, что они действительно не пересекаются.

Итак, для отыскания точек пересечения двух линий, заданных уравнениями, достаточно решить систему, составленную из этих уравнений. Если же эту систему решить алгебраически трудно, то тогда точки пересечения надо находить графическим способом.

§ 6. СИСТЕМЫ ТРЕХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

Все системы, разобранные в предыдущих параграфах, состояли из двух уравнений с двумя неизвестными.

Теперь рассмотрим несколько систем трех уравнений с тремя неизвестными степени выше первой, решаемых искусственно.

1. Решить систему:

$$\begin{cases} x(y+z)=7, \\ y(z+x)=12, \\ z(x+y)=15. \end{cases}$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{cases} xy+xz=7, \\ yz+xy=12, \\ xz+yz=15. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части всех трех уравнений, получим:

$$2xy+2xz+2yz=34,$$

или

$$xy+xz+yz=17.$$

Сопоставляя по очереди это уравнение с каждым из уравнений системы, получим:

$$\begin{cases} yz=10, \\ xz=5, \\ xy=2. \end{cases} \qquad (A)$$

Перемножив левые и правые части уравнений последней системы, получим:

$$x^2y^2z^2=100,$$

или

$$1)\ xyz=10 \text{ и } 2)\ xyz=-10.$$

Сопоставляя уравнение $xyz=10$ с каждым из уравнений системы (A), получим, что

$$x=1;\ y=2;\ z=5.$$

Сопоставляя уравнение $xyz = -10$ с каждым уравнением системы (А), получим:

$$x = -1; \; y = -2 \text{ и } z = -5.$$

Итак, данная система имеет два решения:

$$1) \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \\ z = 5, \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x = -1, \\ y = -2, \\ z = -5, \end{cases}$$

которые можно записать кратко так:

$$1) \; (1; \; 2; \; 5) \quad \text{и} \quad 2) \; (-1; \; -2; \; -5).$$

Проверкой легко убедиться, что эти тройки чисел удовлетворяют каждому уравнению системы.

2) Решить систему:

$$\begin{cases} x^2 + xy + xz + yz = 4, \\ y^2 + xy + xz + yz = -20, \\ z^2 + xy + xz + yz = -5. \end{cases}$$

Разложив левые части уравнений на множители, получим:

$$\begin{cases} (x+y)(x+z) = 4, \\ (x+y)(x+z) = -20, \\ (x+z)(y+z) = -5. \end{cases} \qquad \text{(A)}$$

Перемножив левые и правые части уравнений системы, получим:

$$(x+y)^2 (x+z)^2 (y+z)^2 = 20^2,$$

или

$$1) \; (x+y)(x+z)(y+z) = 20, \qquad \text{(I)}$$

$$2) \; (x+y)(x+z)(y+z) = -20. \qquad \text{(II)}$$

Сопоставляя равенство (1) с каждым из уравнений системы (А), получим систему:

$$\begin{cases} y+z = 5, \\ x+z = -1, \\ x+y = -4. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$x = -5; \; y = 1; \; z = 4.$$

Сопоставляя равенство (II) с каждым уравнением системы (А), получим систему:

$$\begin{cases} y+z = -5, \\ x+z = 1, \\ x+y = 4. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$x=5;\quad y=-1;\quad z=-4.$$

Итак, данная система имеет два решения:

$$1)\begin{cases} x=-5, \\ y=1, \\ z=4. \end{cases}\qquad 2)\begin{cases} x=5, \\ y=-1, \\ z=-4, \end{cases}$$

или в краткой записи:

$$1)\ (-5;\ 1;\ 4)\ \text{и}\ 2)\ (5;\ -1;\ -4).$$

Решим еще одну задачу, представляющую некоторый особый интерес.

Задача. На участке реки от A до B течение так слабо, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение уже достаточно сильное. Лодка покрывает расстояние вниз по течению от A до C за 6 час., от C до A, вверх по течению, за 7 час. Если бы на участке от A до B течение было таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 часа. Сколько времени в этом случае понадобилось бы на то, чтобы подняться вверх от C до A?

Решение. Примем расстояние AB равным x *км*, а расстояние AC y *км*. Примем собственную скорость лодки равной v *км* в час, а скорость течения на участке AC равной h *км* в час.

Из условий задачи вытекает следующая система трех уравнений с четырьмя неизвестными x, y, v и h:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{v}+\dfrac{y}{v+h}=6, \\ \dfrac{y}{v-h}+\dfrac{x}{v}=7, \\ \dfrac{x}{v+h}+\dfrac{y}{v+h}=5{,}5. \end{cases}\qquad (A)$$

В задаче требуется найти значение дроби $\dfrac{x+y}{v-h}$.

Разделив числитель и знаменатель этой дроби на v, придадим ей следующий вид:

$$\frac{\dfrac{x}{v}+\dfrac{y}{v}}{1-\dfrac{h}{v}}.$$

Отсюда видно, что для решения задачи нам нет необходимости знать значения неизвестных x, y, v и h. Нам достаточно знать лишь значения трех отношений:

$$\frac{x}{v},\ \frac{y}{v}\ \text{и}\ \frac{h}{v}.$$

Для нахождения этих трех отношений мы преобразуем систему (A) к следующему виду:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{v}+\dfrac{\frac{y}{v}}{1+\frac{h}{v}}=6, \\ \dfrac{\frac{y}{v}}{1-\frac{h}{v}}+\dfrac{x}{v}=7, \\ \dfrac{\frac{x}{v}}{1+\frac{h}{v}}+\dfrac{\frac{y}{v}}{1+\frac{h}{v}}=5{,}5. \end{cases}$$

Эту систему мы получили из системы (A) путем деления числителей и знаменателей соответствующих дробей на v.

Для краткости обозначим дроби $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{v}$ и $\frac{h}{v}$ соответственно буквами a, b и c.

После этого система (A) превратится в следующую систему трех уравнений с тремя неизвестными a, b и c:

$$\begin{cases} a+\dfrac{b}{1+c}=6, \\ \dfrac{b}{1-c}+a=7, \\ \dfrac{a}{1+c}+\dfrac{b}{1+c}=5{,}5. \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

Из системы (B) получим:

$$\begin{cases} a+ac+b=6+6c, \\ b+a-ac=7-7c, \\ a+b=5{,}5+5{,}5c. \end{cases}$$

Складывая почленно первые два уравнения, получим:

$$2a+2b=13-c, \quad \text{или} \quad a+b=6{,}5-0{,}5c.$$

Сопоставляя это уравнение с третьим уравнением системы, найдем, что

$$5{,}5+5{,}5c=6{,}5-0{,}5c,$$

или

$$c=\frac{1}{6}.$$

Из уравнения $a+b=6{,}5-0{,}5c$, принимая, что $c=\frac{1}{6}$, найдем, что

$$a+b=\frac{77}{12}.$$

Чтобы получить ответ задачи, надо найти значение дроби $\dfrac{\frac{x}{v}+\frac{y}{v}}{1-\frac{h}{v}}$, т. е. дроби $\frac{a+b}{1-c}$.

Мы знаем, что

$$a+b=\frac{77}{12} \text{ и } c=\frac{1}{6}.$$

Значит, ответом задачи будет

$$\frac{\frac{77}{12}}{1-\frac{1}{6}},$$

т. е. 7,7.

Итак, лодке понадобилось бы 7 час. 42 мин., чтобы подняться вверх от C до A при условиях, указанных в задаче.

УПРАЖНЕНИЯ

208. Решить системы аналитически:

1) $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x^2-xy+2y^2+3x-3y=10; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+y=19, \\ xy=88; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y)(x-3)=10, \\ (x+y)(y-4)=20; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=12, \\ x^2-y^2+x-y=108; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-xy+2y^2=22, \\ 2x^2-8xy+y^2=11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2+xy=22, \\ y^2+xy=99; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{26}{5}, \\ x^2+y^2=104. \end{cases}$

209. Решить системы графически:

1) $\begin{cases} y=x^4-2x^2+1, \\ x^2+y^2=9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^4, \\ x+y=1. \end{cases}$

210. Найти аналитически точки пересечения линий $y=x^2$ и $x=y^2$, а затем построить и сами эти линии.

211. Решить аналитически систему:

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}=\dfrac{20}{x+y}, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$$

212. Доказать графически, что система

$$\begin{cases} x^4-y+2=0, \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

не имеет ни одного действительного решения.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ГЛАВА XXI

НЕРАВЕНСТВА

§ 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Совокупность двух алгебраических выражений, соединенных между собой знаком $>$ (знак «больше») или знаком $<$ (знак «меньше»), называют неравенством.

Примеры неравенств:

$$1>-10;\ -1<0;\ (a-b)^2+1>0;$$

$$\sqrt{5\cdot 7}<\frac{5+7}{2}.$$

Два неравенства $A>B$ и $C>D$ называются неравенствами одинакового смысла. Таковы же и неравенства

$$x<y;\ z<u.$$

Два неравенства $A>B$ и $C<D$ называются неравенствами противоположного смысла.

Иногда приходится пользоваться знаком $\geqslant$ (читается: «больше или равно») или знаком $\leqslant$ (читается: «меньше или равно»). Например,

$a^2\geqslant 0$ (равенство имеет место лишь при $a=0$).

$(x-y)^2\geqslant 0$ (равенство имеет место лишь при $x=y$).

Если $a_1>0$ и $a_2>0$, то $\sqrt{a_1a_2}\leqslant\frac{a_1+a_2}{2}$ (равенство имеет место лишь при $a_1=a_2$).

Определение. ***Действительное число А называется большим действительного числа В, если разность А — В положительна.***

Если же разность А — В отрицательна, то А меньше В.

Теорема 1. ***Если обе части неравенства умножить или разделить на положительное число, то получится неравенство того же смысла.***

Пусть $A > B$ и $m > 0$. Тогда

$$Am - Bm = (A - B)m.$$

Но по условиям теоремы $A - B > 0$ и $m > 0$. Следовательно, $Am - Bm > 0$. Из последнего неравенства по определению следует, что $Am > Bm$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. ***Если обе части неравенства умножить или разделить на отрицательное число, то получится неравенство противоположного смысла.***

Пусть $A > B$ и $m < 0$. Тогда

$$Am - Bm = (A - B)m < 0.$$

Следовательно,

$$Am < Bm.$$

Примем к сведению следующие положения, не останавливаясь на их доказательствах:

1. Если $A > B$, то $B < A$.
2. Если $A > B$ и $B > C$, то $A > C$ (транзитивность неравенств).
3. Если $A > B$ и Q — произвольное число, то

$$A + Q > B + Q.$$

4. Если $A > B$ и $C > D$, то

$$A + C > B + D.$$

5. Если $A > B$ и $C < D$, то

$$A - C > B - D.$$

6. Если $A > B$ и $C > D$, то неизвестно, что больше $A - C$ или $B - D$. Возможен и тот и другой случай.
7. Если $A > B$ и $C > D$ и при этом числа A и D положительные, то

$$AC > BD.$$

8. Если $A > B$ и если A и B — положительные числа, то

$$A^n > B^n \text{ и } \sqrt[n]{A} > \sqrt[n]{B},$$

где n — натуральное число и где $\sqrt[n]{A}$ и $\sqrt[n]{B}$ — арифметические значения корней.

9. Неравенство

$$xy > 0$$

справедливо лишь тогда, когда x и y либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны.

То же следует сказать и относительно неравенства

$$\frac{x}{y} > 0.$$

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ

1. Доказать неравенство

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2},$$

где $a_1 \geqslant 0$ и $a_2 \geqslant 0$.

Чтобы доказать, что $\frac{a_1+a_2}{2}$ больше или равно $\sqrt{a_1a_2}$, достаточно убедиться в том, что разность между $\frac{a_1+a_2}{2}$ и $\sqrt{a_1a_2}$ больше или равна нулю.

Очевидно, что

$$\frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1a_2} = \frac{a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}.$$

Но последнее выражение отрицательным быть не может. Следовательно,

$$\frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{a_1a_2} \geqslant 0, \text{ или } \frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2},$$

что и требовалось доказать. (Равенство имеет место лишь при $a_1=a_2$.)

Число $\frac{a_1+a_2}{2}$ является с р е д н и м а р и ф м е т и ч е с к и м чисел a_1 и a_2, а число $\sqrt{a_1a_2}$ — их с р е д н и м г е о м е т р и ч е с к и м.

Из доказанного неравенства следует, что ***среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического.***

2. Доказать неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2,$$

где $a>0$ и $b>0$.

Составим разность между левой и правой частями этого неравенства и убедимся в том, что она неотрицательна.

Очевидно, что $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{2ab}=\frac{(a-b)^2}{2ab}$.

Последнее выражение отрицательным быть не может. Следовательно,

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-2 \geqslant 0, \text{ или } \frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2,$$

а это и требовалось доказать. (Равенство имеет место лишь при $a=b$.)

Примечание. Неравенства

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2} \text{ и } \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1} \geqslant 2,$$

где a_1 и a_2 — положительные числа, полезно запомнить. С помощью этих неравенств доказываются многие другие, более сложные неравенства. Рассмотренные ниже в п. 3 и п. 4 неравенства подтверждают это.

3. Доказать, что если

$$a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,\ a_n>0$$

и

$$a_1a_2\ldots a_n=1,$$

то

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n.$$

Доказательство.

Пользуясь неравенством

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1a_2},$$

имеем:

$$\frac{1+a_1}{2} \geqslant \sqrt{a_1},\ \frac{1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_2},\ \ldots,\ \frac{1+a_n}{2} \geqslant \sqrt{a_n}.$$

Перемножая левые и правые части этих неравенств, получим:

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{2^n} \geqslant \sqrt{a_1a_2\ldots a_n}.$$

Но по условию $a_1a_2\ldots a_n=1$. Поэтому

$$\frac{(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)}{2^n} \geqslant 1.$$

Отсюда

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n,$$

что и требовалось доказать.

4. Доказать, что если $a_1>0,\ a_2>0,\ \ldots,\ a_n>0$, то

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}. \qquad (A)$$

Чтобы легче понять доказательство этого неравенства, изложенное ниже, мы рассмотрим сначала частные случаи этого неравенства при $n=2$ и $n=3$, т. е. докажем сначала следующие два неравенства:

1) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2} \geqslant \frac{4}{a_1+a_2}$ и

2) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3} \geqslant \frac{9}{a_1+a_2+a_3}$.

Легко видеть, что

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)(a_1+a_2)=1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}+1=2+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)\geqslant 4.$$

$\left(\text{Мы здесь воспользовались тем, что } \frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\geqslant 2\right).$
Отсюда

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\geqslant\frac{4}{a_1+a_2}.$$

Далее,

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)(a_1+a_2+a_3)=3+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+$$
$$+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)+\left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)\geqslant 3+2+2+2=9.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\geqslant\frac{9}{a_1+a_2+a_3}.$$

Теперь перейдем к доказательству неравенства (А).
Легко видеть, что

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\ldots+a_n)=$$
$$=n+\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)+\left(\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}\right)+\ldots+\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}\right).$$

Каждая из сумм $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}$, $\frac{a_1}{a_3}+\frac{a_3}{a_1}$, ..., $\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n-1}}$ больше или равна двум, а таких сумм имеется $\frac{n(n-1)}{2}$.

Поэтому

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\ldots+a_n)\geqslant n+2\cdot\frac{n(n-1)}{2},$$

или

$$\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)(a_1+a_2+\ldots+a_n)\geqslant n^2.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n},$$

что и требовалось доказать.

5. Доказать, что неравенство $x^2-7x+13>0$ справедливо при всяком действительном значении x.

После выделения полного квадрата неравенство примет вид:

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0.$$

Но это неравенство справедливо при всяком действительном значении x. Следовательно, и первоначальное неравенство обладает этим свойством.

6. Доказать, что неравенство $x^2-2xy+2y^2-2x+3>0$ справедливо при любых действительных значениях x и y.

Преобразуем левую часть неравенства следующим образом:

$$x^2-2(y+1)x+2y^2+3=x^2-2(y+1)x+(y+1)^2-$$
$$-(y+1)^2+2y^2+3=(x-y-1)^2+y^2-2y+2=$$
$$=(x-y-1)^2+(y-1)^2+1.$$

Теперь неравенство имеет вид: $(x-y-1)^2+(y-1)^2+1>0$. Левая часть этого неравенства, а следовательно, и левая часть первоначального неравенства положительна при любых действительных значениях x и y.

7. Доказать неравенство

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz.$$

Легко видеть, что

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=$$
$$=\frac{1}{2}(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz)=$$
$$=\frac{1}{2}[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2]\geqslant 0.$$

Оказалось, что разность между $x^2+y^2+z^2$ и $xy+xz+yz$ больше или равна нулю. А это и значит, что $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz$. (Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x=y=z$.)

Используем доказанное неравенство для решения следующей задачи.

Задача. Какой наибольшей полной поверхности можно сделать ящик, если сумма длин его ребер равна l?

Если длины трех ребер, выходящих из одной вершины, обозначить буквами x, y, z, то полная поверхность S ящика выразится формулой $S=2(xy+yz+zx)$.

Задача сводится к нахождению наибольшего значения S при условии, что $x+y+z=\frac{l}{4}$.

Здесь должна возникнуть мысль искать неравенство, связывающее выражения $xy+yz+zx$ и $x+y+z$.

Такое неравенство нам неизвестно. Поэтому начнем с неравенства, близкого к требуемому, но нам известного, а именно с неравенства $xy+yz+zx\leqslant x^2+y^2+z^2$.

Из этого неравенства следует, что

$$xy+yz+zx\leqslant(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx),$$

или

$$xy+yz+zx\leqslant\frac{1}{3}(x+y+z)^2.$$

(Равенство имеет место при $x=y=z$.)

Теперь имеем:

$$S=2(xy+yz+zx)\leqslant\frac{2}{3}(x+y+z)^2=\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{l}{4}\right)^2.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение S равно $\frac{2}{3}\left(\frac{l}{4}\right)^2$ и получается оно, когда $x=y=z$, т. е. когда ящик имеет форму куба с ребром, равным $\frac{l}{12}$.

§ 3. НЕРАВЕНСТВА С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Примеры неравенств с одним неизвестным:

$$5x+3>2x+9;\ \frac{x-2}{5-x}>0;\ x^2-8x+15>0;$$

$$\sqrt{2x+75}>2,\ x^2<1 \text{ и т. д.}$$

Решить неравенство с одним неизвестным — это значит найти все такие значения неизвестного, при которых это неравенство справедливо (или убедиться, что ни одного такого значения нет).

Решением неравенства называется всякое значение неизвестного, при котором неравенство справедливо.

Существуют неравенства, не имеющие ни одного решения. Например, таковы неравенства:

$$2x>1+x^2;\ \sqrt{x}>\frac{1+x}{2};\ x^2<0;\ x^2-x+1<0;\ \sin x>1.$$

Два неравенства называются равносильными, если любое решение одного из них является решением другого, и наоборот.

Аналогично двум основным теоремам о равносильности уравнений имеют место и теоремы о равносильности неравенств.

Теорема 1. ***Если к обеим частям неравенства, содержащего неизвестное, прибавить одно и то же число или одно и то же выражение, то получим новое неравенство, равносильное данному.*** (Прибавляемое выражение должно быть определенным при тех же значениях неизвестного, при которых будут определенными одновременно левая и правая части данного неравенства.)

Теорема 2. ***Если обе части неравенства умножить или разделить на положительное число, то получим неравенство того же смысла, равносильное данному.***

Если же обе части неравенства умножить или разделить на отрицательное число, то получим неравенство противоположного смысла, равносильное данному.

Убедиться в справедливости этих свойств неравенств можно таким же путем, каким мы убеждались в верности теорем о равносильности уравнений.

Следствие из теоремы 1. ***Члены неравенства можно переносить с противоположным знаком из одной части неравенства в другую.***

Следствие из теоремы 2. ***Неравенство с дробными коэффициентами можно преобразовывать в неравенство с целыми коэффициентами.***

Неравенство можно сокращать на общий множитель всех его членов, не содержащий неизвестного. Если этот общий множитель положительный, то смысл неравенства сохранится, а если отрицательный, то изменится на противоположный.

Примечание. Нельзя умножать или делить члены неравенства на выражение, если неизвестно, каким числом, положительным или отрицательным, оно является.

§ 4. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Всякое неравенство первой степени с одним неизвестным можно привести к виду

$$Ax+B>0.$$

1. Если $A>0$, то $x>-\frac{B}{A}$.

2. Если $A<0$, то $x<-\frac{B}{A}$.

3. Если $A=0$ и $B>0$, то неравенство справедливо при любом значении x.

4. Если $A=0$ и $B\leqslant 0$, то неравенство решения не имеет.

Пример. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{3}-\frac{x+2}{4}>\frac{x-2}{12}-\frac{x}{3}.$$

Умножив левую и правую части неравенства на 12, получим:

$$4x-4-3x-6>x-2-4x.$$

Перенесем члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а известные в правую:

$$4x-3x-x+4x>-2+4+6.$$

Отсюда

$$4x>8, \text{ или } x>2.$$

Все действия, выполненные нами (умножение на 12, перенесение членов из одной части неравенства в другую с противоположным знаком), как мы видели, оставляют неравенства равносильными. Следовательно, данное неравенство справедливо при

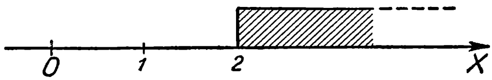


Рис. 111.

тех же значениях x, при которых справедливо неравенство $x > 2$. На числовой оси эти значения изображаются всеми точками, лежащими справа от точки $x = 2$ (рис. 111).

§ 5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Системой неравенств называется совокупность неравенств, в которых под одной и той же буквой, обозначающей неизвестное, подразумевается одна и та же величина.

Чтобы указать, что неравенства, например $2x - 3 > 0$ и $5 - 4x > 0$, рассматриваются как система неравенств, записывают так:

$$\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 5 - 4x > 0. \end{cases}$$

Решить систему неравенств с одним неизвестным — значит найти все те значения неизвестного, при которых оба неравенства системы становятся одновременно справедливыми, либо убедиться, что ни одного такого значения неизвестного не существует.

Всякое значение неизвестного, удовлетворяющее одновременно всем неравенствам системы, называется решением этой системы.

Примеры:

1. Решить систему:

$$\begin{cases} x - 1 > 0, \\ 2 - x > 0. \end{cases}$$

Решив первое неравенство, получим:

$$x > 1.$$

Решив второе неравенство, получим:

$$x < 2.$$

Следовательно, данная система удовлетворяется только при тех значениях x, которые заключены между 1 и 2 (рис. 112), т. е. $1 < x < 2$.

2. Решить систему:

$$\begin{cases} x-1<0, \\ x-2>0. \end{cases}$$

Решив первое неравенство, получим:

$$x<1.$$

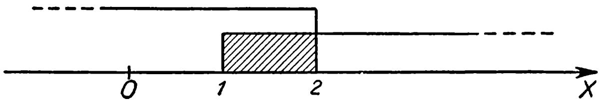


Рис. 112.

Решив второе, получим:

$$x>2.$$

Следовательно, система не имеет ни одного решения, так как нет такого числа, которое было бы одновременно больше 2 и меньше 1 (рис. 113).

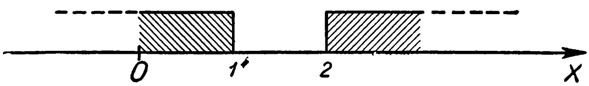


Рис. 113.

Решить систему:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0, \\ x-7>0. \end{cases}$$

Эта система приводится к следующей:

$$\begin{cases} x>1, \\ x>2, \\ x>7. \end{cases}$$

Следовательно, данная система удовлетворяется лишь при всех значениях x, больших 7.

4. Решить систему:

$$\begin{cases} x-1<0, \\ x-2<0, \\ x-7<0. \end{cases}$$

Эта система приводится к следующей:

$$\begin{cases} x<1, \\ x<2, \\ x<7. \end{cases}$$

Следовательно, данная система удовлетворяется лишь при всех значениях x, меньших 1.

5. Решить систему:

$$\begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0, \\ 7-x>0. \end{cases}$$

Эта система приводится к виду:

$$\begin{cases} x>1, \\ x>2, \\ x<7. \end{cases}$$

Следовательно, данная система удовлетворяется лишь при всех значениях x, заключенных между числами 2 и 7, т. е. $2<x<7$.

Иногда решение одного неравенства сводится к решению систем неравенств. Например, решениями неравенства $\frac{x-1}{2-x}>0$ будут только решения следующих двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x-1>0, \\ 2-x>0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-1<0, \\ 2-x<0. \end{cases}$$

Первая система удовлетворяется при $1<x<2$, а вторая — не имеет ни одного решения. Следовательно, решениями данного неравенства будут все числа, заключенные между 1 и 2.

Решениями неравенства

$$(x-1)(x-3)>0$$

будут только решения следующих двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x-1>0, \\ x-3>0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-1<0, \\ x-3<0. \end{cases}$$

Первая система удовлетворяется при $x>3$, а вторая — при $x<1$. Следовательно, решениями данного неравенства будут как числа бóльшие трех, так и числа мéньшие единицы.

Иногда для получения всех решений одного данного неравенства надо взять решения каждого из двух вспомогательных неравенств. Причем эти вспомогательные неравенства надо решать каждое в отдельности, а не как систему. Например, неравенству $|x-1|>4$ удовлетворяют как решения неравенства $x-1>4$, так и решения неравенства $x-1<-4$.

Таким образом, данному неравенству удовлетворяют как числа бóльшие 5, так и числа меньшие -3.

Решим еще два примера.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{2-x}>1.$$

Перенеся единицу в левую часть неравенства, получим:

$$\frac{x-1}{2-x}-1>0, \text{ или } \frac{2x-3}{2-x}>0.$$

Решениями последнего неравенства будут только решения каждой из следующих двух систем:

$$1) \begin{cases} 2x-3>0, \\ 2-x>0 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} 2x-3<0, \\ 2-x<0. \end{cases}$$

Первая система удовлетворяется при всех значениях x, заключенных между $\frac{3}{2}$ и 2. Вторая не имеет ни одного решения. Следовательно, решениями данного неравенства будут только все значения x, удовлетворяющие неравенствам

$$\frac{3}{2}<x<2.$$

Неравенство $\frac{x-1}{2-x}>1$ можно решить и иначе.

Полагая $2-x>0$, т. е. $x<2$, и умножив обе части неравенства на положительное число $2-x$, получим:

$$x-1>2-x, \text{ или } x<\frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{2}<x<2.$$

Полагая $2-x<0$, т. е. $x>2$, получим:

$$x-1<2-x, \text{ или } x<\frac{3}{2}.$$

Отсюда следует, что значений x больших, чем 2, которые удовлетворяли бы данному неравенству, нет.

Таким образом, все решения данного неравенства определяются неравенствами:

$$\frac{3}{2}<x<2.$$

Пример 2. Решить неравенство

$$(x-3)(x-8)>0.$$

Решениями этого неравенства будут только решения следующих двух систем:

$$1) \begin{cases} x-3>0, \\ x-8>0; \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x-3<0, \\ x-8<0. \end{cases}$$

Следовательно, первоначальное неравенство будет удовлетворяться как при всех значениях x, больших 8, так и при всех значениях x, меньших 3.

§ 6. РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Всякое неравенство второй степени может быть приведено к виду:

$$Ax^2+Bx+C>0. \qquad (1)$$

В самом деле, если имеем неравенство вида $A_1x^2+B_1x+C_1<0$, то, умножив обе части этого неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, получим неравенство $-A_1x^2-B_1x-C_1>0$ вида (1). Поэтому неравенство (1) называется общим видом неравенства второй степени.

Решения неравенства $Ax^2+Bx+C>0$

1. Случай, когда $B^2-4AC>0$.
(Выражение B^2-4AC называется дискриминантом трехчлена Ax^2+Bx+C.)

В этом случае данное неравенство можно записать в следующем виде (см. стр. 271):

$$A(x-x_1)(x-x_2)>0, \qquad (2)$$

где x_1 и x_2 — действительные и различные корни трехчлена

$$Ax^2+Bx+C.$$

Будем считать, что буквой x_1 обозначен больший корень, а буквой x_2 — меньший.

Пусть $A>0$. Тогда в решение неравенства (2), а следовательно, и (1) войдут только решения следующих двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x-x_1>0, \\ x-x_2>0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-x_1<0, \\ x-x_2<0. \end{cases}$$

Отсюда легко заключить, что решением данного неравенства будет совокупность всех чисел, больших x_1, а также совокупность всех чисел, меньших x_2.

Пусть теперь $A<0$. Тогда дело сведется к решению следующих двух систем:

$$1)\ \begin{cases} x-x_1>0, \\ x-x_2<0; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x-x_1<0, \\ x-x_2>0. \end{cases}$$

Первая из этих двух систем не имеет ни одного решения. Вторая же система удовлетворяется при всех значениях x, заключенных между x_2 и x_1.

Следовательно, и данное неравенство 2-й степени будет удовлетворяться лишь значениями x, заключенными между корнями x_1 и x_2, т. е. $x_2<x<x_1$.

2. Случай, когда $B^2-4AC<0$.

Пользуясь выделением полного квадрата, запишем данное неравенство в виде:

$$A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2-4AC}{4A^2}\right]>0.$$

Пусть $A>0$. Тогда неравенство удовлетворяется при всяком значении x, так как $\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2\geqslant 0$; $4A^2>0$ и $B^2-4AC<0$.

Пусть $A<0$. Тогда неравенство не имеет ни одного решения.

3. Случай, когда $B^2-4AC=0$.

Опять запишем данное неравенство в виде:

$$A\left[\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2-4AC}{4A^2}\right]>0.$$

Пусть $A>0$. Тогда данное неравенство удовлетворяется при всяком значении x, кроме $x=-\frac{B}{2A}$.

Пусть $A<0$. Тогда данное неравенство не имеет ни одного решения.

Примечание.

Если $A>0$ и если неравенство $Ax^2+Bx+C\geqslant 0$ справедливо при всяком значении x, то дискриминант многочлена Ax^2+Bx+C, т. е. выражение B^2-4AC, не может оказаться положительным. Это следует из того, что при $A>0$ и $B^2-4AC>0$ неравенство

$$Ax^2+Bx+C\geqslant 0$$

удовлетворялось бы не любыми значениями x.

Выводы, относящиеся к решению неравенства

$$Ax^2+Bx+C>0 \qquad \text{(I)}$$

1. Если $B^2-4AC>0$ и $A>0$, то неравенство (I) будет удовлетворяться как значениями x, большими большего корня, так и значениями x, меньшими меньшего корня многочлена

$$Ax^2+Bx+C.$$

2. Если $B^2-4AC>0$ и $A<0$, то неравенство (I) будет удовлетворяться всеми значениями x, заключенными между корнями x_1 и x_2 многочлена Ax^2+Bx+C.

3. Если $B^2-4AC<0$ и $A>0$, то неравенство (I) будет удовлетворяться при любом действительном значении x.

4. Если $B^2-4AC<0$ и $A<0$, то неравенство (I) не будет удовлетворяться ни при каком значении x.

5. Если $B^2-4AC=0$ и $A>0$, то неравенство (I) будет удовлетворяться при всяком значении x, за исключением значения

$$x=-\frac{B}{2A}.$$

6. Если $B^2-4AC=0$ и $A<0$, то неравенство (I) не может удовлетворяться ни при каком значении x.

Примечание. Запоминать эти выводы нет смысла, так как пользоваться ими приходится очень редко. Лучше всего закрепить в своей памяти не эти 6 выводов, а тот способ, с помощью которого они получаются. Прежде всего надо закрепить в своей памяти то, что при $B^2-4AC>0$ надо прибегать к разложению многочлена $Ax^2+Bx+C>0$ на линейные множители, а в случае $B^2-4AC\leqslant 0$ выделять полный квадрат.

Геометрическая интерпретация* решений неравенства $Ax^2+Bx+C>0$

Мы знаем, что графиком функции $y=Ax^2+Bx+C$ является парабола с осью, параллельной оси Y_1Y. Ордината вершины этой параболы равна $\frac{4AC-B^2}{4A}$.

Парабола простирается неограниченно вверх, если $A>0$, и вниз, если $A<0$ (см. стр. 315).

1. Пусть $B^2-4AC>0$ и $A>0$, тогда $\frac{4AC-B^2}{4AC}<0$. В этом случае вершина параболы будет лежать в нижней полуплоскости

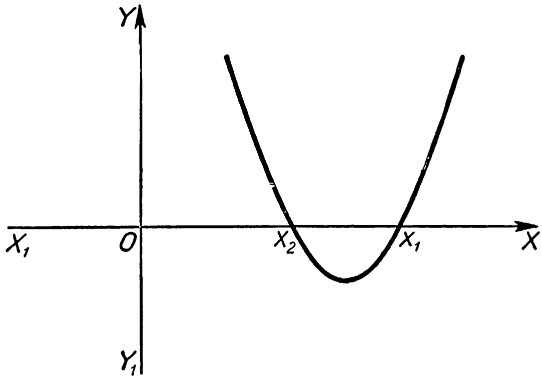


Рис. 114.

и сама парабола будет простираться вверх (рис. 114) (x_2 и x_1 — корни многочлена Ax^2+Bx+C; x_2 — меньший корень, а x_1 — больший).

Из рисунка 114 мы видим, что значения трехчлена Ax^2+ $+Bx+C$, т. е. ординаты точек параболы, положительны как при $x<x_2$, так и при $x>x_1$.

2. Пусть $B^2-4AC>0$ и $A<0$. В этом случае вершина параболы будет лежать в верхней полуплоскости и сама парабола будет простираться вниз (рис. 115).

---

* Интерпретация, т. е. истолкование.

Из рисунка 115 мы видим, что значения трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ положительны при $x_2 < x < x_1$.

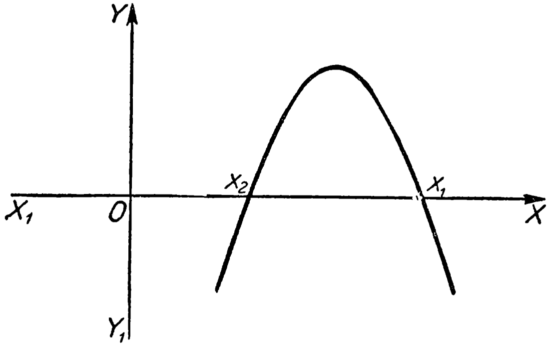


Рис. 115.

3. Пусть $B^2 - 4AC < 0$ и $A > 0$. В этом случае вершина параболы будет лежать в верхней полуплоскости и сама парабола будет простираться вверх (рис. 116).

На рисунке 116 мы видим, что значения трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ положительны при всех значениях x.

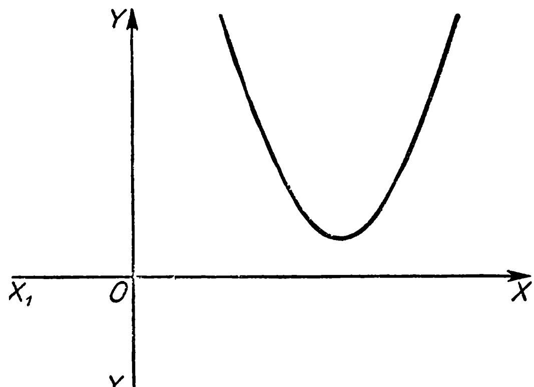


Рис. 116.

4. Пусть $B^2 - 4AC < 0$ и $A < 0$. В этом случае вершина параболы будет лежать в нижней полуплоскости и сама парабола будет простираться вниз (рис. 117).

На рисунке 117 мы видим, что значения трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ не могут быть положительными ни при каком значении x.

5. Пусть $B^2 - 4AC = 0$ и $A > 0$. В этом случае вершина параболы будет лежать на оси X_1X и парабола будет простираться вверх (рис. 118).

На рисунке 118 мы видим, что значения трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ будут положительными при всех значениях x, за исключением единственного значения $x = -\frac{B}{2A}$ $\left(-\frac{B}{2A}\right.$ есть абсцисса вершины параболы$\left.\right)$.

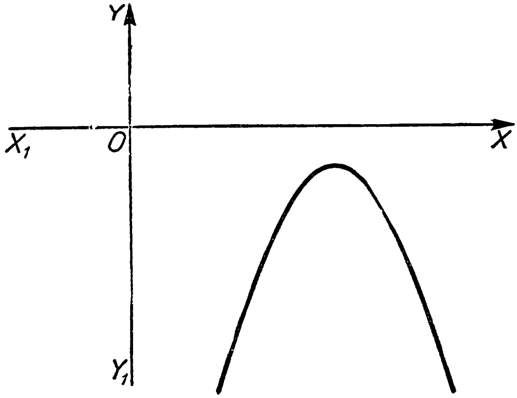


Рис. 117.

6. Пусть $B^2 - 4AC = 0$ и $A < 0$. В этом случае вершина параболы будет лежать на оси X_1X и парабола будет простираться вниз (рис. 119).

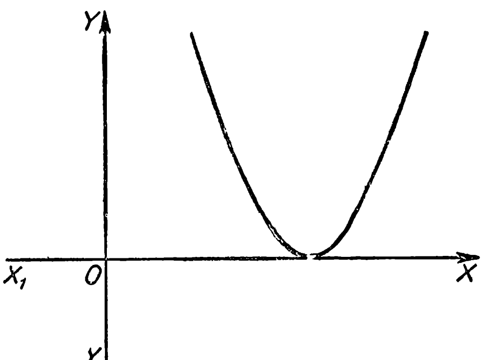


Рис. 118.

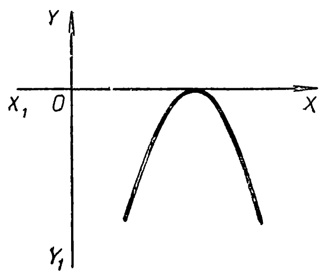


Рис. 119.

На рисунке 119 мы видим, что значения трехчлена $Ax^2 + Bx + C$ не могут быть положительными ни при каком значении x.

§ 7. ПРИМЕРЫ НА НЕРАВЕНСТВА ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

1. Решить неравенство

$$x^2-8x+15>0.$$

Здесь

$$B^2-4AC=8^2-4\cdot 1\cdot 15=4>0.$$

Поэтому решение данного неравенства сведется к решению неравенства

$$(x-3)(x-5)>0.$$

Отсюда

$$1)\ \begin{cases} x-3>0, \\ x-5>0, \end{cases} \text{ т. е. } x>5,\quad 2)\ \begin{cases} x-3<0, \\ x-5<0, \end{cases} \text{ т. е. } x<3.$$

Значит, данному неравенству будут удовлетворять как все значения x, меньшие трех, так и все значения, большие пяти, и никакие другие.

2. Решить неравенство

$$-x^2+8x-15>0.$$

Умножив обе части неравенства на -1, получим:

$$x^2-8x+15<0,$$

или

$$(x-3)(x-5)<0.$$

Отсюда

$$1)\ \begin{cases} x-3>0, \\ x-5<0, \end{cases} \text{ т. е. } 3<x<5,\quad 2)\ \begin{cases} x-3<0, \\ x-5>0. \end{cases}$$

Последняя, т. е. вторая, система неравенств решений не имеет.

Значит, неравенству $-x^2+8x-15>0$ удовлетворяют только значения x, заключенные между числами 3 и 5.

Замечания. а) Из неравенства $x^2<1$ следует, что $|x|<1$, т. е. что $-1<x<1$.

б) Из неравенства $x^2>1$ имеем, что $|x|>1$, т. е. что либо $x<-1$, либо же $x>1$.

3. Решить неравенство $(x-2)^2<1$.

Из данного неравенства получается, что $|x-2|<1$, т. е. что $-1<x-2<1$. Из неравенства $-1<x-2$ следует, что $x>1$, а из неравенства $x-2<1$ получается, что $x<3$.

Итак, данное неравенство удовлетворяется лишь значениями x, лежащими между числами 1 и 3, т. е. принадлежащими промежутку $(1;\ 3)$.

4. Решить неравенство

$$|x^2-2|<1.$$

Из данного неравенства следует, что

$$-1<x^2-2<1.$$

Сначала решим неравенство

$$-1<x^2-2.$$

Из этого неравенства следует, что

$$x^2>1 \text{ или что } |x|>1.$$

Теперь решим неравенство

$$x^2-2<1.$$

Из этого неравенства следует, что

$$x^2<3 \text{ или что } |x|<\sqrt{3}.$$

Итак, неравенству

$$|x^2-2|<1$$

удовлетворяют такие и только такие значения x, которые определяются следующими двумя неравенствами:

$$1<|x|<\sqrt{3}.$$

Последним же двум неравенствам удовлетворяют как все числа, заключенные между $-\sqrt{3}$ и -1, так и все числа, заключенные между 1 и $\sqrt{3}$ (см. рис. 120).

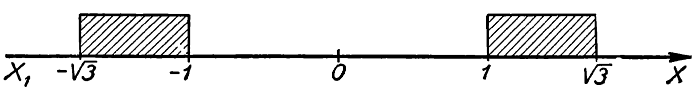


Рис. 120.

5. При каких значениях m неравенство

$$x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}(5m-7)>0 \tag{I}$$

справедливо для любого действительного значения x?

Решим эту задачу двумя способами.

Способ 1. Неравенство

$$Ax^2+Bx+C>0$$

справедливо при любом значении x тогда и только тогда, когда

$$B^2-4AC<0 \text{ и } A>0.$$

В неравенстве (I) $A=1>0$. Поэтому остается потребовать выполнения неравенства

$$B^2-4AC<0,$$

т. е. неравенства

$$(m+1)^2-4\cdot\frac{1}{2}(5m-7)<0,$$

которое после преобразования принимает вид

$$m^2-8m+15<0,$$

или

$$(m-3)(m-5)<0.$$

В решение последнего неравенства войдут только решения следующих двух систем:

$$1)\ \begin{cases} m-3>0, \\ m-5<0, \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} m-3<0, \\ m-5>0. \end{cases}$$

Вторая система не имеет ни одного решения, а первая удовлетворяется при всех значениях m, заключенных между 3 и 5.

Следовательно, первоначальное неравенство будет справедливым при любых значениях x лишь тогда, когда число m будет заключаться между 3 и 5, т. е. когда $3<m<5$.

Способ 2. График функции

$$y=x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}(5m-7)$$

есть парабола, бесконечно простирающаяся вверх, так как коэффициент при x^2 положительный.

Для того чтобы ордината y была положительной при всяком значении x, необходимо и достаточно, чтобы вершина этой параболы лежала в верхней полуплоскости, т. е. необходимо и достаточно, чтобы ордината вершины параболы была положительной.

Но ордината вершины параболы

$$y=Ax^2+Bx+C$$

равна

$$\frac{4AC-B^2}{4A}\ (\text{см. стр. } 315).$$

Поэтому имеем

$$\frac{4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}(5m-7)-(m+1)^2}{4}>0,$$

или

$$(m+1)^2-2(5m-7)<0,$$

или

$$m^2-8m+15<0.$$

Дальше ход рассуждений тот же, что и в первом способе.

6. Доказать неравенство Буняковского — Коши *:

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\times$$
$$\times(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ — любые действительные числа.

Доказательство.

Ясно, что

$$(x_1-ty_1)^2+(x_2-ty_2)^2+\ldots+(x_n-ty_n)^2\geqslant 0.$$

Отсюда

$$(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2)t^2-2(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)t+$$
$$+(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\geqslant 0$$

при всяком действительном значении t.

Следовательно, дискриминант левой части неравенства будет меньше или равен нулю, т. е.

$$(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2-(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\leqslant 0$$

(см. примечание на стр. 370).

Отсюда

$$(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2\leqslant(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2),$$

что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

213. Решить неравенства:

1) $x-\frac{x-1}{2}>\frac{x-2}{4}-\frac{x-3}{6}$; Отв. $x>-1{,}2$.

2) $(x+1)^2>(x+2)^2$. Отв. $x<-1{,}5$.

214. Решить системы неравенств:

1) $\begin{cases}2x-10>0,\\ 27-x>0.\end{cases}$ Отв. $5<x<27$.

2) $\begin{cases}2x-3>0,\\ 1-x>0.\end{cases}$ Отв. Система не имеет ни одного решения.

---

* См.: «Краткие исторические сведения».

215. Решить неравенства:

1) $\frac{x-1}{2-x}>0$; 2) $(x-1)(2-x)>0$; Отв. 1) $1<x<2$.

2) $1<x<2$.

3) $(x-1)(2-x)(x-3)^2>0$; 3) $1<x<2$.

4) $(x-1)(2-x)\left(x-\frac{3}{2}\right)^2>0$; 4) $1<x<2$, кроме $x=\frac{3}{2}$.

5) $(x-1)(x-2)>5(x-1)$. 5) $x<1$ и $x>7$.

Указание к 5). Перенести все в левую часть.

6) $|x-2|<1$. Отв. $1<x<3$.

216. Доказать неравенства:

1) $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$;

2) $\frac{1+a^2}{2a}\geqslant 1$ при $a>0$;

3) $\frac{(a+b)^2}{ab}\geqslant 4$ при $a>0$ и $b>0$;

4) Доказать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$, где n — натуральное число.

5) $(x+y)(y+z)(z+x)>8xyz$ при $x>0$, $y>0$, $z>0$;

6) $a^5+b^5-a^4b-ab^4\geqslant 0$ при $a>0$ и $b>0$.

Указание. Разложить левую часть на множители.

217. Решить неравенства:

1) $x^2-5x+4>0$; Отв. 1) $x<1$ и $x>4$.

2) $6x^2-5x+1>0$; 2) $x<\frac{1}{3}$ и $x>\frac{1}{2}$.

3) $x^2-4x+5>0$; 3) $-\infty<x<+\infty$, т. е. x может принимать любые значения.

4) $x^2-4x+4>0$. 4) x может принимать любые значения, кроме $x=2$.

218. При каких значениях m неравенство

$$(m-1)x^2-2\sqrt{6}x+m-2>0$$

будет выполняться при любых действительных значениях x?

Отв. При $m>4$.

219. Доказать неравенство

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<2.$$

220. Доказать неравенство

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc, \quad \text{где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0.$$

221. Доказать, что неравенство

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1{,}1>0$$

справедливо при всех действительных значениях x.

222. Дано, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1 \text{ и } b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1.$$

Доказать, что в таком случае

$$-1 \leqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqslant 1.$$

223. Решить неравенство

$$|2x-3|-|3x-7|>0.$$

224. Решить неравенство

$$\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|>1.$$

ГЛАВА XXII

ПРЕДЕЛЫ

§ 1. Задачи, приводящие к возникновению понятия предела

До сих пор мы встречались преимущественно с такими задачами, для решения которых достаточно было выполнить только несколько действий над числами. Например, чтобы определить цену смеси двух сортов кофе, достаточно было выполнить пять действий (два раза умножение, два раза сложение и один раз деление) (см. стр. 48).

Приведем еще один такой же пример. Известно, что свободное падение тела в безвоздушном пространстве происходит по закону

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

где g — ускорение силы тяжести $\left(g\approx 9{,}8\,\frac{м}{сек^2}\right)$;

t — время в секундах;

s — путь в метрах, пройденный за t секунд.

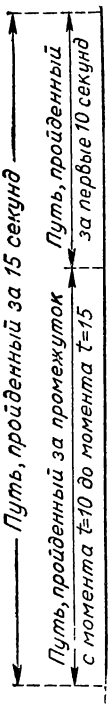


Рис. 121.

Поставим такую задачу: найти среднюю скорость свободного падения за промежуток времени, например, с момента $t=10$ до момента $t=15$.

Путь, пройденный за этот промежуток времени, будет равен

$$\frac{1}{2}g\cdot 15^2-\frac{1}{2}g\cdot 10^2 \quad \text{(рис. 121).}$$

Средняя же скорость за этот промежуток времени будет равна

$$\frac{\frac{1}{2}g\cdot 15^2-\frac{1}{2}g\cdot 10^2}{15-10}\ \frac{м}{сек},$$

или

$$\frac{1}{2}g\cdot\frac{15^2-10^2}{15-10}\ \frac{м}{сек},$$

или

$$\frac{1}{2}g\cdot\frac{(15+10)(15-10)}{15-10}\,\frac{м}{сек},$$

или, наконец, $12{,}5g\,\frac{м}{сек}$ $\left(\text{приближенно}\ \ 122{,}5\ \frac{м}{сек}\right)$.

Средняя скорость за промежуток времени с момента $t=10$ до $t=11$ будет равна

$$\frac{\frac{1}{2}g\cdot 11^2-\frac{1}{2}g\cdot 10^2}{11-10}\,\frac{м}{сек},\ \text{или}\ \ 10{,}5g\,\frac{м}{сек}$$

$$\left(\text{приближенно}\ 102{,}9\,\frac{м}{сек}\right).$$

Средняя скорость за промежуток времени с момента $t=10$ до $t=10{,}1$ равна

$$\frac{\frac{1}{2}g\cdot 10{,}1^2-\frac{1}{2}g\cdot 10^2}{10{,}1-10}\,\frac{м}{сек},\ \text{или}\ \ 10{,}05g\,\frac{м}{сек}$$

$$\left(\text{приближенно}\ \ 98{,}49\ \frac{м}{сек}\right).$$

Мы, видим, что задача определения средней скорости также решается выполнением нескольких действий (выполняется два раза возведение в степень, несколько раз умножение, два раза вычитание и один раз деление).

Теперь поставим задачу иного характера.

З а д а ч а о с к о р о с т и. Определить скорость свободно падающего тела в тот или иной выбранный момент времени.

Мы предполагаем, что читатель имеет представление о скорости механического движения. Например, он знает, что скорость тела, сброшенного с различных высот, в момент падения на землю различна. Он имеет представление о наибольшей скорости самолета и о той его скорости, с которой он приземляется.

Здесь мы покажем, как математически найти скорость свободно падающего тела в любой момент времени при условии, что уравнение движения

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

нам известно *.

Найдем сначала скорость, например, в момент $t=10$.

---

* Изложенный способ применим к нахождению скорости любого другого механического движения.

Средняя скорость за промежуток времени с момента $t=10$ до момента $t=10+h$* будет равна

$$\frac{\frac{1}{2}g(10+h)^2-\frac{1}{2}g10^2}{(10+h)-10} \text{ м/сек},$$

или

$$\frac{1}{2}g\frac{(10+h)^2-10^2}{(10+h)-10} \text{ м/сек},$$

или же

$$\frac{1}{2}g(20+h) \text{ м/сек}.$$

Но эта средняя скорость будет тем ближе к скорости в момент $t=10$, чем ничтожнее или чем ближе к нулю будет величина h.

Таким образом, чтобы получить скорость в момент $t=10$, необходимо определить ту величину, к которой неограниченно стремится величина средней скорости

$$\frac{1}{2}g(20+h),$$

когда величину h мы делаем все более и более ничтожной, все более и более приближающейся к нулю.

Очевидно, что выражение

$$\frac{1}{2}g(20+h)$$

при этих условиях будет неограниченно стремиться к величине $\frac{1}{2}g\cdot 20$, т. е. к величине $10g$.

Значит, скорость в момент $t=10$ будет равна $10g$ *м/сек*.

Постоянную величину $10g$ называют **пределом переменной величины** $\frac{1}{2}g(20+h)$ при условии, что величина h стремится к нулю, приближаясь к нему неограниченно.

Обратим внимание на то, что для решения последней задачи недостаточно было выполнить несколько действий над числами, а надо было, кроме того, определить ту постоянную величину, к которой неограниченно приближается переменная величина $\frac{1}{2}g(10+h)$ при стремлении величины h к нулю, т. е. надо было, как принято говорить, отыскать предел переменной величины $\frac{1}{2}g(10+h)$.

Решим последнюю задачу в общем виде, т. е. найдем скорость для произвольно выбранного момента времени t.

---

* Здесь под буквой h мы понимаем произвольное приращение времени, выраженное в секундах; h может равняться, например, 3; 2; 1; 0,1; 0,01; 0,001 и т. д.

Средняя скорость за промежуток времени с момента t до момента $t+h$ будет:

$$\frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2}{(t+h)-t}\ \text{м/сек},$$

т. е.

$$\frac{1}{2}g(2t+h)\ \text{м/сек}.$$

Оставляя t неизменным и приближая h к нулю, получим, что скорость в момент t будет равна gt *м/сек*.

Например, скорость
в конце 1-й секунды будет g *м/сек*
в конце 2-й „ „ $2g$ „
в конце 3-й „ „ $3g$ „ и т. д.

Рассмотрим еще одну задачу, для решения которой опять потребуется отыскание предела переменной величины.

Задача о касательной. К параболе $y=\frac{1}{4}x^2$ в ее точке $M(2;\ 1)$ проведена касательная AB. Найти тангенс угла α между осью OX и этой касательной (рис. 122).

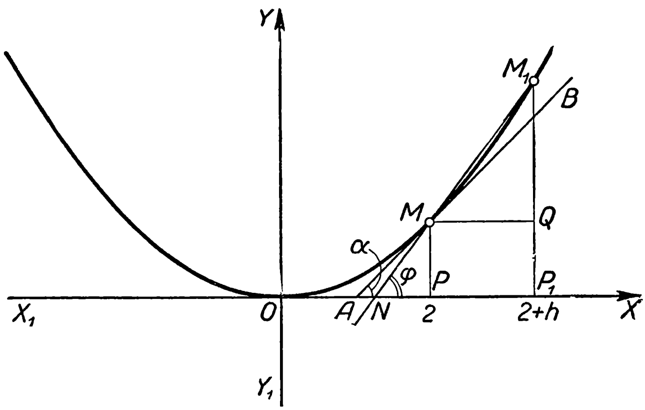


Рис. 122.

Возьмем на параболе точку $M_1\left[2+h;\ \frac{1}{4}(2+h)^2\right]$ и проведем $MQ \parallel OX$. Тогда $OP=2$; $MP=1$.

$$MQ=h;\quad M_1P_1=\frac{1}{4}(2+h)^2;\quad QP_1=MP=1$$

и $M_1Q=\frac{1}{4}(2+h)^2-1$.

Проведем секущую MM_1 и обозначим буквой φ угол между осью OX и этой секущей.

Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{M_1Q}{MQ}=\frac{\frac{1}{4}(2+h)^2-1}{h},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi=1+\frac{1}{4}h.$$

Если теперь мы станем точку M_1 приближать вдоль параболы к точке M, то секущая MM_1 станет поворачиваться вокруг неподвижной точки M, стремясь все ближе и ближе к положению касательной AB. При этом h будет приближаться к нулю, а величина φ будет приближаться к величине α.

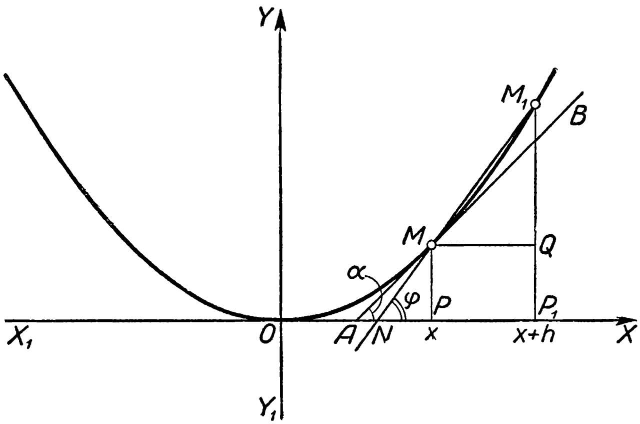


Рис. 123.

Значит, $\operatorname{tg}\alpha$ будет равняться той величине, к которой неограниченно приближается переменная величина $1+\frac{1}{4}h$, когда мы станем величину h неограниченно приближать к нулю, т. е. оказывается, что $\operatorname{tg}\alpha=1$.

Решим эту же задачу в общем виде.

Пусть к параболе $y=\frac{1}{4}x^2$ проведена касательная AB в произвольно взятой на ней точке $M\left(x;\ \frac{1}{4}x^2\right)$. Найти тангенс угла α между осью OX и этой касательной (рис. 123).

Возьмем на параболе точку $M_1\left[(x+h);\ \frac{1}{4}(x+h)^2\right]$ и проведем $MQ \parallel OX$. Тогда $OP=x$; $MP=\frac{1}{4}x^2$.

$$MQ=h;\quad M_1P_1=\frac{1}{4}(x+h)^2;\quad QP_1=MP=\frac{1}{4}x^2$$

и

$$M_1Q = \frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2.$$

Проведем секущую MM_1 и обозначим буквой φ угол между осью OX и этой секущей.

Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_1Q}{MQ} = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{h},$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h.$$

Если теперь станем точку M_1 приближать вдоль параболы к точке M, то секущая MM_1 станет поворачиваться вокруг неподвижной точки M, стремясь все ближе и ближе к положению касательной AB. При этом h будет приближаться к нулю, а величина φ — к величине α.

Значит, $\operatorname{tg}\alpha$ будет равняться той величине, к которой неограниченно приближается переменная сумма $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h$, когда мы станем h приближать как угодно близко к нулю, т. е. окажется, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}x.$$

Например:

$$\text{для } x=1 \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},$$
$$\text{для } x=2 \quad \operatorname{tg}\alpha = 1,$$
$$\text{для } x=3 \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$$

и т. д.

Вычисление пределов переменных величин является операцией, необходимой для решения очень многих разнообразных и весьма важных задач. Но не следует думать, что вычисление пределов осуществляется всегда так легко и просто, как в только что разобранных примерах. Для иллюстрации приведем хотя бы один пример.

Пример. Найти предел дроби

$$\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{\sqrt{18+h} - \sqrt{18-h}}$$

при условии, что h стремится к нулю.

Этот предел обнаружить непосредственно нельзя, так как и числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю.

Если же числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, то о том, к чему будет стремиться сама дробь, ничего нельзя сказать наперед.

Поэтому, чтобы найти искомый предел, мы данную дробь предварительно преобразуем следующим образом:

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{\sqrt{18+h}-\sqrt{18-h}}=\frac{(\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}{(\sqrt{18+h}-\sqrt{18-h})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=$$

$$=\frac{2h}{(\sqrt{18+h}-\sqrt{18-h})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=$$

$$=\frac{2h(\sqrt{18+h}+\sqrt{18-h})}{(\sqrt{18+h}+\sqrt{18-h})(\sqrt{18+h}-\sqrt{18-h})(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=$$

$$=\frac{2h(\sqrt{18+h}+\sqrt{18-h})}{2h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h})}=\frac{\sqrt{18+h}+\sqrt{18+h}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2-h}}.$$

Но последняя дробь при h, стремящемся к нулю, стремится к числу $\frac{2\sqrt{18}}{2\sqrt{2}}$, т. е. к числу 3.

Следовательно, предел первоначальной дроби равен 3.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРЕДЕЛА

Определение. ***Постоянная величина a называется пределом переменной величины x, если для всякого наперед заданного положительного числа ε можно указать такой момент, начиная с которого разность $x-a$ сделается и будет оставаться по абсолютной величине меньше числа ε, как бы мало оно ни было.***

Примечание 1. Число ε не имеет ничего общего с величиной h, которая встречалась в предыдущих примерах. Здесь ε есть число постоянное, а h мы рассматривали как величину переменную, стремящуюся к нулю.

Примечание 2. Если бы было известно, что сама разность $x-a$ меньше, скажем 0,000001, то отсюда нельзя было бы еще заключить, что x близко к a. Например, $7-1000<0{,}000001$, но число 7 не является близким к 1000. Поэтому в определении предела надо требовать, чтобы выполнялось неравенство

$$|x-a|<\varepsilon,$$

а не только неравенство

$$x-a<\varepsilon.$$

Пусть точка A изображает на числовой оси u_1u число a, а точка X — число x (рис. 124). Если x будет изображать числовое значение некоторой переменной величины, то x в процессе изменения этой переменной будет принимать бесконечное множество значений. При этом точка X будет изменять свое положение на числовой оси, как-то перемещаясь по оси u_1u.

Возьмем на числовой оси отрезок, левый конец которого есть точка, изображающая число $a-\varepsilon$, а правый конец — число $a+\varepsilon$ (рис. 124).

Если постоянная a есть предел переменной x, то это значит, что как бы мало ни было положительное число ε, перемещающаяся точка X с некоторого момента окажется внутри отрезка PQ, т. е. отрезка $[a-\varepsilon,\ a+\varepsilon]$, и будет с этого момента оставаться внутри этого отрезка все время.

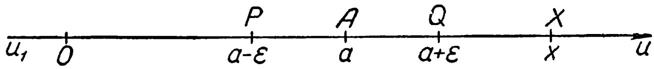


Рис. 124.

Пример. Рассмотрим выражение $\sqrt[n]{1000}$ при условии, что показатель корня n будет натуральным неограниченно возрастающим числом. При этих условиях выражение $\sqrt[n]{1000}$ будет представлять собой величину переменную.

Докажем, что пределом этой переменной будет единица.

Пусть ε есть любое наперед заданное сколь угодно малое положительное число.

Возьмем $n > \frac{1000-1}{\varepsilon}$. Тогда получим, что $n\varepsilon > 1000-1$, или $1000 < 1+n\varepsilon$. Но в таком случае и подавно будет $1000 < (1+\varepsilon)^n$, так как $1+n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n$ *.

Из неравенства $1000 < (1+\varepsilon)^n$ следует, что $\sqrt[n]{1000} < 1+\varepsilon$, или $\sqrt[n]{1000}-1 < \varepsilon$, или, наконец, $\left|\sqrt[n]{1000}-1\right| < \varepsilon$.

Итак, оказалось, что при всяком значении n, большем дроби $\frac{1000-1}{\varepsilon}$, абсолютная величина разности между переменной величиной $\sqrt[n]{1000}$ и постоянной величиной единицей становится и остается меньше произвольно заданного сколь угодно малого положительного числа ε. Следовательно, число единица является пределом переменной величины $\sqrt[n]{1000}$.

Чтобы указать, что пределом переменной величины x служит число a, пишут так:

$\lim x = a$ (читается: предел x равен a), либо так: $x \to a$ (читается: x стремится к a, как к своему пределу).

Знак lim происходит от латинского слова «limes», что значит граница, предел.

---

* Произведение $\underbrace{\overbrace{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon)\ \dots\ (1+\varepsilon)}^{n\ \text{множителей}}}$ после раскрытия скобок будет содержать выражение $1+n\varepsilon$ и еще ряд других положительных членов. Поэтому $1+n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n$.

§ 3. РАЗЛИЧНЫЕ ТИПЫ СТРЕМЛЕНИЯ К ПРЕДЕЛУ

Переменная величина может стремиться к своему пределу весьма разнообразными способами.

Приведем примеры.

1. Площадь S вписанного в круг правильного многоугольника при неограниченном возрастании числа его сторон стремится к своему пределу, к площади круга K, все время возрастая. В этом случае разность $S-K$ остается все время отрицательной.

2. Площадь S описанного около круга правильного многоугольника при неограниченном возрастании числа его сторон стремится к своему пределу, к площади круга K, все время убывая. В этом случае разность $S-K$ остается все время положительной.

3. Пусть n есть неограниченно возрастающее натуральное число. Тогда дробь $\frac{(-1)^n}{n}$ будет величиной переменной, имеющей своим пределом нуль. В этом случае переменная будет становиться то больше, то меньше своего предела, смотря по тому, четно или нечетно число n.

Во всех этих трех примерах переменная никогда не достигает своего предела.

4. При неограниченном возрастании числа x дробь $\frac{\sin x}{x}$ будет переменной величиной, имеющей своим пределом число нуль. Но здесь переменная величина $\frac{\sin x}{x}$ в процессе своего изменения бесконечно много раз будет становиться равной своему пределу. Это будет происходить всякий раз, как только x будет принимать значение, равное произведению целого числа на π. Действительно,

$$\frac{\sin 20\pi}{20\pi}=0; \quad \frac{\sin 30\pi}{30\pi}=0; \quad \frac{\sin 159\pi}{159\pi}=0$$

и т. д.

Приближаясь к своему пределу, равному нулю, переменная $\frac{\sin x}{x}$ будет принимать и положительные и отрицательные значения, т. е. будет становиться то больше, то меньше своего предела, а в некоторые отдельные моменты, как уже отмечалось, может принимать и значения, равные ее пределу.

Этими примерами далеко не исчерпывается все многообразие видов стремления переменной к своему пределу. Могут быть процессы приближения переменной к своему пределу, происходящие еще более сложными способами.

Из самого определения понятия предела следует, что одна и та же переменная величина никогда не может иметь двух различных пределов.

Не следует думать, что всякая переменная величина обязательно имеет предел. Например, при неограниченном возрастании x переменная величина $\sin x$ ни к какому пределу не стремится. Так же ни к какому пределу не стремится и переменная величина $(-1)^n$ при неограниченном возрастании натурального числа n.

Условимся говорить, что пределом постоянной величины является сама эта постоянная. Например, $\lim a = a$, если a есть величина постоянная.

Результаты, полученные ранее, можно записать так:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}g(2t+h)=gt; \qquad \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}h\right)=\frac{1}{2}x;$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{\sqrt{18+h}-\sqrt{18-h}}=3; \qquad \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1000}=1.$$

(Запись $n\to+\infty$ означает, что натуральное число n неограниченно возрастает.)

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0; \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

Эти же результаты можно было бы записать еще и так:

$$\frac{1}{2}g(2t+h)\to gt, \qquad \text{когда } h\to 0;$$

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}h\to\frac{1}{2}x, \qquad \text{когда } h\to 0;$$

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2-h}}{\sqrt{18+h}-\sqrt{18-h}}\to 3, \qquad \text{когда } h\to 0.$$

§ 4. ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАССА

В предыдущем параграфе было показано, что переменная величина может иметь, а может и не иметь предел.

При решении теоретических и практических вопросов встречаются случаи, когда предел переменной величины найти невозможно, да и не нужно, а нужно лишь только знать, что переменная имеет предел. В подобных случаях пользуются, где это удается, особыми признаками, позволяющими судить о существовании предела.

Один из таких признаков, наиболее простой и часто применяемый, называется признаком Вейерштрасса* и состоит в следующем.

1. Неубывающая, в частности, возрастающая переменная x, остающаяся меньше одного и того же числа A, обязательно имеет предел a, причем a будет либо

---

* См. «Краткие исторические сведения».

меньше, либо равно А. (Доказательство этой теоремы сложно, поэтому оно здесь не приводится.)

Пример. Пусть требуется выяснить, имеет ли предел сумма

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} \qquad \text{(I)}$$

при неограниченном возрастании натурального числа n. Эта сумма представляет собой возрастающую переменную величину.

Рассмотрим другую вспомогательную сумму:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\,n}+\frac{1}{n\,(n+1)}. \qquad \text{(II)}$$

Обратим внимание на то, что каждое слагаемое суммы (II) можно представить в виде разности двух дробей, а именно:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};\quad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};\ \ldots$$

$$\ldots\ \frac{1}{(n-1)\,n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n};\quad \frac{1}{n\,(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Благодаря этому сумма (II) примет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Легко видеть, что эта сумма будет равна $1-\frac{1}{n+1}$. Следовательно, предел суммы (II) будет равен пределу разности $\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ при $n\to\infty$, т. е. единице.

Легко заметить, что каждое слагаемое суммы (I) меньше, чем соответствующее слагаемое суммы (II). Но сумма (II) при всяком значении натурального числа n меньше своего предела, т. е. меньше, чем 1. Значит, сумма (1) и подавно будет оставаться меньше единицы при всяком значении натурального числа n.

Итак, мы установили два факта: 1) сумма (I) есть возрастающая переменная и 2) что эта сумма остается при всяком значении натурального числа n меньше, чем единица.

На основании признака Вейерштрасса мы можем заключить, что сумма (I) есть переменная, имеющая предел, и что этот предел будет либо меньше, либо равен единице. Таким образом, хотя мы и не нашли предел суммы (I), но все же доказали, что он существует и не превосходит единицы.

Легко убедиться, что этот предел не только не превосходит единицы, но что он меньше единицы. Действительно, как мы уже доказали, предел суммы (II) равен единице. Но из сравнения хотя бы первых членов сумм (I) и (II) видно, что предел суммы (I) меньше, чем предел суммы (II), т. е. меньше единицы.

Итак, мы доказали, что предел суммы (I) существует и является числом, меньшим единицы.

В признак Вейерштрасса входит признак существования предела и для невозрастающих переменных величин.

2. Невозрастающая, в частности убывающая, переменная x, остающаяся больше одного и того же числа q, обязательно имеет предел Q, причем число Q будет либо больше, либо равно q.

Признак Вейерштрасса полезен во многих случаях. Например, существует такое определение понятия длины окружности: *Длиной окружности называется предел периметра вписанного в нее правильного n-угольника при $n \to \infty$.*

Это определение не имело бы смысла, если не было бы доказано, что указанный предел существует. Существование же этого предела легко доказывается как раз с помощью признака Вейерштрасса.

§ 5. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ

Определение. ***Переменная величина α называется бесконечно малой, если она имеет своим пределом нуль.***

Следовательно, *если* $\lim \alpha = 0$, *то это означает следующее: для всякого наперед заданного числа ε можно указать такой момент, начиная с которого переменная α становится и остается по абсолютной величине меньше, чем ε, как бы мало ни было это число ε.*

Пусть точка X изображает собой на числовой оси какое-то значение величины α.

При изменении величины α будет изменяться и положение точки X на числовой оси.

Возьмем на числовой оси u_1u (рис. 125) отрезок, левый конец которого есть точка, изображающая число $-\varepsilon$, а правый конец — число $+\varepsilon$.

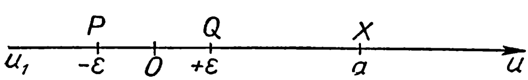


Рис. 125.

Если α есть бесконечно малая, то это значит, что, как бы мало ни было положительное число ε, движущая точка X с некоторого момента окажется внутри отрезка PQ и останется там с этого момента все время.

Здесь число нуль играет такую же роль, как и число a в начале § 2, т. е. постоянное число нуль является пределом переменной α так же, как раньше постоянная a являлась пределом переменной величины x.

Так как неравенство

$$|0| < \varepsilon$$

выполняется при всяком положительном значении ε, как бы малым оно ни было, то мы условимся считать нуль также величиной бесконечно малой, но такой, что ее значение все время остается равным нулю.

По своему существу всякая бесконечно малая величина есть величина переменная. Поэтому никакая постоянная величина, не равная нулю, как бы мала она ни была, не будет являться величиной бесконечно малой.

Например, $\frac{1}{2^{100}}$ есть число ничтожно малое, тем не менее оно не является бесконечно малой величиной. Среди постоянных только нуль, как было объяснено выше, может считаться величиной бесконечно малой.

Замечание 1. Во всех предыдущих рассуждениях мы буквой ε обозначали любое наперед заданное как угодно малое положительное число. Значит, ε обозначает собой всякий раз число постоянное, не равное нулю. Значит, ε во всех предыдущих рассуждениях не являлась величиной бесконечно малой.

Замечание 2. Если x есть переменная, имеющая своим пределом число a, то, как уже было сказано раньше, правильными будут следующие записи:

$$\lim x = a,$$

или

$$x \to a;$$

и неправильной будет запись $x = a$.

Запись $x = a$ будет правильной лишь в том случае, если величина x будет такой, что ее значения неизменно остаются равными числу a.

Замечание 3. Если x есть переменная, имеющая своим пределом число a, то правильной будет еще и следующая запись

$$x - a = \alpha,$$

где α — величина бесконечно малая.

Таким образом, разность между переменной и ее пределом всегда есть величина бесконечно малая.

Из равенства $x - a = \alpha$ следует, что $x = a + \alpha$, т. е. переменная равна своему пределу плюс величина бесконечно малая. Последняя бесконечно малая α может принимать как положительные, так и отрицательные значения, в зависимости от характера приближения переменной x к своему пределу a.

§ 6. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

1. Сумма конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

2. Произведение конечного числа бесконечно малых есть величина бесконечно малая.

3. Произведение постоянного числа на величину бесконечно малую есть величина бесконечно малая.

Остановимся для примера лишь на доказательстве первого свойства.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — бесконечно малые величины и пусть ε есть произвольное положительное число.

Тогда, начиная

с некоторого момента t_1, будет $|\alpha_1| < \frac{\varepsilon}{n}$,

» » t_2 » $|\alpha_2| < \frac{\varepsilon}{n}$,

. . . .

» » t_n » $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{n}$.

Поэтому, начиная с самого позднего из этих моментов, будет выполняться неравенство:

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon.$$

Но

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|.$$

Следовательно, с указанного выше самого позднего момента будет выполняться и подавно неравенство

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| < \varepsilon,$$

а это и означает, что сумма

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

если величина бесконечно малая.

Итак мы доказали, что сумма конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.

Замечание. О частном двух бесконечно малых ничего определенного сказать нельзя. В каждом конкретном случае такое частное надо изучить и исследовать в отдельности.

Например, при $h \to 0$

$$\frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2-h}}{\sqrt{18+h} - \sqrt{18-h}} \to 3, \qquad \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4-h}}{\sqrt{64+h} - \sqrt{64-h}} \to 4.$$

§ 7. СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ

1. Предел суммы конечного числа переменных равен сумме пределов этих переменных при условии, что каждое слагаемое имеет предел:

$$\lim (x + y + z) = \lim x + \lim y + \lim z.$$

2. Предел произведения конечного числа переменных равен произведению пределов этих переменных при условии, что предел каждого множителя существует:

$$\lim (x \cdot y \cdot z) = \lim x \cdot \lim y \cdot \lim z.$$

3. Предел частного двух переменных равен частному их пределов, когда эти пределы существуют и предел знаменателя отличен от нуля, т. е.

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y},$$

если $\lim x$ и $\lim y$ существуют и $\lim y \neq 0$.

4. $\lim x^n = (\lim x)^n$.

5. $\lim \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim x}$.

6. $\lim \sin x = \sin (\lim x)$.

7. $\lim \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} (\lim x)$, если $\lim x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, и т. д.

Остановимся для примера лишь на доказательстве первого свойства.

Пусть x_1, x_2, x_3 — переменные величины, имеющие своим пределом соответственно числа a_1, a_2, a_3, т. е. пусть

$$\lim x_1 = a_1, \quad \lim x_2 = a_2, \quad \lim x_3 = a_3.$$

Тогда

$$x_1 = a_1 + \alpha_1; \qquad x_2 = a_2 + \alpha_2; \qquad x_3 = a_3 + \alpha_3,$$

где α_1, α_2, α_3 — величины бесконечно малые.

Отсюда

$$x_1 + x_2 + x_3 = (a_1 + a_2 + a_3) + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Сумма $x_1 + x_2 + x_3$ есть какая-то переменная; сумма $a_1 + a_2 + a_3$ есть величина постоянная; сумма $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ есть величина бесконечно малая.

Если же какая-либо переменная величина x равна постоянной A, сложенной с бесконечно малой γ, то пределом этой переменной x будет постоянная A.

Поэтому

$$\lim (x_1 + x_2 + x_3) = a_1 + a_2 + a_3,$$

или

$$\lim (x_1 + x_2 + x_3) = \lim x_1 + \lim x_2 + \lim x_3,$$

что и требовалось доказать.

§ 8. БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ

Определение. ***Переменная величина x называется положительной бесконечно большой величиной, если для всякого наперед заданного сколь угодно большого положительного числа M можно указать такое состояние процесса изменения x, начиная с которого переменная величина x становится и остается больше, чем M, т. е. выполняется неравенство $x > M$.***

Никакое постоянное число, сколь бы большим оно ни было, не является бесконечно большой величиной. Например, число 1000^{1000} не есть бесконечно большая величина.

Для того чтобы величина могла бы быть бесконечно большой, необходимо, чтобы она была прежде всего величиной переменной.

Если x есть положительная бесконечно большая величина, то говорят, что x неограниченно возрастает. При этом принято писать так:

$$\lim x = +\infty$$

(читают: предел x равен плюс бесконечности), или

$$x \to +\infty$$

(читают: x стремится к плюс бесконечности).

Символ $+\infty$ называется «положительной бесконечностью» и числом не является.

Запись $\lim x = +\infty$ мы употребляем условно. Здесь символ $+\infty$ не есть предел в настоящем смысле этого слова. В настоящем смысле слова предел переменной есть определенное число, а символ $+\infty$, как уже отмечалось, не является числом.

Таким образом, запись

$$\lim x = +\infty$$

мы должны понимать так: переменная x предела не имеет, но она есть неограниченно возрастающая переменная.

Определение. ***Переменная x называется отрицательной бесконечно большой величиной, если для всякого наперед заданного отрицательного числа $-N$ $(N > 0)$, каким бы большим ни было N, можно указать такое состояние процесса изменения x, начиная с которого величина x становится и остается меньше, чем $-N$, т. е. выполняется неравенство***

$$x < -N.$$

Если x есть отрицательная бесконечно большая величина, то говорят, что x неограниченно убывает. При этом обычно пишут так:

$$\lim x = -\infty$$

(читают: предел x равен минус бесконечности), или

$$x \to -\infty$$

(читают: x стремится к минус бесконечности).

Определение. ***Если переменная величина x не прекращает принимать и положительные и отрицательные значения и если при этом ее абсолютная величина неограниченно возрастает, то она называется бесконечно большой величиной.***

Если x есть бесконечно большая величина, то пишут:

$$\lim x = \infty$$

(читают: предел x равен бесконечности) или

$$x \to \infty$$

(читают: x стремится к бесконечности).

Символы $-\infty$ и ∞ также не являются числами, как и символ $+\infty$.

Замечание. Если x есть переменная бесконечно большая, то $\frac{1}{x}$ будет переменной бесконечно малой:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Если α есть переменная бесконечно малая, то $\frac{1}{\alpha}$ будет переменной бесконечно большой:

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha} = \infty, \qquad \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}} \frac{1}{\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}} \frac{1}{\alpha} = -\infty.$$

§ 9. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ

1. $$\lim_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{(x+5)(x-5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 10.$$

2. $$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

3. $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{a+h}-\sqrt{a})(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)-a}{h(\sqrt{a+h}+\sqrt{a})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

4. $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-x+3}{3x^2+x-10} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^2-x+3}{x^2}}{\frac{3x^2+x-10}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{1}{x}-\frac{10}{x^2}} = \frac{5}{3}.$$

5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-8x+15}{x^2-x-6}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-5)}{(x+2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-5}{x+2}=-\frac{2}{5}.$

6. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+x-3}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+5x+10)-(x^2+x-3)}{\sqrt{x^2+5x+10}+\sqrt{x^2+x-3}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x+13}{\sqrt{x^2+5x+10}+\sqrt{x^2+x-3}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4x+13}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x+10}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+x-3}}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4+\frac{13}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}}=2.$$

7. $$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+10}-\sqrt{x^2+x-3}\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4x+13}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+5x+10}}{x}+\frac{\sqrt{x^2+x-3}}{x}}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{13}{x}}{-\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}}=-2.$$

8. $$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1000}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{1000}}=\frac{1}{\lim\sqrt[n]{1000}}=\frac{1}{1}=1$$

(в § 2 было доказано, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1000}=1$).

9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Очевидно (рис. 126), что пл. $\triangle AOC <$ пл. сектора $AOC <$ $<$ пл. $\triangle AOB$. (1)

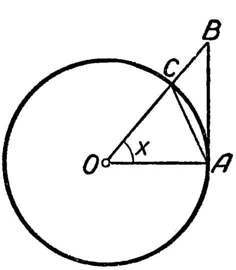


Рис. 126.

Обозначив радиус круга через R и центральный угол, выраженный в радианах, через x, получим из неравенств (I):

$$\frac{R^2}{2}\sin x<\frac{R^2}{2}x<\frac{R^2}{2}\operatorname{tg}x, \quad \text{или}$$
$$\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Заметив, что по условию задачи $x\to 0$, можем принять, что

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Разделив все члены неравенств на положительное число $\sin x$, получим:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{или} \quad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

При $x \to 0$ крайние члены последних неравенств имеют одинаковый предел, равный единице. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Равенство $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ остается справедливым и тогда, когда число x, стремясь к нулю, принимает отрицательные значения.

Доказательство. Пусть $x < 0$, т. е. пусть $x = -y$, где $y > 0$.
Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \to 0} \frac{-\sin y}{-y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

Замечание. Легко видеть, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin x}$ так же равен единице.

Действительно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim 1}{\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пользуясь тем, что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, легко можно получить еще и следующие формулы:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Действительно,

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$

2) Далее, положим, что $y = \arcsin x$; отсюда $\sin y = x$ и при $x \to 0$ будет также и $y \to 0$.

Теперь имеем:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

3) Положим, $y = \operatorname{arctg} x$; отсюда $\operatorname{tg} y = x$ и при $x \to 0$ будет и $y \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Применения формулы $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ в более сложных случаях

Равенство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ можно сформулировать так.

Предел отношения синуса любой бесконечно малой величины к этой же бесконечно малой величине всегда есть единица.

Например:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{a+b}{2}x}{\frac{a+b}{2}x}=1.$$

Примеры:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\right)=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$

2. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{ax}{bx}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{a}{b}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{bx}{\sin bx}\cdot\lim\frac{a}{b}=1\cdot 1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

3. $$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=1\cdot\cos x=\cos x.$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\frac{a+b}{2}x\sin\frac{a-b}{2}x}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{a+b}{2}x}{\frac{a+b}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}x}{\frac{a-b}{2}x}\cdot\frac{-2\frac{a+b}{2}x\cdot\frac{a-b}{2}x}{x^2}\right)=$$
$$=\lim\left|\frac{\sin\frac{a+b}{2}x}{\frac{a+b}{2}x}\cdot\frac{\sin\frac{a-b}{2}x}{\frac{a-b}{2}x}\cdot-\frac{a^2-b^2}{2}\right|=1\cdot 1\cdot-\frac{a^2-b^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

§ 10. ТЕОРЕМЫ О $\lim\limits_{n\to+\infty}A^n$ ПРИ $A>1$ И $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n$ ПРИ $|q|<1$

Лемма. Если $x>0$ и $n>1$ (n — натуральное число), то
$$(1+x)^n>1+nx.$$

Доказательство.
$$(1+x)^n=\underbrace{(1+x)(1+x)\,\ldots\,(1+x)}_{n\text{ множителей}}.$$

Но произведение, стоящее в правой части последнего равенства, после раскрытия скобок будет содержать выражение $1+nx$ и еще ряд других положительных членов. Поэтому

$$(1+x)^n > 1+nx,$$

что и требовалось доказать. (Этой леммой мы пользовались в § 2 при доказательстве равенства $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{1000}=1.$)

Теорема 1. Если $A>1$, то

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = +\infty.$$

Доказательство.

По условию $A>1$, следовательно

$$A-1>0.$$

Подставляя в только что доказанное неравенство

$$(1+x)^n > 1+nx$$

вместо положительного числа x положительное число $A-1$, получим:

$$A^n > 1+n(A-1). \tag{1}$$

Обозначим через M произвольное положительное число. Тогда, для того чтобы оказалось выполненным неравенство

$$1+n(A-1)>M,$$

достаточно взять n большим, чем $\frac{M-1}{A-1}$.

Итак, при всяком n, удовлетворяющем неравенству

$$n>\frac{M-1}{A-1},$$

будет выполняться неравенство

$$1+n(A-1)>M,$$

а в силу неравенства (1) и подавно окажется, что

$$A^n>M.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to+\infty} A^n = +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Может показаться, что доказывать эту теорему не было надобности ввиду ее очевидности. Но это не так.

Изложенное доказательство не является излишним, так как оно дает нам абсолютную уверенность в справедливости не только равенства, например,

$$\lim_{n\to+\infty} 10^n=+\infty,$$

но и равенства, например,

$$\lim_{n\to+\infty} (1,000\,000\,000\,001)^n=+\infty.$$

Последнее равенство далеко не очевидно.

Теорема 2. Если $|q|<1$, то

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=0 \quad (n \text{ — натуральное число}).$$

Доказательство.

Обозначим буквой A отношение $\frac{1}{|q|}$. Тогда получим, что $A>1$ и что $|q|=\frac{1}{A}$.

Отсюда

$$\lim_{n\to+\infty} |q|^n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{A^n}=0$$

(по предыдущей лемме $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n=+\infty$).

Из того, что $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n=0$, вытекает, что и

$$\lim_{n\to+\infty} q^n=0,$$

что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

225. Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$. Отв. 10.
2. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}$. Отв. 2.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-25}{x^2+5x}$. Отв. 0.
4. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$. Отв. $2x$.
5. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$. Отв. $3x^2$.
6. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$. Отв. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
7. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a-h}}{\sqrt{b+h}-\sqrt{b-h}}$. Отв. $\sqrt{\frac{b}{a}}$.
   $a>0$ и $b>0$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)(x-2)}{(4x+3)(x-1)}$. Отв. $\dfrac{1}{2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x^2+2}{x^2-1}$. Отв. $-0,5$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. Отв. 1.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+px+q}\right)$. Отв. $\dfrac{a-p}{2}$.

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+b}-\sqrt{x^2+px+q}\right)$. Отв. $\dfrac{p-a}{2}$.

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$. Отв. $\dfrac{1}{2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$. Отв. $\dfrac{4}{3}$.

15. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{4}{x^2-2}+\dfrac{1}{x+2}\right)$. Отв. $-\dfrac{1}{4}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n(n+2)(2n+1)}{6(n^2+n+1)}-\dfrac{n}{3}\right]$. Отв. $\dfrac{1}{2}$.

17. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$. Отв. $-\sin x$.

ГЛАВА XXIII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. ПРИМЕРЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Последовательность есть одно из основных понятий математики. Это понятие неизбежно возникает при рассмотрении многих важных математических вопросов.

Например, чтобы составить себе представление о длине окружности, мы вынуждены рассматривать последовательность чисел, выражающих периметры правильных вписанных в эту окружность многоугольников при неограниченном удвоении числа сторон, а также наряду с этим и последовательность чисел, выражающих периметры правильных описанных многоугольников.

Первую последовательность мы можем записать в общем виде, например, так:

$$p_6,\ p_{12},\ p_{24},\ p_{48},\ p_{96},\ p_{192},\ p_{384},\ p_{768},\ p_{1536} \ldots .$$

Здесь p_6 обозначает периметр правильного вписанного шестиугольника, p_{12} — двенадцатиугольника и т. д.

Вторую последовательность мы запишем так:

$$P_6,\ P_{12},\ P_{24},\ P_{48},\ P_{96},\ P_{192},\ P_{384},\ P_{768},\ P_{1536} \ldots .$$

Здесь P_6 — периметр правильного описанного шестиугольника, P_{12} — двенадцатиугольника и т. д.

Пользуясь этими двумя последовательностями, мы можем определить длину окружности радиуса R с любой степенью точности. Например, с точностью до $0{,}00002\,R$ эта длина равна $6{,}28318\,R$.

Чтобы составить себе представление об иррациональном числе $\sqrt{2}$, мы вынуждены были рассматривать последовательность приближенных значений $\sqrt{2}$ с недостатком и последовательность приближенных значений с избытком.

Первая последовательность:

$$1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ 1{,}4142136; \ldots .$$

Вторая последовательность:

$$1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ 1{,}4142137; \ldots .$$

Пользуясь этими двумя последовательностями, мы определяем приближенное значение $\sqrt{2}$ с любой степенью точности (с недостатком и с избытком).

Последовательность может быть образована из элементов любой природы. Например, можно составить последовательность равнобедренных прямоугольных треугольников с гипотенузами, равными соответственно 1, 2, 3, 4, 5, ... (рис. 127).

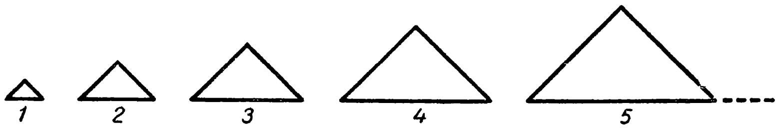


Рис. 127.

Последовательность, образованная из элементов любой природы, записывается в виде:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ u_n, \ldots.$$

Элементы, из которых составляется последовательность, называются ее **членами**.

Наиболее часто встречаются последовательности, элементами которых являются числа (числовые последовательности), а также и такие, элементами которых являются функции (функциональные последовательности).

Примеры числовых последовательностей:

1) $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots \qquad (u_n = n);$

2) $2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots \qquad (u_n = 2n);$

3) $1;\ 4;\ 9;\ 16;\ \ldots \qquad (u_n = n^2);$

4) $0;\ 1;\ 0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{3};\ 0;\ \frac{1}{4};\ \ldots \qquad \left(u_n = \frac{1+(-1)^n}{n}\right).$

Определение. ***Последовательностью чисел называется совокупность бесконечно большого числа следующих друг за другом чисел***

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n\ \ldots,$$

заданных при помощи какого-нибудь правила, определяющего a_n как функцию натурального числа n.

Примеры функциональных последовательностей:

1) $x;\ x^2;\ x^3;\ \ldots \qquad (u_n = x^n);$

2) $\frac{1}{1+2x};\ \frac{2x}{1+4x^3};\ \frac{3x^2}{1+6x^5};\ \ldots \qquad \left(u_n = \frac{nx^{n-1}}{1+2nx^{2n-1}}\right).$

Определение. ***Последовательностью функций называется совокупность бесконечного множества следующих друг за другом функций***

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_n, \ldots,$$

заданных при помощи какого-нибудь правила, определяющего u_n как функцию натурального числа n.

Если из последовательности выделить какое угодно число членов, идущих последовательно друг за другом, то получится конечная последовательность.

§ 2. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. ***Последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением одного и того же числа или одного и того же выражения, называется арифметической прогрессией.***

Это прибавляемое число или выражение называется разностью прогрессии. Разность прогрессии может быть числом положительным, отрицательным и нулем.

Чтобы определить разность данной арифметической прогрессии, достаточно, например, из второго члена вычесть первый.

Если разность арифметической прогрессии положительна, прогрессия называется возрастающей, если отрицательна — убывающей.

Если разность равна нулю, то арифметическая прогрессия будет и невозрастающей и неубывающей, т. е. получится последовательность одинаковых членов.

Примеры:

Последовательность

$$5;\ 8;\ 11;\ 14; \ldots$$

есть возрастающая арифметическая прогрессия, первый член которой равен 5, а разность равна 3.

Последовательность

$$10;\ 7;\ 4;\ 1;\ -2;\ -5; \ldots$$

есть убывающая арифметическая прогрессия, первый член которой равен 10, а разность равна —3.

Последовательность

$$1;\ 1;\ 1;\ 1; \ldots$$

есть арифметическая прогрессия, первый член которой равен 1, а разность равна 0.

Последовательность

$$x;\ x+\frac{1}{x};\ x+\frac{2}{x};\ x+\frac{3}{x}; \ldots$$

есть арифметическая прогрессия, первый член которой равен x, а разность равна $\frac{1}{x}$.

Если первый член арифметической прогрессии обозначить буквой a, а разность буквой d, то получим арифметическую прогрессию, записанную в общем виде:

$$a;\ a+d;\ a+2d;\ a+3d;\ \ldots;\ \underbrace{a+9d}_{\text{10-й член}};\ldots;\ \underbrace{a+(k-1)\,d}_{k\text{-й член}};\ldots$$

Обозначив k-й член арифметической прогрессии u_k, получим:

$$u_k=a+(k-1)\,d,$$

т. е. ***любой член арифметической прогрессии равен первому члену плюс произведение разности прогрессии на число членов, предшествующих определяемому.***

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

Предварительно докажем одно простое свойство арифметической прогрессии с конечным числом членов. Такую прогрессию в общем виде можно записать так:

$$a;\ a+d;\ a+2d;\ldots;\ a+(n-3)\,d;\ a+(a-2)\,d;\ a+(n-1)\,d.$$

Первый член этой прогрессии $u_1=a$.
Второй » » » $u_2=a+d$.
Третий » » » $u_3=a+2d$.
Четвертый » » » $u_4=a+3d$.
. . . .
k-й » » » $u_k=a+(k-1)\,d$.
. . . .
n-й » » » $u_n=a+(n-1)\,d$.
Второй член этой прогрессии **от конца** $v_2=a+(n-2)\,d$.
Третий » » » $v_3=a+(n-3)\,d$.
Четвертый » » » $v_4=a+(n-4)\,d$.
. . . .
k-й » » » $v_k=a+(n-k)\,d$.

Рассмотрим сумму членов, равноудаленных от начала и конца:

$$u_2+v_2=(a+d)+[a+(n-2)\ d]=a+[a+(n-1)\ d]=u_1+u_n.$$
$$u_3+v_3=(a+2d)+[a+(n-3)\ d]=a+[a+(n-1)\ d]=u_1+u_n.$$
. . . .
$$u_k+v_k=[a+(k-1)\ d]+[a+(n-k)\ d]=a+[a+(n-1)\ d]=$$
$$=u_1+u_n.$$

Оказалось, что ***сумма двух членов конечной арифметической прогрессии, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов.***

Обозначим буквой S_n сумму первых n членов арифметической прогрессии

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \dots u_n \dots .$$

Тогда

$$S_n = u_1 + u_2 + n_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

и

$$S_n = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \dots + u_3 + u_2 + u_1.$$

Складывая, получим:

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \dots + (u_{n-2} + u_3) + \\ + (u_{n-1} + u_n) + (u_n + u_1).$$

В каждой из n скобок мы имеем либо сумму крайних членов, либо сумму двух членов, равноотстоящих от крайних, а потому

$$2S_n = (u_1 + u_n)\, n,$$

отсюда

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)\, n}{2},$$

т. е. ***сумма членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов.***

Замечание 1. Для конечной арифметической прогрессии справедливы, как мы уже видели, следующие две формулы:

$$\begin{cases} u_n = a + (n-1)\, d, \\ S_n = \dfrac{(a + u_n)\, n}{2}. \end{cases}$$

Здесь a — первый член прогрессии, u_n — последний член, n — число членов, d — разность и S_n — сумма всех членов прогрессии.

Зная любые три величины, входящие в эти две формулы, можно найти значения двух остальных.

Следовательно, конечная арифметическая прогрессия становится определенной лишь в том случае, когда даны значения каких-либо ее трех элементов или даны какие-либо три условия, связывающие те или иные ее элементы.

Замечание 2. Пользуясь формулой

$$u_n = a + (n-1)\, d,$$

можно записать формулу для S_n еще и так:

$$S_n = \frac{[2a + (n-1)\, d]\, n}{2}.$$

Примеры:

1. Найти сумму всех нечетных чисел от 1 до $2k+1$ включительно.

Здесь мы имеем конечную арифметическую прогрессию, первый член которой равен 1, последний член равен $2k+1$ и разность равна 2. Искомую сумму

$$1+3+5+7+\ldots+(2k+1)$$

обозначим буквой x.

Применяя формулу

$$u_n=a+(n-1)d$$

к нашей прогрессии, получим:

$$2k+1=1+(n-1)2.$$

Отсюда находим неизвестное n, т. е. число членов нашей прогрессии:

$$n=k+1.$$

Применяя формулу

$$S_n=\frac{(u_1+u_n)n}{2},$$

получим

$$x=\frac{[1+(2k+1)]\,(k+1)}{2},$$

или

$$x=(k+1)^2.$$

2. Найти сумму квадратов всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. сумму $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(n-1)^2+$ $+n^2$.

В формуле

$$(q+1)^3=q^3+3q^2+3q+1$$

положим q последовательно равным 1, 2, 3, ..., $(n-1)$, n.

Получим n равенств:

$$\begin{aligned}
2^3&=1^3+3\cdot1^2+3\cdot1+1,\\
3^3&=2^3+3\cdot2^2+3\cdot2+1,\\
4^3&=3^3+3\cdot3^2+3\cdot3+1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
n^3&=(n-1)^3+3(n-1)^2+3(n-1)+1,\\
(n+1)^3&=n^3+3n^2+3n+1.
\end{aligned}$$

Складывая по столбцам, получим:

$$2^3+3^3+\ldots+n^3+(n+1)^3=1^3+2^3+3^3+\ldots$$
$$\ldots+n^3+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+3+\ldots+n)+n.$$

Опустив одинаковые члены 2^3, 3^3, $4^3, \ldots,$ n^3, стоящие в левой и правой частях равенства, обозначив сумму $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ буквой x и заменив, наконец, сумму $1+2+3+\ldots+n$ выражением $\frac{(1+n)n}{2}$, получим, что

$$(n+1)^3 = 1 + 3x + 3\frac{(1+n)n}{2} + n.$$

Отсюда

$$3x = (n+1)^3 - 3\frac{(1+n)n}{2} - (n+1),$$

или

$$3x = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right],$$

или

$$3x = (n+1)\frac{2n^2+n}{2},$$

или, наконец,

$$x = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Упражнение. Пользуясь формулой

$$(q+1)^4 = q^4 + 4q^3 + 6q^2 + 4q + 1,$$

показать, что

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Определение. ***Последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением на одно и то же число или выражение, называется геометрической прогрессией.***

Множитель, на который умножается любой член геометрической прогрессии для получения следующего за ним члена, называется знаменателем геометрической прогрессии.

Примеры:

1. Последовательность

$$3;\ -6;\ 12;\ -24;\ 48;\ -96; \ldots$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем -2.

2. Последовательность

$$1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \ldots$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем $-\frac{1}{2}$.

3. Последовательность

$$\sqrt{3};\ 1;\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3\sqrt{3}};\ \ldots$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

4. Последовательность

$$(x^2-2);\ (x^2-2)^2;\ (x^2-2)^3;\ \ldots$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем x^2-2.

5. Последовательность

$$1;\ 1;\ 1;\ 1;\ldots$$

можно рассматривать как геометрическую прогрессию со знаменателем, равным единице.

6. Последовательность

$$1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ldots$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем, равным -1.

7. Последовательность

$$7;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0;\ldots$$

есть геометрическая прогрессия со знаменателем, равным нулю.

Если первый член геометрической прогрессии обозначить буквой a, а знаменатель буквой q, то получим геометрическую прогрессию, записанную в общем виде:

$$a;\ aq;\ aq^2;\ aq^3,\ldots,\underbrace{aq^9,\ldots}_{\text{10-й член}},\ \underbrace{aq^{k-1},\ldots}_{k\text{-й член}}.$$

Обозначив k-й член геометрической прогрессии ω_k, получим:

$$\omega_k = aq^{k-1},$$

т. е. ***любой член геометрической прогрессии равен первому члену, умноженному на степень знаменателя с показателем, равным числу членов, предшествующих определяемому.***

Сумма первых n членов геометрической прогрессии

Обозначим буквой S_n сумму первых n членов прогрессии

$$a;\ aq;\ aq^2,\ldots,\ aq^{k-2},\ aq^{k-1},\ldots.$$

Тогда получим

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-2} + aq^{n-1},$$

или

$$S_n = a + q(a + aq + \ldots + aq^{n-2}).$$

Сумма $a+aq+\ldots+aq^{n-2}$ представляет собой сумму первых n членов прогрессии без n-го члена. Поэтому

$$S_n=a+q\,(S_n-aq^{n-1}),$$

или

$$S_n-S_nq=a-aq^n.$$

Отсюда

$$S_n=\frac{a\,(1-q^n)}{1-q}.$$

Здесь предполагается, что $q\neq 1$.

Пользуясь формулой

$$\omega_n=aq^{n-1},$$

можно записать формулу для S_n еще и так:

$$S_n=\frac{a-\omega_n q}{1-q}.$$

Замечания.

1. Для конечной геометрической прогрессии справедливы, как мы уже видели, следующие две формулы:

$$\begin{cases} \omega_n=aq^{n-1}; \\ S_n=\dfrac{a-\omega_n q}{1-q}. \end{cases}$$

Здесь a — первый член прогрессии, ω_n — последний член, n — число членов, q — знаменатель и S_n — сумма всех n членов прогрессии.

Зная любые три величины, входящие в эти формулы, можно найти значения двух остальных. Следовательно, конечная геометрическая прогрессия становится определенной лишь в том случае, когда даны значения каких-либо ее трех элементов или даны какие-либо три условия, связывающие те или иные ее элементы.

2. В том случае, когда знаменатель q прогрессии равен единице, нельзя пользоваться формулой

$$S_n=\frac{a\,(1-q^n)}{1-q},$$

или формулой

$$S_n=\frac{a-\omega_n q}{1-q},$$

так как в правых частях этих формул получатся выражения $\frac{0}{0}$, не имеющие смысла.

Когда $q=1$, прогрессия имеет вид:

$$a;\ a;\ a;\ldots\ a,$$

а поэтому

$$S_n=na.$$

П р и м е р ы и з а д а ч и:

1. Найти сумму

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Р е ш е н и е.

$$S_n=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. Найти сумму

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}.$$

Р е ш е н и е.

$$S_n=\frac{1-q^{n-1}\cdot q}{1-q}=\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Пользуясь полученным результатом, заметим, что для всякого целого положительного числа m справедливо равенство

$$\frac{1-x^m}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{m-1}.$$

(Здесь $x\neq 1$.)

3. Четыре числа составляют геометрическую прогрессию. Если к каждому из них прибавить соответственно 1; 1; 4 и 13, то образуется арифметическая прогрессия. Найти эти числа.

Р е ш е н и е.

Искомые 4 числа можно обозначить соответственно через a; aq; aq^2; aq^3, так как они составляют геометрическую прогрессию.

По условию задачи числа

$$a+1;\ aq+1;\ aq^2+4;\ aq^3+13$$

составляют арифметическую прогрессию. Но во всякой арифметической прогрессии разность между любым членом и членом, ему предшествующим, одинакова для любой пары рядом стоящих членов. Поэтому

$$\begin{cases}(aq^2+4)-(aq+1)=(aq+1)-(a+1),\\(aq^3+13)-(aq^2+4)=(aq^2+4)-(aq+1),\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}aq^2-aq+3=aq-a,\\aq^3-aq^2+9=aq^2-aq+3,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}aq^2-2aq+a+3=0,\\aq^3-2aq^2+aq+6=0,\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}a(q-1)^2+3=0,\\aq(q-1)^2+6=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $a(q-1)^2=-3$. Подставив во второе уравнение число -3 вместо $a(q-1)^2$, получим, что $-3q+6=0$.
Отсюда
$$q=2.$$
Зная, что $q=2$, из уравнения $a(q-1)^2+3=0$ найдем, что
$$a=-3.$$
Значит, искомыми четырьмя числами будут:
$$-3;\quad -6;\quad -12;\quad -24.$$

4. Разложить на целые множители разность:
$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n.$$
Решение.
$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2-x^n=$$
$$=\frac{(1-x^{n+1})^2-x^n(1-x)^2}{(1-x)^2}=\frac{1-2x^{n+1}+x^{2n+2}-x^n+2x^{n+1}-x^{n+2}}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{1-x^n-x^{n+2}+x^{2n+2}}{(1-x)^2}=\frac{(1-x^n)-x^{n+2}(1-x^n)}{(1-x)^2}=$$
$$=\frac{(1-x^n)(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}=\frac{1-x^n}{1-x}\cdot\frac{1-x^{n+2}}{1-x}=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1}).$$

Последние два множителя мы получили, пользуясь выведенной на предыдущей странице формулой
$$\frac{1-x^m}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{m-1}.$$

Итак, доказано следующее тождество:
$$(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2-x^n=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})\cdot(1+x+x^2+\ldots+x^{n+1}).$$

При доказательстве этого тождества мы обязаны были сделать оговорку, что $x\neq 1$. Однако полученное тождество справедливо и при $x=1$. Действительно, при $x=1$ это тождество принимает вид:
$$(n+1)^2-1=n(n+2).$$
Но последнее равенство, как легко убедиться, является справедливым.

5. Доказать, что квадрат произведения первых n членов геометрической прогрессии равен n-й степени произведения крайних членов.

Доказательство.

$$(a\cdot aq\cdot aq^2\ldots aq^{n-2}aq^{n-1})^2=[a^n\cdot q^{1+2+3+\ldots+(n-1)}]^2=$$
$$=[a^n\cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}]^2=a^{2n}\cdot q^{n(n-1)}=(a^2)^n\cdot(q^{n-1})^n=(a^2\cdot q^{n-1})^n=$$
$$=(a\cdot aq^{n-1})^n=(\omega_1\cdot\omega_n)^n.$$

Буквой ω_1 обозначен, как и раньше, первый член прогрессии, а буквой ω_n n-й член.

Теорема доказана.

6. Найти произведение первых n членов геометрической прогрессии

$$\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots,$$

если известно, что их сумма равна A, а сумма чисел, обратных первым n членам прогрессии, равна B.

Решение.

По условию задачи

$$\omega_1+\omega_2+\omega_3+\ldots+\omega_n=A$$

и

$$\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_3}+\ldots+\frac{1}{\omega_n}=B.$$

Если знаменатель данной прогрессии обозначить буквой q, то знаменатель прогрессии

$$\frac{1}{\omega_1},\ \frac{1}{\omega_2},\ \frac{1}{\omega_3},\ \ldots,\ \frac{1}{\omega_n},\ \ldots$$

будет $\frac{1}{q}$.

Пользуясь формулой суммы членов геометрической прогрессии, получим:

$$A=\frac{\omega_1-\omega_nq}{1-q}.$$

$$B=\frac{\frac{1}{\omega_1}-\frac{1}{\omega_n}\cdot\frac{1}{q}}{1-\frac{1}{q}}=\frac{\frac{\omega_nq-\omega_1}{\omega_1\omega_nq}}{\frac{q-1}{q}}=\frac{\omega_nq-\omega_1}{\omega_1\omega_n(q-1)}=\frac{\omega_1-\omega_nq}{1-q}\cdot\frac{1}{\omega_1\omega_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{A}{B}=\omega_1\omega_n.$$

Но, с другой стороны,

$$(\omega_1\omega_2\ \ldots\ \omega_n)^2=(\omega_1\omega_n)^n$$

(см. предыдущий пример). Отсюда $\omega_1\omega_2\ \ldots\ \omega_n=\sqrt{(\omega_1\omega_n)^n}$. Зная, что $\omega_1\omega_n=\frac{A}{B}$, получим окончательный ответ:

$$\omega_1\omega_2\ \ldots\ \omega_n=\sqrt{\left(\frac{A}{B}\right)^n}.$$

§ 4. ПОНЯТИЕ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ

Приведем несколько примеров числовых последовательностей:

1. $1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots$ $\left(\text{здесь } x_n=\frac{1}{n}\right)$;
2. $-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots$ $\left(\text{здесь } x_n=\frac{(-1)^n}{n}\right)$;
3. $\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{3\cdot 4};\ \frac{1}{4\cdot 5};\ \ldots$ $\left(\text{здесь } x_n=\frac{1}{n(n+1)}\right)$;
4. $\frac{2}{3};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{5};\ \frac{5}{6};\ \ldots$ $\left(\text{здесь } x_n=\frac{n+1}{n+2}\right)$;
5. $\frac{5}{8};\ \frac{15}{16};\ \frac{31}{26};\ \frac{53}{38};\ \ldots$ $\left(\text{здесь } x_n=\frac{3n^2+n+1}{n^2+5n+2}\right)$;
6. $\frac{3}{\sqrt{3}};\ \frac{5}{\sqrt{7}};\ \frac{7}{\sqrt{13}};\ \frac{9}{\sqrt{21}};\ \ldots$ $\left(\text{здесь } x_n=\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)$.

Определение. ***Пределом последовательности***

$$x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots,\ x_n\ \ldots$$

называется предел n-го члена последовательности при условии, что $n \to +\infty$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Пределами первых трех приведенных выше последовательностей будут нули.

Предел 4-й последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=1.$$

Предел 5-й последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+1}{n^2+5n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}=3.$$

Предел 6-й последовательности

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=2.$$

Замечание. Когда мы говорим, что предел последовательности

$$x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n;\ \ldots$$

равен числу a, то это означает следующее.

Для всякого наперед заданного положительного числа ε можно указать такое натуральное число N, что при всяком значении n, большем, чем N, разность $x_n - a$ станет по абсолютной величине меньше, чем ε, сколь бы малым ни было число ε, т. е. при всяком $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Существуют последовательности, не имеющие предела, например такие две последовательности:

1) $1;\ 2;\ 3;\ 4;\ \ldots;\ n;\ \ldots,$

2) $1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ \ldots.$

У первой последовательности $x_n = n$. Эта последовательность не имеет предела, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

У второй последовательности $x_n = (-1)^{n-1}$. Эта последовательность также не имеет предела, так как $\lim x_n$ не существует (x_n принимает попеременно значения то 1, то -1, а потому ни к какому пределу не стремится).

УПРАЖНЕНИЯ

226. Показать, что каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое двух членов, равноотстоящих от него. (Число x называется средним арифметическим двух чисел a и b, если $a - x = x - b$, или $x = \frac{a+b}{2}$.)

Указание. Доказать, что $a_m = \frac{a_{m-k} + a_{m+k}}{2}$, где a_{m-k}, a_m, a_{m+k} суть члены прогрессии.

227. Найти первый член и разность возрастающей арифметической прогрессии, у которой сумма первых трех членов равна 24, а их произведение равно 440. Отв. $a = 5$, $d = 3$.

228. Найти сумму всех двузначных чисел, кратных трем. Отв. 1665.

229. Найти сумму всех трехзначных чисел, не делящихся ни на 5, ни на 7. Отв. 339 769.

230. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, если сумма трех первых ее членов равна 168, а сумма 4, 5 и 6-го членов равна 21. Отв. $a = 96$, $q = \frac{1}{2}$.

231. Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Показать, что любой член этой прогрессии, начиная со второго, равен разности двух соседних с ним членов.

232. Доказать неравенство

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n < \frac{1}{1-q}$$

при условии, что $0 < q < 1$.

ГЛАВА XXIV

РЯДЫ СХОДЯЩИЕСЯ И РАСХОДЯЩИЕСЯ

§ 1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ВОЗНИКНОВЕНИЮ ПОНЯТИЯ РЯДА

Понятие ряда возникает при рассмотрении очень многих важных вопросов.

Примеры:

1. Выяснение смысла бесконечной периодической десятичной дроби, например,

$$0{,}23\ 23\ 23\ \ldots$$

сводится к выяснению смысла следующего выражения:

$$\frac{23}{100}+\frac{23}{10\,000}+\frac{23}{1\,000\,000}+\ldots,$$

имеющего вид бесконечной последовательности слагаемых.

2. Число $\frac{\pi}{4}$, как это доказывается в курсе высшей математики, может быть изображено выражением

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\ldots$$

3. Если пересечь плоскостью поверхность прямого круглого конуса так, чтобы образовалась замкнутая линия, то получим кривую линию, называемую эллипсом (рис. 128).

Пусть имеется эллипс с размерами, указанными на рисунке 129.

$$OA=5;\ OB=3.$$

Точная длина l этого эллипса изобразится, как это доказывается в высшей математике, так:

$$l=10\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^4\cdot\frac{1}{3}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6\cdot\frac{1}{3^2}-\ldots\right].$$

В квадратных скобках содержится опять же выражение, имеющее вид бесконечной последовательности слагаемых.

Чем больше членов мы будем брать внутри квадратных скобок, тем точнее будем находить значение l (длины эллипса).

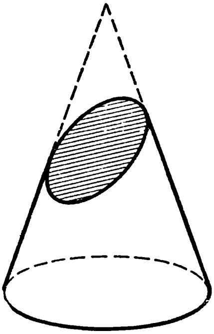


Рис. 128.

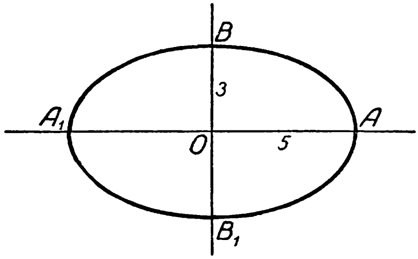


Рис. 129.

4. Если считать x радианной мерой угла, то, как доказывается в курсе высшей математики, точное выражение $\sin x$ может быть представлено так:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \ldots .$$

Эти примеры показывают, что изучение выражений, имеющих вид суммы бесконечной последовательности слагаемых, необходимо и полезно.

§ 2. ПОНЯТИЕ РЯДА

Определение. ***Выражение***

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

в котором $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n \ldots$ ***являются членами последовательности, называется рядом.***

u_1	называется	первым	членом ряда
u_2	»	вторым	»
. . .	. . .	. . .	. . .
u_n	»	n-м	»
. . .	. . .	. . .	. . .

n-й член ряда, т. е. u_n, называется общим членом ряда.

Ряд содержит бесконечно много членов. Поэтому в нем не может быть члена, который можно было бы назвать последним.

Сумма первых n членов ряда называется его частной суммой порядка n и обозначается символом S_n. Эту сумму S_n будем называть для краткости усеченной суммой ряда.

Значит,

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S — определенное число, то ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется сходящимся, а число S называется суммой этого ряда.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется расходящимся. В этом случае говорят, что ряд не имеет суммы.

Итак, ***суммой сходящегося ряда называется предел суммы первых n его членов при n, стремящемся к бесконечности.***

Было бы неправильно называть суммой ряда сумму всех его членов, так как этих членов имеется бесконечно много. Подсчитать же сумму, в которой бесконечно много слагаемых, невозможно. Поэтому фраза «сумма всех членов ряда» является бессмысленной.

§ 3. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1. Найти сумму ряда:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \ldots .$$

Сначала найдем усеченную сумму этого ряда:

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} + \ldots + \frac{1}{(3n-5)(3n-2)} + \\ + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

Каждое слагаемое данной суммы можно представить в новой форме:

$$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right); \quad \frac{1}{4\cdot 7} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right);$$

$$\frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right); \quad \frac{1}{10\cdot 13} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{13}\right);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(3n-5)(3n-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}\right);$$

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Благодаря этому наша усеченная сумма примет вид:

$$S_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{10} - \frac{1}{13}\right) + \\ + \ldots + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n-2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right),$$

или

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}.$$

Сумма S данного ряда определяется так:

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

Итак, данный ряд является сходящимся и имеет сумму, равную $\frac{1}{3}$.

2. Найти сумму ряда

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots.$$

Сначала найдем усеченную сумму этого ряда:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Пользуясь формулой суммы членов конечной геометрической прогрессии, получим;

$$S_n=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Сумма S данного ряда определяется формулой

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=2.$$

Итак, данный ряд является сходящимся и имеет сумму, равную 2.

§ 4. БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И ЕЕ СУММА

Определение. ***Бесконечную геометрическую прогрессию мы называем бесконечно убывающей, если ее знаменатель по абсолютной величине меньше* 1.**

Рассмотрим ряд

$$a+aq+aq^2+aq^3+\ldots+aq^{n-1}+\ldots,$$

в котором $|q|<1$.

В этом ряду члены идут по закону геометрической прогрессии со знаменателем q.

Докажем, что такой ряд всегда сходится и имеет сумму S, определяемую формулой

$$S=\frac{a}{1-q}.$$

Сначала найдем усеченную сумму данного ряда:

$$S_n=a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1}.$$

Пользуясь формулой суммы членов конечной геометрической прогрессии, получим:

$$S_n = \frac{a - aq^{n-1} \cdot q}{1-q},$$

или

$$S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

Сумма S данного ряда определяется так:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot q^n\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $|q| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \qquad \text{(см. стр. 399).}$$

Итак, данный ряд сходится и имеет сумму, равную $\frac{a}{1-q}$.

Сумму ряда

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots,$$

в котором $|q| < 1$ называют ради краткости «суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии».

Обратите внимание на то, что было бы неправильно сказать: «сумма членов бесконечно убывающей прогрессии».

Итак, ***сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна первому члену, деленному на разность между единицей и знаменателем прогрессии,*** т. е.

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

Пример 1. Найти сумму ряда:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}} + \ldots.$$

Здесь

$$a = 1 \text{ и } q = -\frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

Пример 2. Чистую периодическую дробь 0, (13) обратить в обыкновенную.

$$0,(13) = 0{,}13131313\ldots = \frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + \frac{13}{1000000} + \ldots.$$

Здесь $a=\frac{13}{100}$ и $q=\frac{1}{100}$. Поэтому

$$0,(13)=\frac{\frac{13}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{13}{99}.$$

Пример 3. Смешанную периодическую дробь 0,3 (8) обратить в обыкновенную.

$$0,3\,(8)=0,38888\ \ldots=\frac{3}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\ldots=$$

$$=\frac{3}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10000}+\ldots=\frac{3}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{10}+\frac{8}{90}=\frac{35}{90}=\frac{7}{18}.$$

Пример 4. Найти сумму ряда:

$$1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)\,x^{n-2}+nx^{n-1}+\ldots,$$

где $|x|<1$.

Усеченная сумма S_n этого ряда, т. е. сумма его n первых членов, представится так:

$$S_n=1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)\,x^{n-2}+nx^{n-1}.$$

Преобразуем эту сумму следующим образом:

$$S_n=1+x+x^2+\ldots+x^{n-2}+x^{n-1}+x+2x^2+\ldots+$$
$$+(n-2)\,x^{n-2}+(n-1)\,x^{n-1}=$$
$$=(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})+x\,[1+2x+3x^2+\ldots+(n-1)\,x^{n-2}]=$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}+x\,[S_n-nx^{n-1}].$$

Отсюда

$$S_n-xS_n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n,$$

или

$$S_n=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x}.$$

Примем к сведению без доказательства, что при $|x|<1$ $\lim\limits_{n\to\infty} nx^n=0$.

Тогда получим, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Итак, сумма данного ряда равна $\frac{1}{(1-x)^2}$.

При x, равном, например, $\frac{1}{3}$, эта сумма равна 2,25.

§ 5. ПРИМЕРЫ РАСХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1. Ряд $1+1+1+\ldots+1+\ldots$ расходящийся, так как

$$S_n=n \text{ и } \lim_{n\to\infty} S_n=\infty.$$

2. Ряд $1-1+1-1+1-1+\ldots$ расходящийся, так как S_n равно 1 при нечетных значениях n и равно нулю при четных значениях n. Поэтому величина S_n при неограниченном возрастании натурального числа n попеременно принимает значения, равные то единице, то нулю, а поэтому ни к какому пределу не стремится.

Значит, данный ряд является расходящимся.

3. Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

является расходящимся.

Доказательство:

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{n}>$$
$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+$$
$$+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{n}=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Если n взять достаточно большим, то число слагаемых, равных $\frac{1}{2}$, может стать сколь угодно большим. Поэтому при неограниченном возрастании числа n величина S_n также будет неограниченно возрастать, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$. Значит, данный ряд является расходящимся.

УПРАЖНЕНИЯ

233. Найти бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, если ее сумма равна $\frac{2}{3}$, а сумма ее первых четырех членов составляет $\frac{5}{8}$.

234. Можно ли из чисел

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots$$

выбрать бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{1}{5}$?

235. П а р а д о к с. Рассмотрим ряд $S = a - a + a - a + \ldots$. Сгруппировав члены по два, получим, что

$$S = (a - a) + (a - a) + \ldots = 0 + 0 + 0 \ldots .$$

Оказалось, что $S = 0$.

Теперь, оставляя первый член в отдельности, сгруппируем по два остальные. Тогда получим:

$$S = a - (a - a) - (a - a) - (a - a) - \ldots =$$
$$= a - 0 - 0 - 0 - \ldots = a.$$

Оказалось, $S = a$.
Перепишем наш ряд еще так: $S = a - (a - a + a - a + a - a + \ldots)$.

Тогда окажется, что $S = a - S$. Отсюда $2S = a$, или $S = \frac{a}{2}$.

Итак, оказалось, что одна и та же сумма S имеет различные значения: 0; a и $\frac{a}{2}$.

Чем объяснить этот парадокс?

ГЛАВА XXV

ОБОБЩЕННАЯ СТЕПЕНЬ, ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОБОБЩЕННАЯ СТЕПЕНЬ

Выражение a^n при первом его появлении имело смысл лишь при целом положительном значении буквы n. Например, под a^3 мы понимали произведение $a \cdot a \cdot a$. Все действия над выражениями вида a^n были выведены в предположении, что показатели степеней — целые положительные числа (см. стр. 50 и 96).

Далее в § 7 гл. V мы приняли следующие определения:

1. Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

2) Если $a \neq 0$ и q — целое положительное число, то

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

Там же было показано, что все действия над выражениями вида

$$a^0 \text{ и } a^{-q},$$

где q — целое положительное число, можно выполнять по тем же правилам, какие были установлены для выражения вида

$$a^n,$$

где n — целое положительное число.

Таким образом, выражение a^n стало иметь смысл степени и тогда, когда n — нуль или целое отрицательное число.

Теперь примем еще одно определение.

Под выражением $a^{\frac{p}{q}}$, где $a > 0$ и числа p и q натуральные, условимся понимать арифметическое значение следующего корня $\sqrt[q]{a^p}$.

Например, $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$;

$125^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{125^2} = \sqrt[3]{5^6} = 5^2 = 25.$

Таким образом, выражение a^n стало иметь смысл и тогда, когда n есть дробное положительное число.

Легко убедиться в том, что действия над выражениями вида $a^{\frac{p}{q}}$ можно производить также по тем правилам, которые были установлены для степеней, имеющих целые показатели.

Действительно,

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{np}} \cdot \sqrt[nq]{a^{mq}} = \sqrt[nq]{a^{np+mq}} =$$
$$= a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}},$$

т. е. ***при умножении степеней с дробными показателями можно применять то же правило, что и для умножения степеней, имеющих целые показатели.***

Также можно убедиться в том, что

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}; \qquad \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{nq}};$$

$$(ab)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} \text{ и т. д.}$$

Примем по определению, что

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \text{ и что } \sqrt[-m]{A} = \frac{1}{\sqrt[m]{A}}.$$

Теперь рассмотрим выражение a^{α}, где $a > 0$ и α есть число иррациональное.

Чтобы сделать изложение более наглядным, примем $a = 2$ и $\alpha = \sqrt{2}$.

Составим последовательность

$$2^{1,4};\quad 2^{1,41};\quad 2^{1,414},\ \ldots,$$

которую можно записать так:

$$\sqrt[10]{2^{14}};\quad \sqrt[100]{2^{141}};\quad \sqrt[1000]{2^{1414}};\ \ldots.$$

Эта возрастающая последовательность ограничена сверху (например, числом 2^2). По признаку Вейерштрасса (см. стр. 389) она имеет предел, который мы и принимаем за значение выражения

$$2^{\sqrt{2}}.$$

Итак, мы можем сделать следующие заключения.

Выражение a^n, где $a > 0$, имеет смысл степени при всяком действительном значении n.

Выражение a^n при всяком действительном значении n будем называть обобщенной степенью.

Для обобщенных степеней справедливы правила, установленные ранее для степеней с натуральными показателями.

Примеры:

1) $2^0 = 1$; $(-\sqrt{2})^0 = 1$; $(0,1)^0 = 1$ (напоминаем, что выражение 0^0 смысла не имеет).

2) $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; $(-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9}$; $(-1)^{-4}=\frac{1}{(-1)^4}=1$;

$(-1)^{-5}=\frac{1}{(-1)^5}=-1$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{1}{-\frac{1}{8}}=-8.$

$10^{-5}=\frac{1}{10^5}=0{,}00001$;

$\sqrt[-2]{25}=\frac{1}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$; $a^{\sqrt{2}}\cdot a^{\sqrt{3}}=a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{8}}=a^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=a^4.$

3) $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=4$; $125^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{125^{\frac{2}{3}}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{125^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{(5^3)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{5^6}}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25};$$

$$\sqrt[-4]{81}=\frac{1}{\sqrt[4]{81}}=\frac{1}{3};$$

$$a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=a^{\frac{13}{12}}=\sqrt[12]{a^{13}}=a\sqrt[12]{a};$$

$$a^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a};$$

$$\sqrt[p]{a^q}=a^{\frac{q}{p}};\quad \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{6}};$$

$$\sqrt[3]{a\sqrt{a}}=\sqrt[3]{a\cdot a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}}=a^{\frac{3}{2}:3}=a^{\frac{1}{2}};$$

$$\frac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a}}}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{1}{4}}\cdot a^{\frac{1}{16}}\cdot a^{\frac{1}{64}}}=\frac{a^{\frac{7}{8}}}{a^{\frac{21}{64}}}=a^{\frac{7}{8}-\frac{21}{64}}=a^{\frac{35}{64}};$$

$$(x+y-z)^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{(x+y-z)^3}.$$

4) $(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})=(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2=a-b$;

$$(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})^2=a+2\sqrt{ab}+b;$$

$$a+b=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}});$$

$$\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}-\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}-\frac{(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})-(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=$$

$$=-2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}=-2\sqrt[3]{ab}.$$

§ 2. ИЗМЕРЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА И ОДНОРОДНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Измерение одночлена

Пусть имеется произведение степеней каких-либо букв с числовым коэффициентом, который может быть и единицей, но не нулем.

Тогда ***измерением такого произведения (или одночлена) называется сумма показателей степеней всех входящих в это произведение букв.***

Примеры:

$4x^2y^3$ есть одночлен 5-го измерения,

$-\frac{1}{8}a^2b$ есть одночлен 3-го измерения,

a^6 есть одночлен 6-го измерения,

a есть одночлен 1-го измерения,

$abxy$ есть одночлен 4-го измерения,

$7x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ есть одночлен 1-го измерения.

Одночлен $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}$ имеет измерение, равное $\frac{1}{2}$; $\sqrt{xy}$ есть одночлен 1-го измерения, так как

$$\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

Одночлен $\sqrt[5]{x^2y}$ имеет измерение, равное $\frac{3}{5}$, так как

$$\sqrt[5]{x^2y}=\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{y}=x^{\frac{2}{5}}y^{\frac{1}{5}}.$$

Но иногда приходится рассматривать измерение одночлена не по отношению ко всем входящим в него буквам, а лишь по отношению к некоторым избранным.

Примеры:

ax^2y есть одночлен 3-го измерения относительно x и y,

$abxy$ есть одночлен 2-го измерения относительно x и y,

ax есть одночлен 1-го измерения относительно x.

Однородные многочлены

Определение. ***Многочлен называется однородным относительно каких-либо букв, если все его члены имеют одинаковое измерение относительно этих букв.***

Примеры:

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ — однородный многочлен 3-го измерения относительно a и b;

$5x^2-xy+4y^2$ — однородный многочлен 2-го измерения относительно x и y;

$ax^2+by^2+cz^2$ — однородный многочлен 2-го измерения относительно x, y и z;

$ax+by+cz$ — однородный многочлен 1-го измерения относительно x, y и z;

$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}+b^n$ — однородный многочлен n-го измерения относительно a и b.

§ 3. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Выражение 2^x есть функция независимой переменной x, так как каждому значению x соответствует определенное значение выражения 2^x.

Составим таблицу значений функции 2^x при некоторых значениях x.

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	...
2^x	...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	4	8	16	...

(А)

Если $x\to+\infty$, то $2^x\to+\infty$. Если $x\to-\infty$, то $2^x\to 0$, никогда не достигая нуля.

Ни при каком значении x функция 2^x не может принять отрицательного значения или значение, равное нулю, т. е. всегда

$$2^x>0.$$

Если $x>0$, то $2^x>1$. Если $x=0$, то $2^x=1$.
Если $x<0$, то $2^x<1$. Если $x_1>x_2$, то $2^{x_1}>2^{x_2}$.

График функции $y=2^x$ изображен на рисунке 130.

Составим таблицу значений функции $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	...	8	4	2	$\sqrt{2}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	...

(Б)

Если $x \to +\infty$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x \to 0$, никогда не достигая нуля.

Если $x \to -\infty$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x \to +\infty$.

Ни при каком значении x функция $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ не может принять отрицательного значения или обратиться в нуль, т. е. всегда

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > 0.$$

Если $x > 0$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$; если же $x < 0$, то $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 1$.

График функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ изображен на рисунке 131.

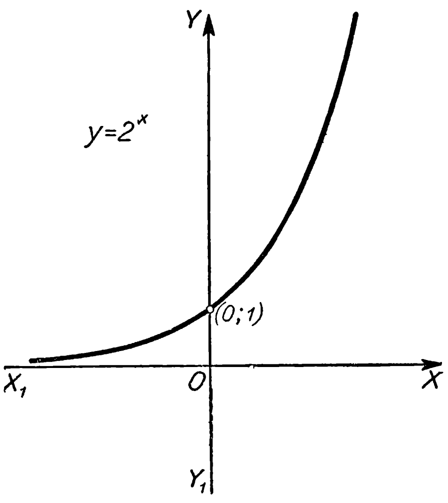


Рис. 130.

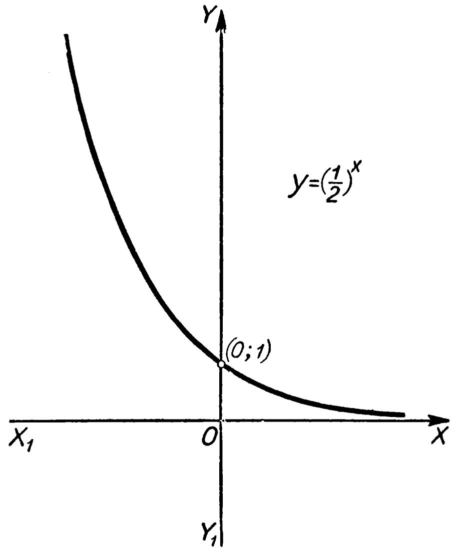


Рис. 131.

Выражение a^x, где a есть данное положительное число, а x — независимая переменная, называется показательной функцией (простейшей).

Показательными функциями являются и такие функции, как a^{2x}; $a^{\sqrt{x}}$; a^{x^2}; $a^{\sin x}$ и т. д.

Определение. ***Показательной функцией называется такая степень, основанием которой служит данное положительное число, а показателем — величина, зависящая от какого-либо аргумента,*** например от x.

Примечание. Если же основание степени зависит от какого-либо аргумента, например от x, а показатель степени — данное число, то такая степень не называется показательной функцией, а называется степенной функцией.

Например, x^8; x^a; $(2x+1)^5$ суть функции степенные, а не показательные.

Свойства показательной функции a^x при $a>1$

1. При всяком действительном значении x, $a^x>0$,
2. Если $x<0$, то $a^x<1$.
3. Если $x=0$, то $a^x=1$.
4. Если $x>0$, то $a^x>1$.
5. Если $x\to+\infty$, то $a^x\to+\infty$.
6. Если $x\to-\infty$, то $a^x\to 0$.
7. Если $x_1>x_2$, то $a^{x_1}>a^{x_2}$.

Все эти свойства легко усмотреть из таблицы (A), в которой были приведены значения показательной функции 2^x.

Не останавливаясь на доказательстве всех свойств показательной функции a^x при $a>1$, мы докажем в качестве иллюстрации, например, 4-е и 7-е свойства (свойство 5-е уже доказано на стр. 399).

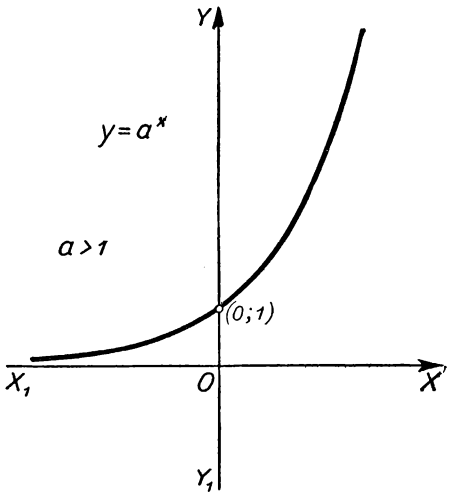


Рис. 132.

Теорема. ***Если $a>1$ и $x>0$, то $a^x>1$.***

Мы ограничимся доказательством этой теоремы лишь для рациональных значений x.

Доказательство. Пусть

$$x=\frac{p}{q},$$

где p и q — натуральные числа.

Тогда

$$a^x=a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

Так как $a>1$, то $a^p>1$ и $\sqrt[q]{a^p}>1$, т. е.

$$a^x>1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. ***Если $a>1$ и $x_1>x_2$, то $a^{x_1}>a^{x_2}$.***

Доказательство. Вынося за скобки множитель a^{x_2}, получим, что

$$a^{x_1}-a^{x_2}=a^{x_2}(a^{x_1-x_2}-1).$$

Так как $a>1$ и $x_1-x_2>0$, то по предыдущей теореме $a^{x_1-x_2}>1$, а потому разность $a^{x_1-x_2}-1$ будет числом положительным. Кроме того, a^{x_2} также есть число положительное. Отсюда следует, что $a^{x_1}-a^{x_2}>0$, т. е. что $a^{x_1}>a^{x_2}$, что и требовалось доказать.

График функции $y=a^x$ при $a>1$ изображен на рисунке 132.

Описание графика функции $y=a^x$ *при* $a>1$

1. Весь график лежит в верхней полуплоскости и состоит из одной ветви, простирающейся бесконечно вверх и вправо.

2. Слева график неограниченно приближается к оси X_1X, никогда ее не достигая, а справа круто поднимается вверх.

3. При всяком значении буквы a график проходит через точку (0; 1).

4. Всякая прямая, параллельная оси OY, пересекает график и притом только в одной точке.

5. Всякая прямая, параллельная оси X_1X, расположенная в верхней полуплоскости, пересекает график и притом только в одной точке.

6. Из двух точек графика выше расположена та, которая лежит правее.

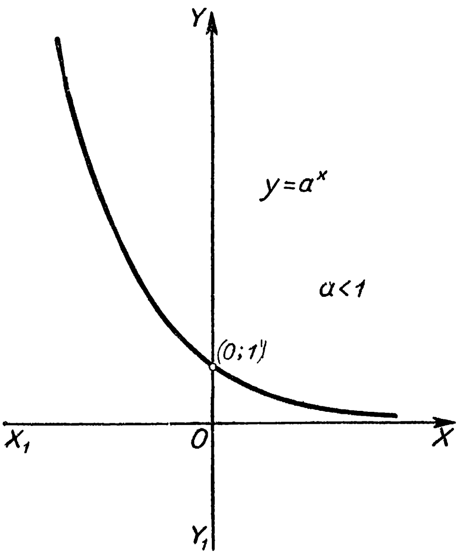


Рис. 133.

Свойства показательной функции a^x *при* $0<a<1$

Выражение a^x является положительным числом при всяком действительном значении x. Если $x>0$, то $a^x<1$. Если же $x=0$, то $a^x=1$. Если $x<0$, то $a^x>1$. Если $x\to+\infty$, то $a^x\to 0$. Если $x\to-\infty$, то $a^x\to+\infty$. Если $x_1>x_2$, то $a^{x_1}<a^{x_2}$.

Все эти свойства легко усмотреть из таблицы (Б), в которой были приведены значения показательной функции $\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Свойства функции a^x при $a<1$ вытекают из свойств функции a^x при $a>1$, как их следствия.

Докажем, например, 7-е свойство. Пусть $0<a<1$ и $x_1>x_2$. Положим, что $b=\frac{1}{a}$; тогда будет $b>1$ и мы получим, что

$$b^{x_1}>b^{x_2},$$

или

$$\frac{1}{a^{x_1}} > \frac{1}{a^{x_2}}.$$

Отсюда

$$a^{x_1} < a^{x_2},$$

что и требовалось доказать.

На рисунке 133 изображен график функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$. Предлагается учащемуся дать описание этого графика самостоятельно.

§ 4. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. ***Уравнение называется показательным, если неизвестная входит в показатель степени.***

Рассмотрим простейшие приемы решения показательных уравнений на отдельных примерах.

1. Решить уравнение

$$1000^x = 100.$$

Представим левую и правую части уравнения в виде степеней, имеющих одинаковые основания:

$$10^{3x} = 10^2.$$

Отсюда $3x = 2$, или $x = \frac{2}{3}$.

Мы здесь воспользовались следующей теоремой:

Если степени равны и основания равны, положительны и отличны от единицы, то равны и их показатели степеней.

Докажем эту теорему.

Пусть $a > 1$ и $a^x = a^y$. Докажем, что в этом случае

$$x = y.$$

Допустим противное тому, что требуется доказать, т. е. допустим, что $x > y$ или что $x < y$. Тогда получим по свойству показательной функции, что либо $a^x < a^y$, либо $a^x > a^y$.

Оба эти результата противоречат условию теоремы. Следовательно, $x = y$, что и требовалось доказать.

Также доказывается теорема и для случая, когда $0 < a < 1$.

Замечание. Из равенства $0^x = 0^y$ не обязательно следует, что

$$x = y.$$

Из равенства $1^x = 1^y$ также не обязательно вытекает равенство $x = y$.

2. Решить уравнение $32^x = \frac{1}{64}$.

Преобразуя левую и правую части уравнения, получим:

$$2^{5x} = 2^{-6}, \text{ откуда } x = -\frac{6}{5}.$$

3. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{9} \cdot 9^x\right)^x = 3^{2x+6}.$$

Преобразуя левую часть уравнения, получим:

$$(9^{x-1})^x = 3^{2x+6},$$

или

$$9^{x(x-1)} = 3^{2x+6},$$

или

$$3^{2x(x-1)} = 3^{2x+6}.$$

Отсюда

$$2x(x-1) = 2x+6,$$

или

$$x(x-1) = x+3,$$

или

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -1.$$

Значит, данное показательное уравнение имеет два корня:

$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = -1.$$

4. Решить уравнение

$$4 \cdot 2^{2x} + 16 = 65 \cdot 2^x.$$

Примем за новую неизвестную выражение 2^x и обозначим это выражение буквой y. Тогда получим:

$$4y^2 + 16 = 65y.$$

Отсюда

$$y_1 = 16 \text{ и } y_2 = \frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$\text{либо } 2^x = 16, \quad \text{либо } 2^x = \frac{1}{4}.$$

Из уравнения $2^x = 16$ имеем $x = 4$.

Из уравнения $2^x = \frac{1}{4}$ имеем $x = -2$.

Итак, данное показательное уравнение имеет два корня:

4 и -2.

5. Решить уравнение $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

Снова, обозначая $3^x = y$ и решая полученное квадратное уравнение, находим:

$$y_1 = -3; \quad y_2 = 1.$$

Таким образом, получим:

$$3^x = -3 \text{ и } 3^x = 1.$$

Как было указано при исследовании показательной функции, степень 3^x ни при каком x не может быть отрицательной, следовательно, первое из полученных уравнений не имеет корней.

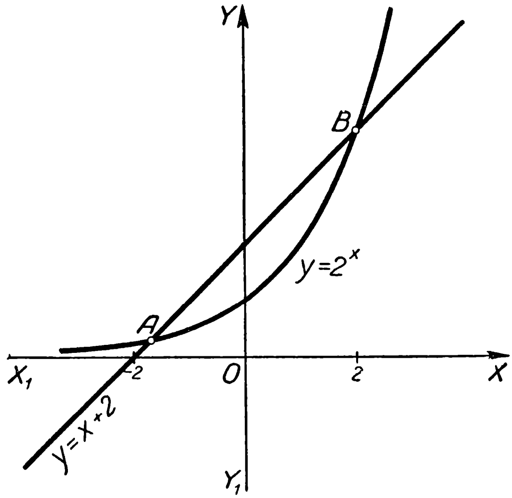


Рис. 134.

Из второго уравнения находим $x = 0$. Значит, первоначальное уравнение имеет лишь один корень, равный нулю.

6. Решить уравнение

$$2^x = x + 2.$$

Для решения этого уравнения применим графический метод. Построим на одной координатной плоскости (рис. 134) графики функций:

$$y = 2^x \text{ и } y = x + 2.$$

Тогда абсциссы точек пересечения этих линий, т. е. абсциссы точек A и B, будут корнями данного уравнения. Абсцисса точки B, равная числу 2, будет точным корнем данного уравнения, а абсцисса точки A, равная приближенно —1,7, будет его приближенным корнем. Других корней данное уравнение не имеет.

Сведения, изложенные в этой главе, окажутся полезными при изучении логарифмов, которым посвящена следующая глава.

Примем к сведению без доказательства еще следующую теорему:

Если a есть положительное число, отличное от единицы, а N — любое положительное число, то уравнение $a^x = N$ с неизвестным x имеет один и только один действительный корень (рациональный или иррациональный).

Примеры. Уравнение $2^x = 32$ имеет единственный действительный корень, равный рациональному числу 5.

Уравнение $10^x = 3$ имеет единственный действительный иррациональный корень, приближенное значение которого с точностью до 0,00001 равно 0,47712.

Итак, мы можем сделать следующие заключения:

1. Выражение a^x, где $a > 0$, имеет при каждом действительном значении x одно и только одно действительное значение.

2. Действия над выражениями вида a^x, в которых x является любым действительным числом, можно выполнять по тем же правилам, по которым они выполняются над степенями с целым положительным показателем. Поэтому выражение a^x при всяком действительном значении x также называется степенью (обобщенной).

Примеры зависимостей, выражающихся с помощью показательных функций.

1. $p = p_0 e^{-kh}$ (барометрическая формула);

p_0 (*ат*) — давление на уровне моря;
k — некоторая известная постоянная;
e — 2,718;
h (*м*) — высота над уровнем моря;
p (*ат*) — давление на высоте h над уровнем моря.

Здесь h есть независимая переменная, или аргумент, а p есть зависимая переменная, или функция.

По этой формуле можно определять давление p по заданному значению h.

2. Если температура воздуха равна 20° С и тело в течение 20 минут охлаждается от 100° до 60°, то зависимость температуры T охлаждающегося тела от времени t минут (в течение которого будет происходить охлаждение) выразится формулой

$$T = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

Здесь t есть аргумент, а T — функция.

Пользуясь этой формулой, можно узнать, например, что через один час температура тела понизится до 30°.

Приведенные формулы выводятся в курсах высшей математики.

236. Решить уравнения:

1) $\left(\frac{1}{4}\cdot 4^x\right)^x = 2^{2x+6}$. Отв. 3; —1.

2) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$. Отв. 7; —1.

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$. Отв. $x=-10$.

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$. Отв. $x=3$.

5) $a^{x^2+x-2} = 1$. Отв. 1; —2.

6) $\sqrt[4]{a^{x+1}} = \sqrt[3]{a^{x-2}}$; $a>0$ и $a\neq 1$. Отв. $x=11$.

237. Решить уравнения:

1) $3^{x+1}+15\cdot 3^x=6$. Отв. $x=-1$.

2) $4^x+2^{x+1}=80$. Отв. $x=3$.

238. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$2^x = x+2{,}5?$$

Пользуясь графическим методом, найти приближенные значения этих корней с точностью до 0,1.

239. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

240. Доказать тождество

$$\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

241. Решить уравнение

$$3^{2-x}\cdot 2^{2x} - 7\cdot 2^x = 2\cdot 3^x.$$

242. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=6, \\ x^{y^2+7y+12}=1. \end{cases}$$

Отв. 1) $\begin{cases} x=9, \\ y=-3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=10, \\ y=-4. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

ГЛАВА XXVI

ЛОГАРИФМЫ

§ 1. ПОНЯТИЕ ЛОГАРИФМА

Пользуясь равенством, например, $10^3=1000$, мы можем сказать, что число 3 есть тот показатель степени, в который надо возвысить 10, чтобы получить 1000.

Из равенства $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$ следует, что число -2 есть показатель степени, в который надо возвысить число $\frac{1}{4}$, чтобы получить 16.

$5^0=1$. Значит, нуль есть тот показатель степени, в который надо возвысить число 5, чтобы получить единицу.

Подобных примеров можно привести сколько угодно.

Обобщая изложенное, можно сказать так: если $a^q=N$, то число q есть тот показатель степени, в которую надо возвысить основание a, чтобы получить число N.

Вот этот показатель степени q и принято называть логарифмом числа N при основании a (или по основанию a).

Определение. ***Логарифмом числа N при основании a называется показатель степени q, в которую надо возвысить основание a, чтобы получить число N.***

Логарифм числа N при основании a обозначается символом

$$\log_a N.$$

Из равенств $10^3=1000$; $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$; $5^0=1$; $a^q=N$ следует, что $\log_{10}1000=3$; $\log_{\frac{1}{4}}16=-2$; $\log_5 1=0$;

$$\log_a N=q.$$

Символ $\log_a$ называется знаком логарифма при основании a. Символ $\log_{10}$ есть знак логарифма при основании 10.

Выражение же $\log_a N$ есть логарифм числа N при основании a. Выражение $\log_{10}1000$ есть логарифм 1000 при основании 10.

По определению логарифма из равенства

$$\log_b M = h$$

следует, что $b^h = M$, или $M = b^h$.

Например, если

$$\log_{10}(2x+1) = 2,$$

то $2x+1 = 10^2$, или $x = 49{,}5$.

Убедитесь в справедливости равенств:

$$\log_{10} 100\,000 = 5; \qquad \log_{10} 0{,}001 = -3;$$
$$\log_2 1024 = 10; \qquad \log_{\frac{1}{2}} 128 = -7.$$

Отыщем логарифмы в некоторых простых случаях.

1. Сразу трудно узнать значение $\log_4 32$. Поэтому напишем:

$$\log_4 32 = x.$$

Отсюда $4^x = 32$, или $2^{2x} = 2^5$, или $x = 2{,}5$. Следовательно, $\log_4 32 = 2{,}5$.

2. $\log_8 \frac{1}{4} = x$.

Отсюда $8^x = \frac{1}{4}$, или $2^{3x} = 2^{-2}$, или $x = -\frac{2}{3}$. Следовательно, $\log_8 \frac{1}{4} = -\frac{2}{3}$.

Изучать логарифмы при отрицательном основании или при основании, равном нулю или единице, не имеет смысла. Поэтому мы всегда будем брать за основания логарифмов числа положительные, отличные от единицы, т. е. в выражениях вида

$$\log_a N$$

мы всегда будем предполагать, что $a > 0$ и $a \neq 1$.

Для практических целей употребляются логарифмы при основании 10, которые называются **десятичными**.

Например:

$$\log_{10} 100 = 2; \qquad \log_{10} 1000 = 3; \qquad \log_{10} 0{,}01 = -2;$$
$$\log_{10} 0{,}001 = -3; \qquad \log_{10} 2 \approx 0{,}30103; \qquad \log_{10} 3 \approx 0{,}47712 \text{ и т. д.}$$

Последние два логарифма взяты из напечатанных таблиц десятичных логарифмов.

Для теоретических целей употребляются логарифмы при основании e*, которые называются **натуральными логарифмами**.

Например:

$$\log_e 100 = 4{,}6052; \qquad \log_e 2 = 0{,}6931;$$
$$\log_e 3 = 1{,}0986; \qquad \log_e 10 = 2{,}3026.$$

---

*$e \approx 2{,}71828$. Подробно о числе e говорится на стр. 691.

Эти логарифмы взяты из напечатанных таблиц натуральных логарифмов.

Приближенные значения логарифмов вычисляются удобно и сравнительно легко с помощью методов, излагаемых в высшей математике. Еще проще и быстрее эти вычисления можно сделать на современных электронных машинах.

Не касаясь этих способов, мы покажем принципиальную возможность вычисления логарифмов с помощью только элементарных средств.

Идею элементарного способа вычисления логарифмов мы изложим на примере.

Пусть требуется найти приближенное значение $\log_{10}2$.

Обозначим искомый логарифм буквой x, т. е. положим, что

$$\log_{10}2 = x.$$

Отсюда $10^x = 2$.

Так как $10^0 < 2 < 10^1$, то $0 < x < 1$.

Положим, что $x = \frac{1}{y}$, где $y > 1$.

Тогда $10^{\frac{1}{y}} = 2$, или $10 = 2^y$.

Так как $2^3 < 10 < 2^4$, значит, $3 < y < 4$.

Положим, что $y = 3 + \frac{1}{z}$, где $z > 1$.

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z}}, \text{ или } 10 = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z}},$$

Тогда

$$2^{\frac{1}{z}} = \frac{5}{4}, \text{ или } 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^z.$$

Так как $\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$, что $3 < z < 4$.

Положим, что $z = 3 + \frac{1}{u}$, где $u > 1$.

Теперь $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{u}}$, или $2 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}}$,

$$\text{или } \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{128}{125}, \text{ или } \frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^u.$$

Так как $\left(\frac{128}{125}\right)^9 < \frac{5}{4} < \left(\frac{128}{125}\right)^{10}$, то $9 < u < 10$.

Остановившись на этом и пользуясь тем, что

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{3+\frac{1}{z}} = \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{u}}},$$

найдём, что x, т. е. $\log_{10}2$, заключается между числами

$$\frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{10}}} \text{ и } \frac{1}{3+\frac{1}{3+\frac{1}{9}}},$$

т. е. между числами 0,3009 и 0,3017.

По более точным вычислениям

$$\log_{10}2 = 0,30103.$$

О десятичных логарифмах положительных чисел

Десятичные логарифмы положительных чисел, отличных от 10^k, где k — рациональное число, являются иррациональными числами.

Докажем, например, что $\log_{10}2$ не является ни целым, ни дробным числом, т. е. не является рациональным числом.

Доказательство.

Легко видеть, что

$$10^0 = 1;\ 10^1 = 10;\ 10^2 = 100; \ldots$$

$$10^{-1} = \frac{1}{10};\ 10^{-2} = \frac{1}{100}; \ldots.$$

Отсюда следует, что никакая целая степень числа 10 не может оказаться равной числу 2. Следовательно, $\log_{10}2$ не может равняться никакому целому числу.

Теперь допустим, что

$\log_{10}2 = \frac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа. Тогда

$$10^{\frac{p}{q}} = 2, \text{ или } 10^p = 2^q.$$

Но равенство $10^p = 2^q$ невозможно. Число 10^p изображается единицей с p нулями. Последняя же цифра в изображении числа 2^q отлична от нуля.

Существование единственного действительного числа, равного $\log_{10}2$, вытекает из того, что уравнение $10^x = 2^x$ имеет единственный действительный корень (см. стр. 436). Теперь из всего изложенного следует, что $\log_{10}2$ есть число иррациональное.

Иррациональными числами будут также, например, $\log_{10}3$, $\log_{10}4$, $\log_{10}5$ и им подобные.

Приближенно $\log_{10}2 = 0,30103$; $\log_{10}3 = 0,47712$ и т. д.

Существуют логарифмы, являющиеся рациональными числами. Например,

$$\log_{10}10 = 1; \qquad \log_{10}100 = 2;$$

$$\log_{10}0,1 = -1; \qquad \log_{10}0,001 = -2;$$

$$\log_4 8 = \frac{3}{2} \text{ и т. д.}$$

§ 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

$(a > 0$ и $a \neq 1)$

1. Очевидно, что $\log_a 1 = 0$, т. е. ***логарифм единицы равен нулю.***

2. Очевидно, что

$$\log_a a = 1,$$

т. е. ***логарифм основания логарифмов равен единице.***

Пусть $\log_{10}(-100) = x$. Тогда должно быть:

$$10^x = -100.$$

Но последнее равенство невозможно ни при каком значении буквы x, так как всегда

$$10^x > 0.$$

Следовательно, ***логарифмы отрицательных чисел не являются действительными числами.***

4. Рассматривая равенства

$$\log_{10} 0{,}1 = -1; \ \log_{10} 0{,}01 = -2; \ \log_{10}\frac{1}{2} = -0{,}30103;$$

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2; \ \log_{10} 0{,}000\,000\,001 = -9,$$

легко заметить, что существуют числа, логарифмы которых выражаются отрицательными числами.

Теорема. ***Если $N_1 > N_2$ и $a > 1$, то***

$$\log_a N_1 > \log_a N_2.$$

Доказательство.

Пусть $\log_a N_1 = q_1$ и $\log_a N_2 = q_2$.

Тогда $N_1 = a^{q_1}$ и $N_2 = a^{q_2}$.

Но так как $N_1 > N_2$, то

$$a^{q_1} > a^{q_2}.$$

Отсюда при $a > 1$ следует, что $q_1 > q_2$, т. е. что

$$\log_a N_1 > \log_a N_2,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

1. Прежде чем формулировать и доказывать основные теоремы о логарифмах, рассмотрим несколько частных примеров.

Проверим, справедливо ли равенство

$$\log_{10}(1000 + 100) = \log_{10}1000 + \log_{10} 100?$$

В этом равенстве левая часть представляет собой логарифм числа 1100 при основании 10. Так как $1000 < 1100 < 10\,000$, то $\log_{10}(1000+100)$ будет представлять собой число, заключенное между 3 и 4. Правая же часть равна сумме чисел 3 и 2, т. е. равна 5.

Следовательно, ***логарифм суммы не равен сумме логарифмов слагаемых,*** т. е.

$$\log_a(N_1+N_2) \neq \log_a N_1 + \log_a N_2.$$

2. Убедитесь в том, что

$$\log_{10}(1000-100) \neq \log_{10}1000 - \log_{10}100;$$

$$\log_{10}(1000\cdot 100) \neq \log_{10}1000 \cdot \log_{10}100;$$

$$\log_{10}\frac{1000}{100} \neq \frac{\log_{10}1000}{\log_{10}100};$$

$$\log_{10}(100^3) \neq (\log_{10}100)^3.$$

3. Убедитесь в справедливости следующих равенств:

$$\log_{10}(1\,000\cdot 100) = \log_{10}1\,000 + \log_{10}100;$$

$$\log_{10}\frac{1000}{100} = \log_{10}1000 - \log_{10}100;$$

$$\log_{10}(100^3) = 3\log_{10}100.$$

Теперь перейдем к формулировке и доказательству основных теорем.

Теорема 1. ***Логарифм произведения равен сумме логарифмов сомножителей,*** т. е.

$$\log_a(N_1\cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2.$$

Доказательство. Пусть

$$\log_a N_1 = q_1 \text{ и } \log_a N_2 = q_2.$$

Тогда

$$N_1 = a^{q_1} \text{ и } N_2 = a^{q_2},$$

или

$$N_1\cdot N_2 = a^{q_1+q_2}.$$

Здесь (q_1+q_2) есть показатель степени, в который возводится a для получения числа, равного произведению $N_1\cdot N_2$. Следовательно,

$$\log_a(N_1\cdot N_2) = q_1 + q_2,$$

т. е.

$$\log_a(N_1\cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. ***Логарифм частного (дроби) равен разности логарифмов делимого и делителя,*** т. е.

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

Доказательство. Пусть

$$\log_a N_1 = q_1 \text{ и } \log_a N_2 = q_2.$$

Тогда

$$N_1 = a^{q_1} \text{ и } N_2 = a^{q_2},$$

или

$$\frac{N_1}{N_2} = a^{q_1 - q_2}.$$

Отсюда

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = q_1 - q_2, \text{ т. е. } \log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. ***Логарифм степени равен показателю степени, умноженному на логарифм основания этой степени,*** т. е.

$$\log_a (N^\gamma) = \gamma \cdot \log_a N$$

(здесь γ — любое число, не обязательно натуральное).

Пусть

$$\log_a N = q. \text{ Тогда } N = a^q.$$

Возведя обе части этого равенства в степень γ получим: $N^\gamma = a^{\gamma q}$. Отсюда

$$\log_a (N^\gamma) = \gamma q,$$

т. е.

$$\log_a (N^\gamma) = \gamma \cdot \log_a N,$$

что и требовалось доказать*.

Следствие. ***Логарифм корня равен логарифму подкоренного числа, деленному на показатель корня.***

Действительно,

$$\log_a \sqrt[m]{N} = \log_a \left(N^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m} \log_a N = \frac{\log_a N}{m}.$$

§ 4. ЛОГАРИФМИРОВАНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ, ЧАСТНОГО, СТЕПЕНИ И КОРНЯ

На основании теорем, доказанных в предыдущем параграфе, можно выразить логарифм любого одночленного выражения через логарифмы составляющих его чисел.

---

* Обычно ради краткости пишут: $\log_a N^\gamma$ вместо $\log_a (N^\gamma)$ и $\log_a^\gamma N$ вместо $(\log_a N)^\gamma$. В дальнейшем и мы пользуемся такой записью.

Например, пусть

$$N = \frac{7b^2c^3}{p\sqrt[4]{s}}.$$

Тогда

$$\log_a N = \log_a (7b^2c^3) - \log_a (p\sqrt[4]{s}) =$$
$$= \log_a 7 + \log_a (b^2) + \log_a (c^3) - \log_a p - \log_a \sqrt[4]{s} =$$
$$= \log_a 7 + 2\log_a b + 3\log_a c - \log_a p - \frac{1}{4}\log_a s.$$

Другой пример. Пусть

$$x = \frac{b(p-q)}{c(p+q)}.$$

Тогда

$$\log_a x = \log_a b + \log_a (p-q) - \log_a c - \log_a (p+q).$$

§ 5. ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ ЛОГАРИФМОВ

Пусть мы имеем таблицу, например, десятичных логарифмов. Пусть мы научились находить с помощью такой таблицы десятичные логарифмы любых положительных чисел и пусть мы научились находить также неизвестное число по известному его десятичному логарифму. Тогда с помощью такой таблицы можно производить многие сложные вычисления однообразно и при том с большой легкостью.

Поясним это на примере.

Пусть требуется вычислить значение выражения

$$1{,}024 \cdot \sqrt[5]{2000}.$$

Обозначим значение этого выражения буквой x. Тогда получим:

$$x = 1{,}024\sqrt[5]{2000},$$

или

$$\log_{10} x = \log_{10} 1{,}024 + \frac{1}{5}\log_{10} 2000.$$

С помощью таблицы найдем, что

$$\log_{10} 1{,}024 = 0{,}0103,$$
$$\log_{10} 2000 = 3{,}3010.$$

Значит,

$$\log_{10} x = 0{,}0103 + \frac{1}{5}\cdot 3{,}3010 = 0{,}0103 + 0{,}6602,$$

т. е.

$$\log_{10} x = 0{,}6705.$$

С помощью таблиц найдем, что

$$x = 4{,}683.$$

§ 6. СВОЙСТВА ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ*

Основные свойства

1. ***Десятичный логарифм числа, изображенного единицей с последующими нулями, равен стольким единицам, сколько нулей в изображении числа.***

$$\lg 10 = 1;\ \lg 100 = 2;\ \lg 1000 = 3;\ \ldots$$
$$\lg \underbrace{100\ldots0}_{n\ \text{нулей}} = n.$$

2. ***Логарифм правильной десятичной дроби, изображенной единицей с предшествующими нулями, равен стольким отрицательным единицам, сколько нулей предшествует единице, считая и нуль целых.***

$$\lg 0{,}1 = -1;\ \lg 0{,}01 = -2;\ \lg 0{,}001 = -3;\ldots$$
$$\lg \underbrace{0{,}000\ldots01}_{n\ \text{нулей}} = -n.$$

3. ***Десятичный логарифм всякого числа, не являющегося рациональной степенью числа 10, представляет собой число иррациональное.***

Например, число 2 не является рациональной степенью числа 10. Поэтому $\lg 2$ есть число иррациональное.

4. ***Логарифм целого числа, изображенного n цифрами, заключается между числами $(n-1)$ и n.***

Например,

$$1000 < 2815 < 10\,000.$$

Значит,

$$\lg 1000 < \lg 2815 < \lg 10\,000,$$

т. е.

$$3 < \lg 2815 < 4.$$

Логарифм десятичной дроби, целая часть которой содержит n цифр, заключается также между $(n-1)$ и n. Например,

$$1000 < 2815,96 < 10\,000.$$

Значит, $$\lg 1000 < \lg 2815,96 < \lg 10\,000,$$

т. е. $$3 < \lg 2815,96 < 4.$$

Легко убедиться, что

$$2 < \lg 473{,}365 < 3; \qquad 0 < \lg 4{,}73365 < 1;$$
$$1 < \lg 47{,}3365 < 2; \qquad 0 < \lg 2 < 1.$$

5. ***Логарифм правильной десятичной дроби, содержащей до первой значащей цифры n нулей, считая и нуль целых, заключается между числами $-n$ и $-(n-1)$.***

---

* Ради краткости принято вместо $\log_{10} N$ писать просто $\lg N$.

Например, $0{,}001 < 0{,}0037 < 0{,}01.$

Значит, $\lg 0{,}001 < \lg 0{,}0037 < \lg 0{,}01,$

т. е. $-3 < \lg 0{,}0037 < -2.$

Легко убедиться, что

$$-1 < \lg 0{,}37 < 0;$$
$$-2 < \lg 0{,}037 < -1;$$
$$-3 < \lg 0{,}0037 < -2$$

и т. д.

Характеристика и мантисса десятичного логарифма

Мы видели, например, что

$$2 < \lg 473{,}375 < 3.$$

Следовательно,

$$\lg 473{,}375 = 2 + \alpha, \text{ где } 0 < \alpha < 1.$$

Число 2 называют характеристикой логарифма, а α — мантиссой.

При пользовании таблицей логарифмов за α принимается соответствующая правильная десятичная дробь, изображающая значение α с той или иной степенью точности.

Определение. ***Целая часть логарифма называется характеристикой, а дробная часть — мантиссой.***

Например, $\lg 300 = 2{,}47712$. Здесь число 2 есть характеристика логарифма, а 0,47712 — его мантисса.

Характеристика логарифма числа, большего единицы, содержит столько единиц, сколько цифр в целой части числа без одной.

Например, характеристика $\lg 7568{,}24$ равна 3;
характеристика $\lg 2{,}568$ равна нулю.

Мы видели, например, что

$$-3 < \lg 0{,}0037 < -2.$$

Следовательно,

$$\lg 0{,}0037 = -3 + \gamma, \text{ где } 0 < \gamma < 1,$$

либо

$$\lg 0{,}0037 = -2 - \beta, \text{ где } 0 < \beta < 1.$$

Из этих двух форм изображения логарифма принято пользоваться формой:

$$\lg 0{,}0037 = -3 + \gamma,$$

т. е. такой, при которой та часть логарифма, которая называется мантиссой, положительна.

При этих условиях можно высказать следующее:

Характеристика логарифма правильной десятичной дроби содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей предшествует первой значащей цифре, считая в том числе и нуль целых. (Мантисса при этом положительна.)

Например,

$$\lg 0{,}0037 = -3 + 0{,}5682.$$

Здесь -3 — характеристика, а $0{,}5682$ — мантисса.

$$\lg 0{,}00378 = -3 + 0{,}5775;$$

$$\lg 0{,}037 = -2 + 0{,}5682;$$

$$\lg 0{,}37 = -1 + 0{,}5682.$$

Приведенные здесь мантиссы взяты из таблицы логарифмов.

Сумму, состоящую из целого отрицательного числа и положительной правильной дроби, условились записывать так:

$$-4 + 0{,}2712 = \bar{4},2712,$$

$$-1 + 0{,}8645 = \bar{1},8645.$$

В дальнейшем будем записывать логарифмы правильных десятичных дробей в следующей искусственной форме:

$$\lg 0{,}0037 = \bar{3},5682;$$

$$\lg 0{,}037 = \bar{2},5682;$$

$$\lg 0{,}37 = \bar{1},5682 \quad \text{и т. д.}$$

Действия над логарифмами, записанными в искусственной форме

Сложение.

$$\begin{array}{r} \bar{4},9817 \\ +\,\bar{2},7924 \\ \bar{1},8697 \\ \hline \bar{5},6438. \end{array}$$

Вычитание.

$$\begin{array}{r} \bar{2},3154 \\ -\,\bar{1},9237 \\ \hline \bar{2},3917. \end{array}$$

Умножение на целое положительное число.

$$\bar{2},9988 \cdot 3 = \bar{4},9964.$$

П о я с н е н и е. $\bar{2},9988 \cdot 3 = (-2 + 0,9988) \cdot 3 = -6 + 2,9964 = \bar{4},9964$.

Деление на целое положительное число.

$$\bar{3},8735 : 5 = \bar{1},5747.$$

(Мы здесь прибавили -2 к отрицательной характеристике и $+2$ к мантиссе.)

П о я с н е н и е. $\bar{3},8735 : 5 = (-3 + 0,8735) : 5 = (-5 + 2,8735) : 5 = -1 + 0,5747 = \bar{1},5747$.

Умножение чисел, изображенных в искусственной форме:

$$\bar{2},9988 \cdot \bar{1},6663 = (-2 + 0,9988)(-1 + 0,6663) = = (-1,0012) \cdot (-0,3337).$$

Далее умножаем по обычным правилам.

Деление чисел, изображенных в искусственной форме:

$$\frac{\bar{2},9988}{\bar{1},6663} = \frac{-1,0012}{-0,3337}.$$

Далее делим по обычным правилам.

Покажем еще, как преобразовать отрицательное число к искусственной форме:

$$-2,5724 = -2 - 0,5724 = (-2 - 1) + (1 - 0,5724) = \bar{3},4276.$$

П р а в и л о. ***Чтобы преобразовать отрицательное число в искусственную форму, надо к целой части числа прибавить отрицательную единицу и поставить над результатом знак (—) сверху; одновременно с этим вычесть следующие после запятой цифры из 9, а последнюю цифру — из 10.***

Например, $\quad -3,1476 = \bar{4},8524.$

Неизменяемость мантиссы от умножения числа на целую степень десяти

Пусть

$$\lg N = k + \gamma,$$

где k — характеристика, а γ — мантисса.

Пусть n — натуральное число. Тогда

$$\lg (N \cdot 10^n) = \lg N + \lg 10^n = \lg N + n = k + \gamma + n = (k + n) + \gamma.$$

При умножении числа N на 10^n характеристика логарифма увеличивается на n единиц, а мантисса остается без изменения.

$$\lg (N \cdot 10^{-n}) = \lg \frac{N}{10^n} = \lg N - \lg 10^n = k + \gamma - n = (k - n) + \gamma.$$

При делении числа на 10^n характеристика логарифма уменьшается на n единиц, а мантисса остается неизменной.

Примеры.

$$\begin{array}{ll|ll}
\lg 5{,}02 = 0{,}7007; & & \lg 5{,}02 = 0{,}7007; & \\
\lg 50{,}2 = 1{,}7007; & & \lg 0{,}502 = \bar{1}{,}7007; & \\
\lg 502 = 2{,}7007; & & \lg 0{,}0502 = \bar{2}{,}7007; & \\
\lg 5020 = 3{,}7007; & & \lg 0{,}00502 = \bar{3}{,}7007; & \\
\lg 50200 = 4{,}7007; & & \lg 0{,}000502 = \bar{4}{,}7007. &
\end{array}$$

Таким образом, мантисса не зависит от положения запятой, а зависит лишь от цифр, изображающих число, и от их расположения. Например, мантиссы логарифмов чисел 372; 37, 2; 3,72; 0,372; 3720 будут одинаковыми. Так же будут одинаковыми между собой и мантиссы логарифмов чисел 327; 3,27; 0,327.

Характеристика логарифма зависит только от числа цифр в целой части числа и нисколько не зависит от самих цифр, изображающих это число.

Например, логарифмы чисел 356; 783,4; 101,75 имеют одну и ту же характеристику, равную 2.

§ 7. ТАБЛИЦА ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ ДЕСЯТИЧНЫХ ЛОГАРИФМОВ БРАДИСА

В таблицах Брадиса даются приближенные значения мантисс логарифмов целых чисел от 1 до 9999 с четырьмя десятичными знаками, но по этим же таблицам можно находить мантиссы логарифмов и десятичных дробей, так как мантисса логарифма не зависит от положения запятой. Для определения характеристики логарифма никакой таблицы не требуется, она определяется по правилам, изложенным в предыдущем параграфе.

Пусть требуется иайти $\lg 502$. Характеристика этого логарифма равна 2.

Чтобы найти мантиссу, воспользуемся приведенной ниже частью таблицы логарифмов.

Берем из первого столбца, помеченного сверху и снизу буквой N, число, образованное первыми двумя цифрами числа 502, т. е. берем число 50; затем продвигаемся от числа 50 по горизонтали до пересечения с вертикальным столбцом, помеченным сверху и снизу третьей значащей цифрой числа 502, т. е. цифрой 2. В пересечении прочитываем мантиссу 7007, что означает 0,7007. Следовательно,

$$\lg 502 = 2{,}7007.$$

Из ранее изложенного следует, что

$$\begin{aligned}
\lg 50{,}2 &= 1{,}7007;\\
\lg 5{,}02 &= 0{,}7007;\\
\lg 0{,}502 &= \bar{1}{,}7007\\
\lg 0{,}0502 &= \bar{2}{,}7007\\
\lg 5020 &= \bar{3}{,}7007
\end{aligned}$$

и т. д.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	2	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	2	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Мантисса логарифма двузначного числа или трехзначного числа, оканчивающегося нулем, а также и мантисса четырехзначного числа, оканчивающегося двумя нулями, берется из столбца, помеченного сверху и снизу числом нуль. Например, мантисса логарифма числа 53, или 530, или 5300 будет 0,7243.

Чтобы найти мантису $\lg 5$, достаточно взять мантиссу

$$\lg 50.$$

Мантисса $\lg 3$ будет та же, что и мантисса $\lg 30$.

Мантисса $\lg 0{,}006$ будет та же, что и мантисса $\lg 60$.

Теперь изложим правило нахождения мантисс логарифмов многозначных чисел.

Чтобы найти мантиссу логарифма четырехзначного числа, например 52,48, достаточно найти мантиссу

$$\lg 5248.$$

Для нахождения этой мантиссы надо поступать так.

Сначала надо найти мантиссу логарифма трехзначного числа 524, т. е. числа, изображенного первыми тремя цифрами данного числа. Этой мантиссой окажется число 0,7193. После этого надо от этой мантиссы передвинуться вправо по горизонтальной строке до вертикального столбца, расположенного за двойной вертикальной чертой и помеченного сверху и снизу цифрой 8, т. е. последней цифрой данного четырехзначного числа. На пересечении с этой вертикалью находим число 7 (т. е. 7 десятитысячных). Эту поправку на четвертую значащую цифру прибавляем к найденной раньше мантиссе 0,7193 и получаем, что

$$\lg 5248 = 3{,}7200.$$

Таким же способом находится мантисса логарифма и всякого другого четырехзначного числа.

Зная, что $\lg 5248 = 3{,}7200$, можем записать:

$$\lg 52{,}48 \quad = 1{,}7200;$$

$$\lg 0{,}05248 = \bar{2}{,}7200;$$

$$\lg 5{,}248 \quad = 0{,}7200 \qquad \text{и т. д.}$$

За мантиссу логарифма пятизначного числа или числа с большим количеством цифр принимают мантиссу четырехзначного числа, полученного после округления данного многозначного числа.

Например,

$$\begin{aligned} \lg 52478 &\approx \lg 52480 = 4{,}7200; \\ \lg 52{,}478 &\approx \lg 52{,}48 = 1{,}7200; \\ \lg 52471 &\approx \lg 52470 = 4{,}7199; \\ \lg 0{,}52471 &\approx \lg 0{,}5247 = \bar{1}{,}7199. \end{aligned}$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

§ 8. ТАБЛИЦА ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫХ АНТИЛОГАРИФМОВ

С помощью таблицы антилогарифмов можно находить неизвестное число по данному его логарифму. Это неизвестное число и называют антилогарифмом.

Пусть, например,

$$\lg x = 3{,}9488.$$

Чтобы найти неизвестное число x, воспользуемся приведенной частью таблицы антилогарифмов.

Не обращая внимание на характеристику, берем число, изображенное первыми двумя цифрами мантиссы, т. е. число 94. Это число находим в столбце, помеченном сверху и снизу буквой m (мантисса), и продвигаемся по этой горизонтали до пересечения со столбцом, помеченным сверху и снизу третьей цифрой мантиссы 8; на этом пересечении находим число 8872. Далее ищем поправку на 4-ю цифру мантиссы (эта цифра в данном случае равна 8).

Для этого по той же горизонтали продвигаемся вправо до вертикального столбца, расположенного за двойной вертикальной чертой и помеченного сверху и снизу цифрой 8, т. е. последней цифрой данной мантиссы; на пересечении находим поправку 16. Эту поправку прибавляем к найденному уже числу 8872 и получаем

8888.

Поскольку характеристика данного логарифма была равна 3, то $x = 8888$.

Если бы $\lg x = 2{,}9488$, мы написали бы $x = 888{,}8$.
„ $\lg x = 1{,}9488$, „ „ $x = 88{,}88$.
„ $\lg x = 0{,}9488$, „ „ $x = 8{,}888$.
„ $\lg x = \overline{1},9488$, „ „ $x = 0{,}8888$.
„ $\lg x = \overline{2},9488$, „ „ $x = 0{,}08888$.
„ $\lg x = 4{,}9488$, „ „ $x = 88880$.
„ $\lg x = 5{,}9488$, „ „ $x = 888800$ и т. д.

Существуют таблицы логарифмов, в которых мантиссы даны с более высокой степенью точности, например пятизначные таблицы Пржевальского.

§ 9. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ТАБЛИЦ ЛОГАРИФМОВ

1. $$x = \frac{(5{,}46)^2 \cdot \sqrt[3]{6{,}28}}{(24{,}75)^3 \cdot \sqrt[4]{0{,}01234}}$$

$$\lg x = 2\lg 5{,}46 + \frac{1}{3}\lg 6{,}28 - \left(3\lg 24{,}75 + \frac{1}{4}\lg 0{,}01234\right).$$

Вычисление $\lg x$

$$2\lg 5{,}46 = 2 \cdot 0{,}7372 = 1{,}4744; \qquad 3\lg 24{,}75 = 1{,}3936 \cdot 3 = 4{,}1808;$$

$$\frac{1}{3}\lg 6{,}28 = \frac{0{,}7980}{3} = 0{,}2660; \qquad \frac{1}{4}\lg 0{,}01234 = \frac{\overline{2},0913}{4} = \overline{1},5228,$$

$$\overline{1{,}7404.} \qquad \overline{3{,}7035.}$$

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{r} 1{,}7404 \\ 3{,}7036 \end{array} \\ \hline \lg x = \overline{2},0368. \end{array}$$

Нахождение значения x

$$\lg x = \overline{2},0368; \text{ отсюда } x = 0,01088.$$

2. $$x = \sqrt[5]{725} + \sqrt[6]{896}.$$

Сумму логарифмировать нельзя. Поэтому вычислим отдельно

$$y = \sqrt[5]{725} \quad \text{и} \quad z = \sqrt[6]{896}.$$

1) $$\lg y = \frac{1}{5} \lg 725 = \frac{2,8603}{5} = 0,5721,$$

$$y = 3,734.$$

2) $$\lg z = \frac{1}{6} \lg 896 = \frac{2,9523}{6} = 0,4921,$$

$$z = 3,106.$$

Следовательно,

$$x = 3,734 + 3,106 = 6,840.$$

§ 10. ПЕРЕХОД ОТ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ К ДЕСЯТИЧНЫМ И ОБРАТНЫЙ ПЕРЕХОД

Натуральный логарифм числа N, т. е. $\log_e N$ принято обозначать ради краткости $\ln N$.

Пусть $\ln N = q$. Тогда $N = e^q$, или $\lg N = q \lg e$, или, наконец,

$$\lg N = (\ln N) \cdot \lg e.$$

Но

$$\lg e = 0,43429\ldots .$$

Поэтому, ***чтобы получить десятичный логарифм какого-нибудь числа, достаточно его натуральный логарифм умножить на число*** **0,43429...** .

Число $\lg e = 0,43429\ldots$ называется модулем перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Из равенства

$$\lg N = (\ln N) \cdot \lg e$$

следует, что

$$\ln N = (\lg N) \cdot \frac{1}{\lg e}.$$

Но

$$\frac{1}{\lg e} \approx 2,30258.$$

Поэтому, ***чтобы получить натуральный логарифм какого-нибудь числа, достаточно его десятичный логарифм умножить на число*** **2,30258.**

Число $\frac{1}{\lg e} = 2,30258$ называется модулем перехода от десятичных логарифмов к натуральным.

§ 11. НЕКОТОРЫЕ УПОТРЕБИТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

1. Легко убедиться, что

$$5^{\log_5 125}=125; \qquad 7^{\log_7 49}=49;$$

$$10^{\lg 1000}=1000; \qquad 10^{\lg 0,001}=0,001.$$

Обобщая это, заметим, что по определению логарифма

$$a^{\log_a N}=N.$$

Справедливость этой формулы поясним еще и так:

Пусть $\log_a N=q$; тогда $a^q=N$. Подставляя в последнее равенство вместо числа q равное ему выражение $\log_a N$, получим $a^{\log_a N}=N$.

Итак, если имеется степень, показателем которой является логарифм числа N при основании таком же, как и основание этой степени, то вся степень равна N.

Примеры.

$$2^{\log_2 5,36}=5,36; \quad a^{2\log_a x}=a^{\log_a x^2}=x^2;$$

$$a^{-3\log_a x}=a^{\log_a x^{-3}}=x^{-3}=\frac{1}{x^3}.$$

2. Справедлива и следующая формула:

$$\log_B A=\frac{\log_m A}{\log_m B}.$$

Доказательство. Пусть $\log_B A=q$. Тогда $B^q=A$, или $q\log_m B=\log_m A$. Отсюда

$$q=\frac{\log_m A}{\log_m B}, \text{ или } \log_B A=\frac{\log_m A}{\log_m B},$$

что и требовалось доказать.

Значит, любой логарифм можно представить в виде отношения двух логарифмов, взятых по одному и тому же произвольному основанию.

Примеры.

$$\log_5 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 5}=\frac{\log_3 7}{\log_3 5}=\frac{\log_a 7}{\log_a 5};$$

$$\log_8 2x=\frac{\log_2 2x}{\log_2 8}=\frac{1+\log_2 x}{3}.$$

Положив $m=A$ в формуле

$$\log_B A=\frac{\log_m A}{\log_m B},$$

получим, что

$$\log_B A=\frac{1}{\log_A B}.$$

3. Выведем еще одну формулу

$$\log_a N = \log_{a^s} N^s.$$

Доказательство. Пусть $\log_a N = q$. Тогда $a^q = N$, или $a^{sq} = N^s$, или $(a^s)^q = N^s$.

Здесь q есть показатель степени, в которую надо возвысить выражение a^s, чтобы получить число N^s. Следовательно, q есть логарифм числа N^s при основании a^s, т. е.

$$q = \log_{a^s} N^s, \text{ или } \log_a N = \log_{a^s} N^s.$$

Итак, ***если возвысить число, стоящее под знаком логарифма, и одновременно основание логарифма в какую-либо степень, то величина логарифма не изменится.***

Примеры.

$$\log_2 3 = \log_{2^4} 3^4 = \log_{16} 81;$$

$$\log_{\sqrt{a}} x = \log_a x^2 = 2 \log_a x.$$

§ 12. ПОТЕНЦИРОВАНИЕ

Из основных теорем, доказанных в § 3, следует:

1. ***Сумма логарифмов равна логарифму произведения:***

$$\log_a N_1 + \log_a N_2 = \log_a (N_1 \cdot N_2).$$

2. ***Разность логарифмов равна логарифму дроби:***

$$\log_a N_1 - \log_a N_2 = \log_a \frac{N_1}{N_2}.$$

3. ***Произведение числа на логарифм равно логарифму степени:***

$$\gamma \log_a N = \log_a (N^\gamma).$$

Потенцированием называется действие, с помощью которого отыскивается число по данному его логарифму.

Пример 1. Пусть $\log_a x = \log_a N_1 + \log_a N_2$. Тогда $\log_a x = \log_a (N_1 N_2)$, или $x = N_1 N_2$.

Пример 2. Пусть $\lg x = 2 \lg 3 + 3 \lg 2$. Тогда $\lg x = \lg 3^2 + \lg 2^3$, или $\lg x = \lg (3^2 \cdot 2^3)$, или $x = 3^2 \cdot 2^3 = 72$.

Пример 3. Пусть

$$\log_a x = 2 \log_a N_1 + 3 \log_a N_2 - 5 \log_a N_3.$$

Тогда

$$x = \frac{N_1^2 N_2^3}{N_3^5}.$$

Пример 4. Пусть

$$\log_a x = \log_a N_1 + 2\log_a N_2 - \frac{1}{2}\log_a (N_3 + N_4).$$

Тогда

$$x = \frac{N_1 \cdot N_2^2}{\sqrt{N_3 + N_4}}.$$

§ 13. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком логарифма, называется логарифмическим.

Покажем на примерах, как решаются логарифмические уравнения.

1. $$\lg(x-6) + \lg(x-3) = 1.$$

Решение.

$$\lg(x-6)(x-3) = 1; \quad (x-6)(x-3) = 10;$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0; \qquad x_1 = 8 \quad \text{и} \quad x_2 = 1.$$

Корень, равный 1, должен быть отброшен, так как его подстановка в данное уравнение приводит к логарифму отрицательного числа, между тем как нами определены логарифмы лишь положительных чисел.

Уже из этого примера видно, что при решении логарифмических уравнений полученные корни нуждаются, вообще говоря, в проверке.

2. $$\lg x = 2\lg 7,$$
$$\lg x = \lg 7^2, \qquad x = 7^2 = 49.$$

3. $$\lg x = -2\lg 7,$$
$$\lg x = \lg 7^{-2}, \qquad x = 7^{-2} = \frac{1}{49}.$$

4. $$\lg x = -\lg N,$$
$$\lg x = \lg N^{-1}, \qquad x = N^{-1} = \frac{1}{N}.$$

5. $$\frac{\lg(x+1)}{\lg x} = -1;$$

$$\lg(x+1) = -\lg x; \qquad \lg(x+1) = \lg x^{-1};$$

$x + 1 = x^{-1}$; $x + 1 = \frac{1}{x}$; $x^2 + x - 1 = 0$. Отсюда $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Окончательно $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Второй корень должен быть отброшен, так как логарифм отрицательного числа не является действительным числом.

6. $$\log_3(\log_2 x) = 2.$$

Под знаком логарифма при основании 3 стоит число $\log_2 x$. По определению логарифма это число должно равняться 3^2, т. е. 9. Значит,

$$\log_2 x = 9.$$

Отсюда

$$x = 2^9 = 512.$$

7. $$\log_3 [\log_2^2 (x-4)] = 0.$$

Здесь под знаком логарифма при основании 3 стоит число $\log_2^2 (x-4)$. По определению логарифма это число должно равняться 3^0, т. е. единице. Поэтому

$$\log_2^2 (x-4) = 1.$$

Отсюда

$$\log_2 (x-4) = \pm 1.$$

Из уравнения $\log_2 (x-4) = 1$ находим, что $x-4=2$, т. е. $x=6$.

Из уравнения $\log_2 (x-4) = -1$ находим, что $x-4=2^{-1}$, или $x-4=\frac{1}{2}$, т. е. $x=4\frac{1}{2}$.

Оба полученных корня удовлетворяют данному уравнению.

8. $\lg^2 10x + \lg x = 19$; $\quad 1 + 2\lg x + \lg^2 x + \lg x = 19$;

$(\lg 10 + \lg x)^2 + \lg x = 19$; $\quad \lg^2 x + 3\lg x - 18 = 0$;

$(1 + \lg x)^2 + \lg x = 19$; $\quad \lg x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 18}}{2}$.

1) $\lg x = 3$ и 2) $\lg x = -6$; отсюда

1) $x = 1000$ и 2) $x = 10^{-6} = \frac{1}{1\,000\,000}$.

Оба полученных корня удовлетворяют данному уравнению.

9. $$2 \cdot 10^{-1-2\lg x} = 10 + \frac{1}{x};$$

$$2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-2\lg x} = 10 + \frac{1}{x};$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x^2} = 10 + \frac{1}{x}.$$

Положим, что $\frac{1}{x} = y$.

$$\frac{1}{5} y^2 = 10 + y; \qquad y^2 - 5y - 50 = 0.$$

Отсюда

$$y_1 = 10 \quad \text{и} \quad y_2 = -5.$$

Следовательно, $x_1 = \frac{1}{10}$ и $x_2 = -\frac{1}{5}$.

Окончательно, $x = 0{,}1$.

Второй корень должен быть отброшен.

10. Доказать тождество

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

Воспользуемся формулой

$$\log_B A = \frac{1}{\log_A B}.$$

$$\frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{1}{\log_N b} + \frac{1}{\log_N b} \cdot \frac{1}{\log_N c} + \frac{1}{\log_N c} \cdot \frac{1}{\log_N a} =$$

$$= \frac{\log_N c + \log_N a + \log_N b}{\log_N a \cdot \log_N b \cdot \log_N c} =$$

$$= \frac{\log_N (abc)}{\log_N a \cdot \log_N b \cdot \log_N c} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\log_{abc} N}}{\frac{1}{\log_a N} \cdot \frac{1}{\log_b N} \cdot \frac{1}{\log_c N}} = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}$$

11. Решить систему:

$$\begin{cases} \log_2 (x+y) - \log_3 (x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

В силу первого уравнения $x+y \neq 0$ и $x-y \neq 0$, так как $\log 0$ не существует.

Поэтому второе уравнение можно записать в виде:

$$x+y = \frac{2}{x-y}.$$

Подставив в первое уравнение вместо $x+y$ выражение $\frac{2}{x-y}$, получим:

$$\log_2 \frac{2}{x-y} - \log_3 (x-y) = 1,$$

или

$$\log_2 2 - \log_2 (x-y) - \log_3 (x-y) = 1,$$

или

$$\log_2 (x-y) + \log_3 (x-y) = 0,$$

или

$$\log_2 (x-y) + \frac{\log_2 (x-y)}{\log_2 3} = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется лишь тогда, когда

$$\log_2 (x-y) = 0,$$

т. е. когда

$$x - y = 1.$$

Присоединяя это уравнение к уравнению $x+y=\frac{2}{x-y}$, получим систему:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ x-y=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим:

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

12. $$\log_3(\log_2 x)=0.$$

Примем за новое неизвестное $\log_2 x$. Тогда

$$\log_2 x=3^0,$$

или

$$\log_2 x=1.$$

Отсюда

$$x=2.$$

13. $$(\log_x 2)\cdot\log_{\frac{x}{16}} 2=\log_{\frac{x}{64}} 2.$$

Применим формулу

$$\log_B A=\frac{\log_m A}{\log_m B},$$

приняв $m=2$.

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x}\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2\frac{x}{16}}=\frac{\log_2 2}{\log_2\frac{x}{64}};$$

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x-\log_2 16}=\frac{1}{\log_2 x-\log_2 64};$$

$$\frac{1}{\log_2 x}\cdot\frac{1}{\log_2 x-4}=\frac{1}{\log_2 x-6}.$$

Приняв за новую неизвестную $y=\log_2 x$, получим:

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y-4}=\frac{1}{y-6};\qquad y^2-4y=y-6;$$

$$y^2-5y+6=0;\qquad y_1=3\quad\text{и}\quad y_2=2.$$

Приняв $\log_2 x=3$, получим $x=8$.
Приняв $\log_2 x=2$, получим $x=4$.

Оба полученных корня удовлетворяют данному уравнению.

14. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2 x+2\lg x-6}{\lg x}<1.$$

Решение. Обозначив $\lg x$ буквой y, сведем дело к решению неравенства

$$\frac{y^2+2y-6}{y}<1. \qquad \text{(А)}$$

Преобразуем это неравенство в другое, ему равносильное:

$$\frac{y^2+2y-6}{y}-1<0\,^*,$$

или

$$\frac{y^2+y-6}{y}<0. \qquad \text{(Б)}$$

Последнее неравенство удовлетворяется в том случае, когда

$$\begin{cases} y^2+y-6>0, \\ y<0, \end{cases} \qquad (1)$$

а также и тогда, когда

$$\begin{cases} y^2+y-6<0, \\ y>0. \end{cases} \qquad (2)$$

Решив систему неравенств (1), получим, что она удовлетворяется лишь при всех значениях y, меньших, чем -3.

Решив систему неравенств (2), получим, что она удовлетворяется лишь при всех значениях y, заключенных между числами 0 и 2.

Итак, неравенство (Б), а следовательно, и неравенство (А) удовлетворяются как при всех значениях y, меньших, чем число -3, так и при всех значениях y, заключенных между 0 и 2, т. е. $y<-3$ и $0<y<2$.

На рисунке 135 представлено решение неравенства (А) в наглядной форме.

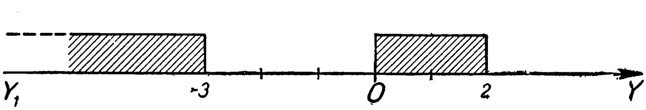


Рис. 135.

Теперь перейдем к нахождению значений x, учитывая, что y означает $\log x$. Из неравенств

$$0<\lg x<2$$

следует, что

$$1<x<100.$$

Из неравенства

$$\lg x<-3$$

следует, что

$$x<0{,}001.$$

---

* Было бы грубой ошибкой писать $y^2+2y-6<y$, не оговорив, что $y>0$.

Итак, первоначальное неравенство удовлетворяется как при всех значениях x, заключенных между 1 и 100, так и при всех значениях x, заключенных между 0 и 0,001.

При значениях x, меньших или равных нулю, данное неравенство не удовлетворяется, так как при этих значениях x выражение $\lg x$ не равняется никакому действительному числу.

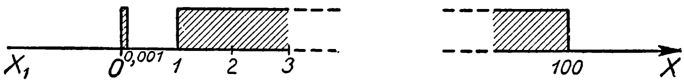


Рис. 136.

На рисунке 136 представлено решение первоначального неравенства в наглядной форме.

§ 14. ГРАФИКИ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Выражение $\lg x$ есть функция аргумента x, определенная нами лишь для положительных значений x. Составим таблицу значений этой функции для нескольких значений x.

x	0	...	10^{-100}	10^{-3}	0,01	0,1	1	2	3	10	100	10^3	10^{100}	...
$\lg x$		...	-100	-3	-2	-1	0	0,3010	0,4771	1	2	3	100	...

На рисунке 137 изображен график функции $y=\lg x$.

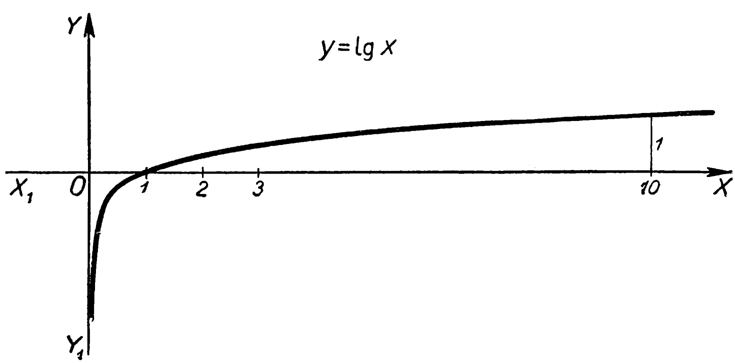


Рис. 137.

Если $x \to +\infty$, то $\lg x \to +\infty$.
Если $x \to 0$, то $\lg x \to -\infty$.

Составим таблицу значений функции $\log_{\frac{1}{2}} x$.

x	0	...	$\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	2	4	8	...	1024	...
$\log_{\frac{1}{2}} x$		...	100	10	2	1	0,47	0	-1	-2	-3	...	-10	...

На рисунке 138 изображен график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$,

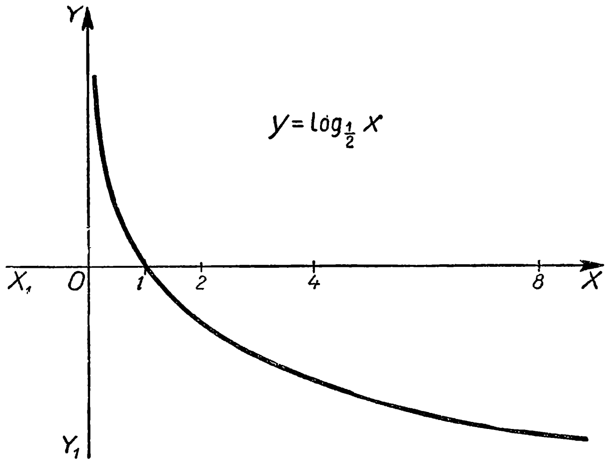


Рис. 138.

Если $x \to +\infty$, то $\log_{\frac{1}{2}} x \to -\infty$.

Если же $x \to 0$, то $\log_{\frac{1}{2}} x \to +\infty$.

График функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ сходен с графиком на рисунке 137, а при $a < 1$ сходен с графиком на рисунке 138.

Логарифмы были изобретены в начале XVII века. Их открытие было связано в первую очередь с быстрым развитием астрономии. Для обработки астрономических наблюдений требовалось производить большие по объему и сложности вычисления. Появление логарифмов облегчило эту работу.

Некоторые замечания

В настоящее время необычайно большие по объему и сложности вычисления производятся сказочно быстро на математических вычислительных и счетно-решающих электронных машинах.

Широко распространенным среди инженеров, техников и многих других работников счетным прибором является логарифмическая линейка. Однако ею можно пользоваться лишь для таких вычислений, в которых не требуется высокая степень точности.

Логарифмическая линейка дает приближенные результаты с точностью лишь до трех цифр.

Научиться пользоваться логарифмической линейкой можно, например, по краткому руководству К. А. Семендяева «Счетная линейка».

Примеры зависимостей, выражающихся с помощью логарифмических функций.

Пример 1.

$$h = \frac{1}{k} \log_e \frac{p_0}{p},$$

где p_0 — атмосферное давление на уровне моря;
k — некоторая известная постоянная;
$e \approx 2{,}718$;
h — высота над уровнем моря;
p — атмосферное давление на высоте h над уровнем моря.

Здесь p есть независимая переменная, или аргумент, а h есть зависимая переменная, или функция.

По этой формуле можно определять высоту h над уровнем моря по данному атмосферному давлению p на этой высоте. Эту формулу можно получить, решив относительно h уравнение

$$p = p_0 e^{-kh}$$ (см. стр. 436).

Пример 2.

$$t = \frac{100}{p} \log_e \frac{A}{a}.$$

Буква a обозначает первоначальный вклад;
p — число годовых процентов;
A — сумма, образовавшаяся при органическом росте вклада через t лет.

Здесь A можно рассматривать как независимую переменную, а t как зависимую. По этой формуле можно определять t по данному значению A.

Эту формулу можно получить, решив относительно t уравнение

$$A = ae^{\frac{pt}{100}}$$ (см. стр. 697).

Логарифмическая функция, например $y = \log_a x$, относится к классу так называемых элементарных функций. К классу элементарных функций относятся и следующие функции:

1. Целая рациональная функция

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

2. Дробная рациональная функция

$$y=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}.$$

3. Иррациональные функции, например,

$$y=x\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+2}.$$

4. Показательная функция

$$y=a^x.$$

5. Степенная функция

$$y=x^\alpha,$$

где α — любое действительное число.

Во всех этих функциях аргумент обозначен буквой x.

В следующих двух главах мы ознакомимся еще с двумя другими типами элементарных функций, называемых тригонометрическими и обратными тригонометрическими.

Более сложные функции, не принадлежащие к числу элементарных, изучаются в курсах высшей математики.

УПРАЖНЕНИЯ

243. Решить уравнения:

1) $\log_m x=-\log_m a$. Отв. $x=\frac{1}{2}$.

2) $\log_3(2x-1)=2$. Отв. $x=5$.

3) $\lg 6+x\lg 5=x+\lg(2^x+1)$. Отв. $x=1$.

4) $\log_2[2+\log_3(3+x)]=0$. Отв. $-2\frac{2}{3}$.

5) $(\log_x 2)(\log_{2x}2)=\log_{4x}2$. Отв. $2^{\sqrt{2}}$ и $2^{-\sqrt{2}}$.

6) $x^{\log_a x}=a^{\log_a^3 x}$. Отв. 1; a.

244. Решить систему:

$$\begin{cases}\log_2\log_3(x+y)=1,\\ x-y=1;\end{cases}\qquad \text{Отв.}\begin{cases}x=5,\\ y=4.\end{cases}$$

245. Доказать без помощи таблиц, что $\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_5 3}>2$.

246. Решить неравенство $\frac{1}{\lg x}+\frac{1}{1-\lg x}>1$.

247. Сколько действительных корней имеет уравнение $x\lg x=1$?

248. Решить уравнение $\sqrt[x]{4}+\sqrt[x]{6}=\sqrt[x]{9}$.

249. Парадокс. Докажем, что $\frac{1}{4}>1$.

Очевидно, что $3>2$. Умножив обе части этого неравенства на $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$, получим:

$$3\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}>2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}, \text{ или}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^3>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3>\left(\frac{1}{4}\right)^2, \text{ или } \frac{1}{64}>\frac{1}{16}, \text{ или } \frac{1}{4}>1.$$

Где ошибка в наших рассуждениях?

ГЛАВА XXVII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛА И ПЕРВЫЕ ТРИ ГРУППЫ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

§ 1. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ УГЛА

Что такое угол и угловой градус, мы предполагаем известными читателю из курса геометрии.

В теории тригонометрических функций угол рассматривается как величина, могущая принимать любые положительные и отрицательные значения, а также и значение, равное нулю.

Например, если луч OA (или вектор $\overrightarrow{OA}$ *), оставаясь в данной плоскости, совершит 10 полных оборотов вокруг точки O против движения часовой стрелки и еще повернется в том же направлении на угол 120°, то говорят, что этим движением луча OA образован угол, содержащий $360° \cdot 10 + 120°$, т. е. 3720°.

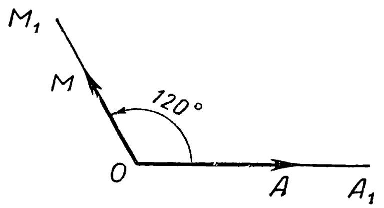


Рис. 139.

Допустим, что на рисунке 139 луч OM_1 (или вектор $\overrightarrow{OM}$) изображает положение луча OA после указанного выше его вращения вокруг точки O. Тогда мы скажем, что луч OM_1 составляет с лучом OA_1 (или вектор $\overrightarrow{OM}$ с вектором $\overrightarrow{OA}$) угол, содержащий 3720°.

Вращение луча OA в данной плоскости вокруг точки O может происходить в двух противоположных направлениях (против движения часовой стрелки и по ее движению).

Поэтому величину угла, полученного при вращении против движения часовой стрелки, принято выражать положительным числом, а образованного вращением по движению часовой стрелки — отрицательным числом.

---

* Прямолинейный отрезок OA, имеющий направление от начала O к концу A, называется вектором и обозначается $\overrightarrow{OA}$.

Например, если луч OA_1 совершит 10 полных оборотов по движению часовой стрелки и повернется в том же направлении еще на 120°, то мы скажем, что этим движением образован угол, равный $-3720°$ (минус 3720°).

Если луч OA_1 совершит один полный оборот против движения часовой стрелки, то его положение совпадет с первоначальным, а угол, образованный этим движением, будет равен 360° Если бы такое же вращение произошло по движению часовой стрелки, то угол был бы равен $-360°$.

Если луч OA_1 совершит пол-оборота против движения часовой стрелки, то он займет положение, противоположное первоначальному, а угол, образованный этим движением, будет равен 180°. Если бы такое же вращение произошло по движению часовой стрелки, то угол был бы равен $-180°$.

Если луч OM_1, не совершив никакого движения, находится в положении, совпадающем с лучом OA_1, то и в этом случае принято считать, что совпадающие лучи OM_1 и OA_1 также составляют угол, причем такой угол считается равным нулю.

Углы, по абсолютной величине большие 360°, мы можем наблюдать, например, при завертывании или отвертывании гайки ключом, при вращении воздушного винта и т. п.

Угол, описанный минутной стрелкой часов за 6,25 часа, содержит $-360° \cdot 6 + (-90°)$, т. е. $-2250°$. Секундная же стрелка за это время опишет угол $-135\,000°$.

§ 2. СИНУС

В круге произвольного радиуса r (рис. 140) проведем два взаимно перпендикулярных диаметра. Один из них, например A_1A, назовем первым диаметром, а другой B_1B — вторым.

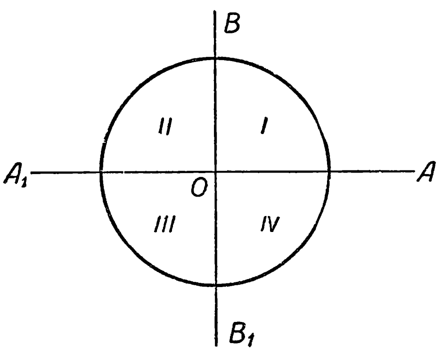


Рис. 140.

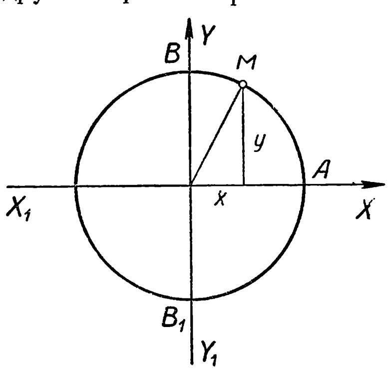


Рис. 141.

Первый диаметр независимо от его положения называют иначе начальным или горизонтальным. Второй диаметр называют вертикальным. Эти диаметры делят круг на четыре четверти (квадранта): первая четверть — AOB, вторая — BOA_1, третья — A_1OB_1, четвертая — B_1OA.

Для удобства обозначений и формулировок примем продолженный первый диаметр за ось абсцисс X_1X, а продолженный второй диаметр — за ось ординат Y_1Y (рис. 141).

Вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат O с произвольной точкой M окружности, называется радиусом-вектором точки M. Координаты точки M как текущей точки обозначим буквами x и y.

Радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$ называется начальным положением вращающегося радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Пусть текущий (подвижный) радиус-вектор совершил в плоскости координат вокруг точки O некоторое вращение в ту или другую сторону, начиная со своего начального положения $\overrightarrow{OA}$, и, наконец, занял положение OM. Каков бы ни был угол поворота α (положительный или отрицательный, больший или меньший по абсолютной величине 360°), т. е. где бы ни расположился вектор $\overrightarrow{OM}$, отношение $\frac{y}{r}$ называют синусом угла α и обозначают символом $\sin\alpha$. Таким образом, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$ (y — ордината конца текущего радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$, а r — его длина).

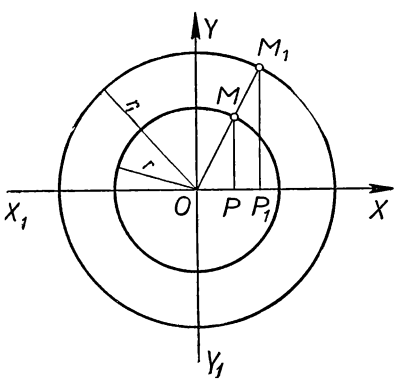


Рис. 142.

Длина r радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ является всегда положительным числом. Ордината же y положительна лишь для точек, лежащих в четвертях I и II; для точек же, лежащих в четвертях III и IV, она отрицательна. Для точек, лежащих на границе между верхней и нижней плоскостями, т. е. на оси X_1X, ордината y равна нулю.

Теорема. ***Величина $\sin\alpha$, т. е. отношения $\frac{y}{r}$, не зависит от величины радиуса окружности.***

Доказательство. Возьмем две окружности с радиусами r и r_1 (рис. 142) и пусть

$$MP = y \text{ и } M_1P_1 = y_1.$$

Пользуясь подобием треугольников и учитывая знаки ординат y и y_1, получим

$$\frac{MP}{OM} = \frac{M_1P_1}{OM_1}, \text{ т. е. } \frac{y}{r} = \frac{y_1}{r_1}.$$

Это равенство справедливо, где бы ни оказался расположенным радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Теорема доказана.

Графический способ нахождения приближенного значения отношения $\frac{y}{r}$. Построим на миллиметровой бумаге с помощью транспортира угол 20° (рис. 143) и опишем из его вершины как из центра окружность радиусом 100 *мм*.

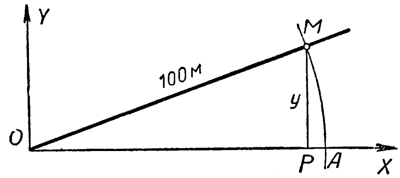


Рис. 143.

На рисунке 143 оказалось, что $y = MP = 34$ *мм*. Следовательно, для угла 20° отношение $\frac{y}{r}$ (т. е. значение синуса угла в 20°) равно $\frac{34}{100}$, т. е. 0,34 с точностью до 0,01. Итак, $\sin 20° = 0{,}34$. Таким же способом можно находить значение отношения $\frac{y}{r}$ и для любых других углов.

С помощью других (более совершенных) способов можно находить значение отношения $\frac{y}{r}$ с любой степенью точности. Например, для угла 20° отношение $\frac{y}{r}$ с точностью до 0,00001 равно 0,34202, т. е. $\sin 20° = 0{,}34202$.

Обратим внимание на то, что синусы углов, очень близких к нулю, являются числами, также очень близкими к нулю. Например,

$$\sin 2° = 0{,}0349; \quad \sin 1° = 0{,}0175;$$
$$\sin 30' = 0{,}0087; \quad \sin 10' = 0{,}0029.$$

Синусы углов, близких к 90°, близки к единице. Например,

$$\sin 88° = 0{,}9994; \quad \sin 89° = 0{,}9998; \quad \sin 89°30' = 0{,}9999.$$

Изменение синуса. Характер происходящих изменений синуса угла (т. е. отношения $\frac{y}{r}$) при изменениях угла α можно записать в виде следующей таблицы:

α	$0° \nearrow 90°$	$90° \nearrow 180°$	$180° \nearrow 270°$	$270° \nearrow 360°$	...
$\sin\alpha$	$0 \nearrow 1$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$	...

(A)

§ 3. ТАБЛИЦА * ЗНАЧЕНИЙ $\sin \alpha$ С ТОЧНОСТЬЮ ДО 0,001 ДЛЯ УГЛОВ ОТ 1 ДО 89°

α в градусах	$\sin \alpha$	α в градусах	$\sin \alpha$	α в градусах	$\sin \alpha$
1	0,017	31	0,515	61	0,875
2	0,035	32	0,530	62	0,883
3	0,052	33	0,545	63	0,891
4	0,070	34	0,559	64	0,899
5	0,087	35	0,574	65	0,906
6	0,105	36	0,588	66	0,914
7	0,122	37	0,602	67	0,921
8	0,139	38	0,616	68	0,927
9	0,156	39	0,629	69	0,934
10	0,174	40	0,643	70	0,940
11	0,191	41	0,656	71	0,946
12	0,208	42	0,669	72	0,951
13	0,225	43	0,682	73	0,956
14	0,242	44	0,695	74	0,961
15	0,259	45	0,707	75	0,966
16	0,276	46	0,719	76	0,970
17	0,292	47	0,731	77	0,974
18	0,309	48	0,743	78	0,978
19	0,326	49	0,755	79	0,982
20	0,342	50	0,766	80	0,985
21	0,358	51	0,777	81	0,988
22	0,375	52	0,788	82	0,990
23	0,391	53	0,799	83	0,993
24	0,407	54	0,809	84	0,995
25	0,423	55	0,819	85	0,996
26	0,438	56	0,829	86	0,998
27	0,454	57	0,839	87	0,9986
28	0,469	58	0,848	88	0,9994
29	0,485	59	0,857	89	0,9998
30	0,500	60	0,866		

(A)

Таблицу (A) нужно читать и понимать так: если угол α возрастает от 0 до 90°, то $\sin \alpha$ возрастает от 0 до 1; если угол α возрастает от 90 до 180°, то $\sin \alpha$ убывает от 1 до 0 и т. д. Если угол α станет возрастать от 360 до 450°, то $\sin \alpha$ снова станет возрастать от 0 до 1, т. е. процесс изменения $\sin \alpha$ станет повторяться после каждого полного оборота радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Поэтому

$$\sin(360° n + \alpha) = \sin \alpha,$$

где n — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

---

* Рассматривая эту таблицу, легко заметить, что синус угла изменяется не пропорционально углу. В самом деле, синус угла, например, 35° равен 0,574, а синус угла 70° равен 0,940. Мы видим, что в то время, как угол увеличился вдвое, его синус увеличился меньше, чем вдвое.

Обратим внимание на то, что

$$\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = \sin 360^\circ = 0; \qquad \sin 90^\circ = 1; \qquad \sin 270^\circ = -1;$$

$$\sin(-90^\circ) = -1; \quad \sin(-270^\circ) = -1.$$

Каждому значению α соответствует единственное определенное значение $\sin\alpha$, т. е. $\sin\alpha$ есть однозначная функция аргумента α.

Значения функции $\sin\alpha$ суть числа отвлеченные.

С изменением угла α изменяется и $\sin\alpha$. Однако могут быть случаи, когда неодинаковые углы имеют одинаковые синусы. Например,

$$\sin 90^\circ = 1; \quad \sin 450^\circ = 1; \quad \sin(-270^\circ) = 1.$$

Синус по своему абсолютному значению никогда не может быть больше единицы, т. е.

$$|\sin\alpha| \leqslant 1, \text{ или } -1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1.$$

Примечание. Символ sin не является синусом, а является лишь знаком синуса. Выражение же $\sin\alpha$ уже является синусом, а именно синусом угла α.

Синус острого угла. В прямоугольном треугольнике OMP (рис. 144) с острым углом α отрезок MP есть катет, противолежащий углу α, а отрезок OM есть гипотенуза. Поэтому синус острого угла α прямоугольного треугольника есть отношение катета, противолежащего углу α, к гипотенузе.

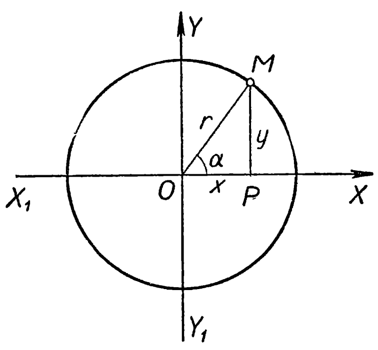
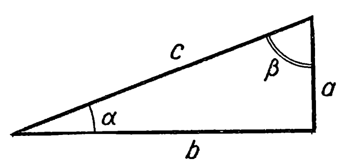


Рис. 144.



145.

Пусть в прямоугольном треугольнике катеты равны a и b, гипотенуза равна c и острые углы обозначены α и β (рис. 145). Тогда

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

и

$$\sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Задача. Найти сторону вписанного в круг правильного девятиугольника по данному радиусу круга.

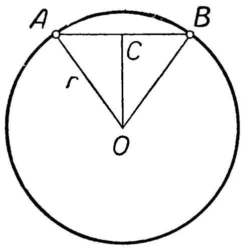


Рис. 146.

Пусть радиус круга равен r, а хорда AB есть сторона правильного девятиугольника. Пусть $OC \perp AB$ (рис. 146).
Тогда

$$\angle AOC = 20^\circ; \ OA = r \text{ и } AC = \frac{1}{2} AB.$$

Из прямоугольного треугольника AOC следует, что $\sin 20^\circ = \frac{AC}{r}$. Отсюда $AC = r \sin 20^\circ$ и $AB = 2r \sin 20^\circ = 2r \cdot 0{,}34202 = 0{,}68404\, r$.

С грубым приближением сторона правильного вписанного в круг девятиугольника равна $\frac{7}{10}$ радиуса.

§ 4. КОСИНУС

Все вопросы, изложенные в предыдущем параграфе, относительно отношения $\frac{y}{r}$, т. е. синуса угла, распространяются соответствующим образом и на отношение $\frac{x}{r}$. Отношение $\frac{x}{r}$ (рис. 144) называется косинусом угла α и обозначается символом $\cos \alpha$.

Итак, $\cos \alpha = \frac{x}{r}$.

Абсцисса x конца радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ положительна лишь для точек, расположенных в четвертях I и IV; для точек же, лежащих в четвертях II и III, она отрицательна. Для точек, лежащих на границе между левой и правой полуплоскостями, т. е. на оси Y_1Y, абсцисса x равна нулю.

Обратим внимание на то, что отношение $\frac{x}{r}$ для угла, близкого к нулю, т. е. косинус угла, близкого к нулю, близок к единице. Например,

$$\cos 2^\circ = 0{,}9994; \ \cos 1^\circ = 0{,}9998; \ \cos 30' = 0{,}9999.$$

Косинусы углов, близких к 90°, близки к нулю. Например,

$$\cos 88^\circ = 0{,}0349; \ \cos 89^\circ = 0{,}0175; \ \cos 89^\circ 30' = 0{,}0087;$$
$$\cos 89^\circ 50' = 0{,}0029.$$

Изменение косинуса. Характер происходящих изменений косинуса угла $\left(\text{т. е. отношения } \frac{x}{r}\right)$ при изменении угла α можно записать в виде следующей таблицы:

α	$0^\circ \nearrow 90^\circ$	$90^\circ \nearrow 180^\circ$	$180^\circ \nearrow 270^\circ$	$270^\circ \nearrow 360^\circ$	...
$\cos \alpha$	$1 \searrow 0$	$0 \searrow -1$	$-1 \nearrow 0$	$0 \nearrow 1$	...

Эту таблицу нужно читать и понимать так: если угол α возрастает от 0 до 90°, то косинус убывает от 1 до 0; если угол α возрастает от 90 до 180°, то $\cos\alpha$ убывает от 0 до -1 и т. д.

Если угол α станет возрастать от 360 до 450°, то $\cos\alpha$ снова станет убывать от 1 до 0, т. е. процесс изменения $\cos\alpha$ станет повторяться после каждого полного оборота радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Поэтому

$$\cos(360°n+\alpha)=\cos\alpha,$$

где n — любое целое число.

Обратим внимание на то, что

$$\cos 0°=1;\ \cos 90°=\cos 270°=0;\ \cos 180°=-1;$$
$$\cos(-180°)=-1;\ \cos(-90°)=0.$$

Каждому значению α соответствует единственное определенное значение $\cos\alpha$, т. е. $\cos\alpha$ есть однозначная функция аргумента α.

Значения функции $\cos\alpha$ суть числа отвлеченные.

С изменением угла α изменяется и $\cos\alpha$. Однако могут быть случаи, когда неодинаковые углы имеют одинаковые косинусы. Например,

$$\cos 90°=\cos 270°=\cos(-90°)=0;$$
$$\cos 180°=\cos(-180°)=\cos 540°=-1.$$

Косинус по своему абсолютному значению не может быть больше единицы, т. е. $|\cos\alpha|\leqslant 1$, или $-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$.

К о с и н у с о с т р о г о у г л а п р я м о у г о л ь н о г о т р е у г о л ь н и к а. В прямоугольном треугольнике OMP (рис. 147) с острым углом α отрезок OP есть катет, прилежащий к углу α, а отрезок OM есть гипотенуза. Поэтому косинус острого угла α прямоугольного треугольника есть отношение прилежащего катета к гипотенузе.

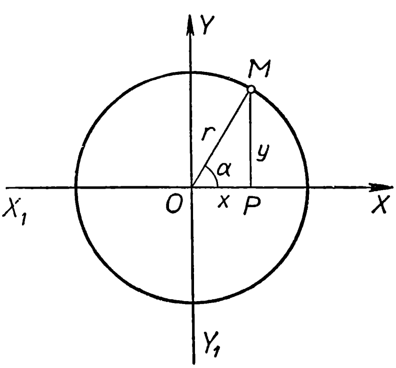


Рис. 147.

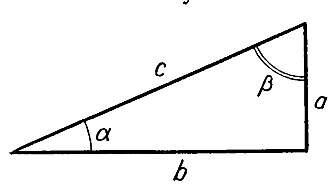


Рис. 148.

Пусть в прямоугольном треугольнике имеются катеты a и b, гипотенуза c, а острые углы обозначены α и β (рис. 148), тогда

$$\cos\alpha=\frac{b}{c};\ \cos\beta=\frac{a}{c}.$$

§ 5. ТАНГЕНС

Отношение $\frac{y}{x}$ (см. рис. 147) называется тангенсом угла α и обозначается символом $\operatorname{tg}\alpha$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$.

Отношение $\frac{y}{x}$ для угла, близкого к нулю, т. е. тангенс угла, близкого к нулю, является числом, близким к нулю. Например, $\operatorname{tg} 2° = 0{,}035$; $\operatorname{tg} 1° = 0{,}017$.

Если угол близок к 90°, но меньше, чем 90°, то его тангенс будет положительным числом, которое тем больше, чем ближе угол к 90°.

Когда радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ окажется расположенным в I четверти, то и ордината y и абсцисса x будут положительными, а потому будет положительным и отношение $\frac{y}{x}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$.

Если радиус-вектор окажется во II четверти, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Для III четверти $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и для IV четверти $\operatorname{tg}\alpha < 0$.

Если угол близок к 90°, но больше, чем 90°, то отношение $\frac{y}{x}$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$, будет числом отрицательным, которое по своей абсолютной величине тем больше, чем ближе угол к 90°.

Изменение тангенса. Изменения тангенса даны на следующей таблице:

α	$0° \nearrow 90°$	$90° \nearrow 180°$	$180° \nearrow 270°$	$270° \nearrow 360°$	...
$\operatorname{tg}\alpha$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$	...

Читается так: если угол α возрастает от 0 до 90°, то $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от нуля до плюс бесконечности; если угол α возрастает от 90 до 180°, то $\operatorname{tg}\alpha$ возрастает от минус бесконечности до нуля и т. д.

Процесс изменения $\operatorname{tg}\alpha$ повторяется после каждого пол-оборота радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$. Поэтому

$$\operatorname{tg}(180° n + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha,$$

где n — любое целое число.

Обратим внимание на то, что $\operatorname{tg} 0° = \operatorname{tg} 180° = \operatorname{tg} 360° = \operatorname{tg}(-180°) = \operatorname{tg}(-360°) = 0$. Тангенс угла 90° не существует, так как при $\alpha = 90°$ абсцисса x обращается в нуль и отношение $\frac{y}{x}$ теряет смысл.

По такой же причине не существует и тангенса угла 270°.

Наряду с этим принято писать, что $\operatorname{tg} 90° = \pm\infty$ (читается так: тангенс угла 90° равен плюс или минус бесконечности).

Также $\operatorname{tg} 270° = \pm\infty$.

Мы сказали, что $\operatorname{tg} 90°$ не существует и что $\operatorname{tg} 90° = \pm\infty$. Но в этих двух утверждениях нет противоречия. Когда мы говорим, что тангенс равен бесконечности, то это и значит, что он не существует.

Запись $\operatorname{tg} 90° = \pm\infty$ характеризует картину изменения тангенса вблизи угла 90° слева и справа от него. Когда угол α приближается к 90°, оставаясь меньше 90°, тангенс принимает положительные неограниченно возрастающие значения. Когда же угол α, приближаясь к 90°, остается больше 90°, то тангенс принимает отрицательные значения, также неограниченно возрастающие по своей абсолютной величине.

Каждому значению α, взятому на промежутке (0°; 90°) или (90°; 180°) и т. д., соответствует единственное определенное значение $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ есть на каждом из указанных промежутков однозначная функция аргумента α.

Значения функции $\operatorname{tg}\alpha$ есть числа отвлеченные.

С изменением угла α изменяется и $\operatorname{tg}\alpha$. Однако могут быть случаи, когда неодинаковые углы имеют одинаковые тангенсы. Например, $\operatorname{tg} 225° = \operatorname{tg} 45° = 1$.

Функция $\operatorname{tg}\alpha$, изменяясь, может принимать любое действительное значение.

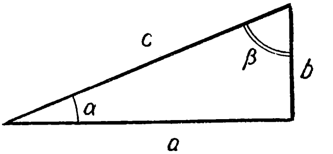


Рис. 149.

Тангенс острого угла прямоугольного треугольника. В прямоугольном треугольнике OMP (см. рис. 147) с острым углом α отрезок MP есть катет, противолежащий углу α, а OP прилежащий. Поэтому тангенс острого угла прямоугольного треугольника есть отношение противолежащего катета к прилежащему.

Возьмем прямоугольный треугольник с катетами a, b, гипотенузой c и острыми углами α и β (рис. 149), тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Замечание 1. Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ возникли исторически из таких задач, в которых надо было находить одни элементы треугольника в зависимости от других. Поэтому эти функции получили название тригонометрических функций. Слово «тригонометрия» составлено из греческих слов: «тригоном» — треугольник и «метрезис» — измерение. Но тригонометрические функции оказались необычайно мощным средством для решения не только геометрических вопросов, но и многочисленных весьма важных вопросов математического анализа, естествознания и техники.

Замечание 2. Знак sin называется не синусом, а лишь знаком синуса и сам по себе никакой величины не изображает. Он является знаком нового математического действия. Это относится и к знакам cos или tg.

Значения всех тригонометрических функций суть числа отвлеченные.

Замечание 3. Выражение $\sin^n \alpha$ надо понимать как $(\sin\alpha)^n$. Например,

$$\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2;\ \sin^2 30° = (\sin 30°)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$\sin^4 45° + \sin^4 60° = (\sin 45°)^4 + (\sin 60°)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{13}{16}.$$

Сказанное распространяется и на остальные тригонометрические функции.

§ 6. ФУНКЦИИ УГЛОВ 30°, 60° и 45°

Возьмем прямоугольный треугольник с острым углом 30° (рис. 150). Обозначим катет, лежащий против угла в 30°, буквой a.

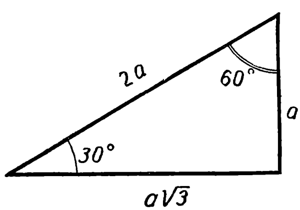


Рис. 150.

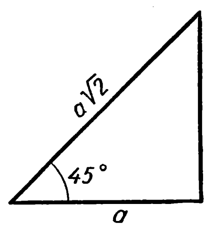


Рис. 151.

Тогда гипотенуза будет равна $2a$; другой катет будет равен (по теореме Пифагора) $a\sqrt{3}$. Поэтому

$$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}; \qquad \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos 60° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \qquad \operatorname{tg} 60° = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}.$$

Возьмем прямоугольный треугольник с острым углом 45° (рис. 151). Обозначим каждый из равных катетов буквой a. Тогда гипотенуза будет равна $a\sqrt{2}$.

Поэтому

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

УПРАЖНЕНИЯ К § 1—6

250. Построить на миллиметровой бумаге с помощью транспортира углы 20°, 40°, 80°, —1100° и измерением соответствующих отрезков найти значения синусов и тангенсов этих углов (полученные результаты сравнить со значениями, приведенными в таблице).

251. Определить угол α, если:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; Отв. 60°.

б) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; Отв. 300°.

в) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $-90^\circ < \alpha < 0^\circ$; Отв. —60°.

г) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; Отв. 150°.

д) $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Отв. 225°.

252. Синусы каких углов, заключенных между 0° и 90°, выражаются числами

$$\frac{\sqrt{1}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}?$$

253. Найти значение выражений:

а) $\dfrac{2\sin 90^\circ + \cos 180^\circ}{2\operatorname{tg} 45^\circ - \cos 180^\circ}$; Отв. $\frac{1}{3}$.

б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha}$ при $\alpha = 60^\circ$. Отв. $\frac{5}{3}$.

§ 7. РАДИАННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

Для измерения углов употребляются две основные единицы: градус и радиан.

Градус есть $\frac{1}{90}$ часть прямого угла.

Радианом называется такой центральный угол, которому соответствует дуга, по длине равная радиусу. Угол AOM будет радианом, если длина дуги AbM равна длине радиуса OA (рис. 152). Если длина дуги в два раза больше длины радиуса, то центральный угол будет содержать два радиана. Если точка M пройдет по окружности путь, равный по длине, например, 40 радиусам, то угол, описанный радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$, будет содержать 40 радианов и т.д.

Если длина дуги равна l, а длина радиуса R, то число радианов ω, содержащихся в соответствующем угле, будет равно отношению $\frac{l}{R}$, т. е.

$$\omega = \frac{l}{R}.$$

Предполагается, что длина дуги и длина радиуса выражается в одной и той же единице длины. При $l = 2\pi R$

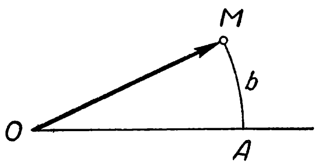


Рис. 152.

$$\omega = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Следовательно, полный угол, т. е. угол в 360°, содержит 2π радианов.

Развернутый угол содержит π радианов. Так как в развернутом угле содержится 180°, то π радианов содержат 180°, а один радиан равен $\frac{180^\circ}{\pi}$.

Взяв $\pi = 3{,}14159$, получим, что 1 радиан $= 57^\circ 17' 44''$.

Нельзя говорить, что π равно 180°, а следует говорить π радианов равны 180°.

Если же взять, скажем, π рублей, то получится нечто другое, а именно получится приблизительно 3 рубля 14 копеек.

Чтобы перевести градусное измерение в радианное, надо исходить из равенства

$$180^\circ = \pi \text{ радианам.}$$

Найдем, например, радианное измерение угла 75°.

$$180^\circ = \pi \text{ радианам;}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ радианам;}$$

$$75^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 75 \text{ радианам}$$

Чтобы перевести радианное измерение в градусное, надо исходить из равенства

$$\pi \text{ радианов} = 180^\circ.$$

Найдем, например, градусное измерение угла, содержащего $\frac{7}{24}\pi$ радианов.

$$\pi \text{ радианов} = 180^\circ;$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi};$$

$$\frac{7}{24}\pi \text{ радианов} = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{7}{24}\pi = 52^\circ 30'.$$

Полезно запомнить значения простейших углов в радианном измерении, приводимые в нижеследующей таблице:

360°	180°	90°	45°	30°	22°30′	120°	150°	270°
2π	π	$\pi/2$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/8$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	$3\pi/2$

§ 8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОТВЛЕЧЕННОГО ЧИСЛА

Выражение, например, $\sin 2°$ означает синус угла, содержащего 2°.

Общепринято считать (по определению), что выражение $\sin 2$ т. е. синус отвлеченного числа 2, есть синус угла, содержащего два радиана. Выражение $\sin 3$ есть синус угла, содержащего три радиана; $\sin 0{,}184$ есть синус угла, содержащего 0,184 радиана; $\sin(\cos 60°)$ есть синус угла, содержащего $\frac{1}{2}$ радиана; $\sin \pi$ есть синус угла, содержащего π радианов, т. е. угла, содержащего 180°, и т. д.

Очевидно, что

$$\sin 2 > 0, \text{ а } \sin 5 < 0,$$

так как угол, содержащий 2 радиана, заключается между 90° и 180°, а угол, содержащий 5 радианов, — между 270° и 360°.

Очевидно также, что

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1; \quad \sin\frac{3\pi}{2} = -1; \quad \sin 2\pi = 0;$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}; \ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и т. д.}$$

Запись $\sin\pi = \sin 180°$ является правильной; запись же $\pi = 180°$ будет неправильной, так как не π равняется 180°, а π радианов равняются 180°.

Все сказанное о синусе отвлеченного числа распространяется соответствующим образом и на остальные тригонометрические функции отвлеченного числа.

Определение. ***Тригонометрической функцией отвлеченного числа x (числового аргумента x) называется функция угла, содержащего x радианов.***

В дальнейшем мы будем употреблять на равных правах выражения: «тригонометрическая функция угла» или «тригонометрическая функция числа». Например, говорить «синус угла» или «синус числа» и т. д.

Таблица

значений синуса числового аргумента x (с точностью до 0,0001) для значений от $x=0$ до $x=1,5$, взятых через 0,1

x	$\sin x$	x	$\sin x$
0,0	0,0000	0,8	0,7171
0,1	0,0998	0,9	0,7833
0,2	0,1987	1,0	0,8415
0,3	0,2955	1,1	0,8912
0,4	0,3894	1,2	0,9320
0,5	0,4794	1,3	0,9636
0,6	0,5646	1,4	0,9854
0,7	0,6442	1,5	0,9975

Таблица

значений некоторых углов в радианной и градусной мере

Число радианов	Соответствующее число градусов	Число радианов	Соответствующее число градусов
0,0	0,00	0,8	45,84
0,1	5,73	0,9	51,57
0,2	11,46	1,0	57,30
0,3	17,19	1,1	63,03
0,4	22,92	1,2	68,76
0,5	28,65	1,3	74,49
0,6	34,38	1,4	80,22
0,7	40,11	1,5	85,99

Более полные таблицы значений тригонометрических функций числового аргумента и значений углов в радианной и градусной мере имеются, например, в книге «Математические таблицы» (пособие для учителей, Учпедгиз, 1952 г.).

§ 9. ПЕРВЫЕ ТРИ ГРУППЫ ФОРМУЛ

Выражения функций угла $-\alpha$ через функции угла α (первая группа формул)

Концы радиусов-векторов, соответствующих углам $-\alpha$ и α, имеют одну и ту же абсциссу x (рис. 153). Поэтому $\cos(-\alpha)=$ $=\cos\alpha$. Например,

$$\cos(-5124^\circ)=\cos 5124^\circ;\ \cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha).$$

Это означает, что косинус является четной функцией (см. стр. 319).

Концы радиусов-векторов, соответствующих углам $-\alpha$ и α, имеют одинаковые по абсолютной величине и противоположные по знаку ординаты (см. рис. 153). Поэтому $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Например,

$$\sin(-1725^\circ) = -\sin 1725^\circ;$$
$$\sin(\alpha - \beta) = -\sin(\beta - \alpha).$$

Это означает, что синус является нечетной функцией (см. стр. 319).

Концы радиусов-векторов, соответствующих углам $-\alpha$ и α, имеют одну и ту же абсциссу x и ординаты, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку (см. рис. 153). Поэтому

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Например,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = -\operatorname{tg}(\beta - \alpha);$$
$$\operatorname{tg}(-3000^\circ) = -\operatorname{tg} 3000^\circ.$$

Это означает, что тангенс является также нечетной функцией. Итак, мы получили первую группу формул:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha;$$
$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

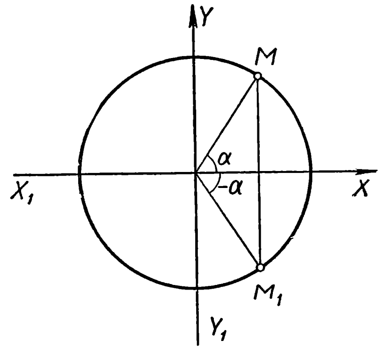


Рис. 153.

Эта группа позволяет выражать функции отрицательных углов через функции положительных.

Формулы приведения (вторая группа формул)

Формулами приведения называются следующие формулы:

$$\sin(90^\circ + \beta) = \cos\beta \qquad \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta;$$
$$\cos(90^\circ + \beta) = -\sin\beta; \qquad \cos(90^\circ - \beta) = \sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ + \beta) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta};$$
$$\sin(180^\circ + \beta) = -\sin\beta; \qquad \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta;$$
$$\cos(180^\circ + \beta) = -\cos\beta; \qquad \cos(180^\circ - \beta) = -\cos\beta;$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ + \beta) = \operatorname{tg}\beta; \qquad \operatorname{tg}(180^\circ - \beta) = -\operatorname{tg}\beta;$$
$$\sin(270^\circ + \beta) = -\cos\beta; \qquad \sin(270^\circ - \beta) = -\cos\beta;$$
$$\cos(270^\circ + \beta) = \sin\beta; \qquad \cos(270^\circ - \beta) = -\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(270^\circ + \beta) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(270^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta};$$
$$\sin(360^\circ - \beta) = -\sin\beta;$$
$$\cos(360^\circ - \beta) = \cos\beta;$$
$$\operatorname{tg}(360^\circ - \beta) = -\operatorname{tg}\beta.$$

Заучивать эти формулы не нужно. Нужно лишь усвоить правило, по которому они записываются. Разъясним это правило.

Перед правой частью формулы ставится знак минус лишь в тех случаях, когда левая часть (в предположении, что β — острый положительный угол) является числом отрицательным.

Примеры.

$\sin(180°+\beta)$ является отрицательным числом, так как $180° < 180°+\beta < 270°$. Поэтому в формуле

$$\sin(180°+\beta) = -\sin\beta$$

в правой части поставлен знак минус.

$\sin(180°-\beta)$ является положительным числом, так как $90° < 180°-\beta < 180$.

Поэтому в формуле

$$\sin(180°-\beta) = \sin\beta$$

знака минус в правой части нет.

Продолжим разъяснение дальше. В тех формулах, в которых фигурирует угол 180° или 360°, название функции в правой части берется то же, что и в левой части.

$$\sin(180°+\beta) = -\sin\beta;$$
$$\cos(360°-\beta) = \cos\beta;$$
$$\operatorname{tg}(180°+\beta) = \operatorname{tg}\beta.$$

В тех же формулах, в которых фигурируют углы 90° или 270°, название синус изменяется на косинус, название косинус — на синус, вместо тангенса появляется единица, деленная на тангенс.

$$\sin(90°+\beta) = \cos\beta; \quad \cos(90°+\beta) = -\sin\beta; \quad \operatorname{tg}(270°-\beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Приведем примеры на применение правила в целом.

Пусть требуется написать формулу для $\cos(180°+\beta)$.

Так как $180° < 180°+\beta < 270°$, значит, $\cos(180°+\beta)$ есть число отрицательное. Поэтому перед правой частью ставится знак минус. Далее, в выражении $\cos(180°+\beta)$ фигурирует угол 180°. Поэтому название функции берется то же, что и в левой части. Получим:

$$\cos(180°+\beta) = -\cos\beta.$$

Пусть требуется написать формулу для $\operatorname{tg}(90°+\beta)$.

Так как $90° < 90°+\beta < 180°$, значит, $\operatorname{tg}(90°+\beta)$ — число отрицательное. Поэтому в правой части ставится знак минус. Далее, в выражении $\operatorname{tg}(90°+\beta)$ фигурирует угол 90°. Поэтому тангенс заменяется на единицу, деленную на тангенс. Получаем:

$$\operatorname{tg}(90°+\beta) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Примечание. Выражение $\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$ можно записать в виде $\mathrm{tg}^{-1}\beta$. Тогда формулу $\mathrm{tg}(90^\circ+\beta)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta}$ можно записать в виде $\mathrm{tg}(90^\circ+\beta=-\mathrm{tg}^{-1}\beta$.

Теперь в качестве примера докажем справедливость каких-нибудь двух формул, например формул для $\sin(180^\circ+\beta)$ и $\mathrm{tg}(270^\circ+\beta)$.

Рассмотрим положение радиуса-вектора для углов β и $180^\circ+\beta$ (рис. 154).

Ординаты концов этих радиусов-векторов одинаковы по абсолютной величине и противоположны по знаку. Поэтому $\sin(180^\circ+\beta)=-\sin\beta$.

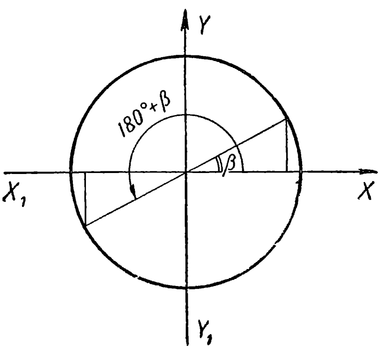


Рис. 154.

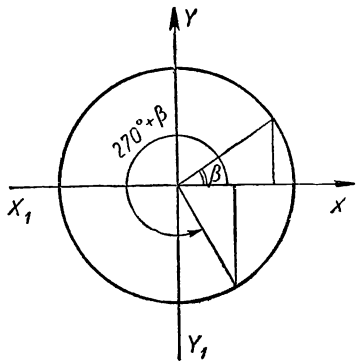


Рис. 155.

Рассмотрим положение радиусов-векторов для углов β и $270^\circ+\beta$ (рис. 155).

Ордината конца второго радиуса-вектора равна минус абсциссе первого. Абсцисса же конца второго радиуса-вектора равна ординате конца первого. Поэтому

$$\mathrm{tg}(270^\circ+\beta)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Записывая и доказывая формулы приведения, мы предполагали, что β есть острый положительный угол. Однако все эти формулы справедливы в общем случае, т. е. для любых значений β. Например,

$$\sin(180^\circ+3726^\circ)=-\sin 3726^\circ.$$

На доказательстве общности формул приведения мы останавливаться не будем.

С помощью формул, выражающих функции угла $-\alpha$ через функции угла α, и формул приведения можно функцию любого угла выразить через функцию угла, находящегося в границах от 0 до 45° включительно.

Примеры.

а) $\cos(-960°) = \cos 960° = \cos(2\cdot 360° + 240°) =$

$$\begin{array}{r|l} -\,960° & 360° \\ \underline{720} & 2 \\ 240 & \end{array} \qquad = \cos 240° = \cos(270° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}.$$

б) $\operatorname{tg}(-1395°) = -\operatorname{tg} 1395° = -\operatorname{tg}(3\cdot 360° + 315°) =$

$$\begin{array}{r|l} -\,1395° & 360° \\ \underline{1080} & 3 \\ 315 & \end{array} \qquad = -\operatorname{tg} 315° = -[\operatorname{tg}(360° - 45°)] = -[-\operatorname{tg} 45°] = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

в) $\operatorname{tg} 120° = \operatorname{tg}(90° + 30°) = -\frac{1}{\operatorname{tg} 30°} = -\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = -\sqrt{3}.$

Дополнительные углы. Два угла β и γ называются дополнительными, если их сумма равна 90°. Например, дополнительными будут следующие пары углов:
10° и 80°; 110° и $-20°$; $30° + \beta$ и $60° - \beta$; $45° + \alpha$ и $45° - \alpha$ и т. д.

Чтобы получить угол, дополнительный данному углу ω, достаточно из 90° вычесть ω. Например, если данный угол равен 1°, то ему дополнительный угол будет равен $90° - 1°$, т. е. 89°. Если данный угол 120°, то ему дополнительный угол будет равен $90° - 120°$, т. е. $-30°$.

Если данный угол $\gamma + 40°$, то дополнительный угол будет равен $90° - (\gamma + 40°)$, или $50° - \gamma$.

Формулы приведения $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$; $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(90° - \alpha)$ можно сформулировать так:

Косинус любого угла равен синусу дополнительного.

Синус любого угла равен косинусу дополнительного.

Тангенс любого угла равен минус первой степени тангенса дополнительного угла.

Формулы приведения для тригонометрических функций числового аргумента

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}^{-1}\alpha; \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha; \qquad \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg}^{-1}\alpha \text{ и т. д.}$$

Формулы, связывающие функции одного и того же угла (третья группа формул)

Первая формула: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Вывод. Пусть α — какой угодно угол и $\overrightarrow{OM}$ — соответствующий ему радиус-вектор. Где бы ни оказался расположенным радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$,

$$\sin\alpha=\frac{y}{r} \text{ и } \cos\alpha=\frac{x}{r}.$$

Отсюда

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{y^2}{r^2}+\frac{x^2}{r^2}=\frac{y^2+x^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1.$$

Вторая формула: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

Вывод. По определению

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\quad \cos\alpha=\frac{x}{r};$$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{y}{r}:\frac{x}{r}=\frac{y}{x}, \text{ но } \frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

Эта группа формул позволяет выражать все тригонометрические функции в зависимости от любой одной из них.

Примеры.

1. Выразить $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ в зависимости от $\sin\alpha$. Из формулы $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ следует, что

$$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha \text{ или } \cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Из формулы $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$ следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

(Аналогично можно $\sin\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ выразить в зависимости от $\cos\alpha$.)

Мы здесь получили для $\cos\alpha$ и для $\operatorname{tg}\alpha$ по два значения (положительное и отрицательное). Чем это объяснить? Это объясняется так. Если $\sin\alpha$ есть положительное число, то радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, соответствующий углу α, расположится либо в четверти I либо в четверти II. В первом случае $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ окажутся положительными числами, а во втором — отрицательными.

Если $\sin\alpha$ есть отрицательное число, то $\overrightarrow{OM}$ расположится либо в четверти III, либо в IV. В первом случае $\cos\alpha$ окажется отрицательным числом, а во втором — положительным, т. е. опять может иметь два значения. В первом случае $\operatorname{tg}\alpha$ окажется положительным, а во втором — отрицательным, т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ может иметь два значения.

Выразить $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ в зависимости от $\sin\alpha$, зная, что $90° < \alpha < 180°$.

При данных условиях $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$ должны быть числами отрицательными. Поэтому

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} \text{ и } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}.$$

Здесь мы получим только по одному ответу, так как знали, что радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ расположен в четверти II.

2. Выразить $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в зависимости от $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1+\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Отсюда $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, или $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

Далее, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, или $\sin\alpha = \cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

Отсюда $\sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

УПРАЖНЕНИЯ К § 7—9

254. Упростить выражения:

$\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$; Отв. $\sin^3\alpha$.

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha$; Отв. $\cos^{-2}\alpha$.

$\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$; Отв. $1-\cos\alpha$.

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$; Отв. 2.

$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$; Отв. $\sin^2\alpha$.

$\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$. Отв. 1.

Найти значение выражения

$$\frac{\sin^2(\alpha+15°)+\sin^2 2\alpha}{\sin 3\alpha} \text{ при } \alpha=30°.$$ Отв. $\frac{5}{4}$.

255. Найти радианную меру углов 210° и 750°.

Отв. $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{25\pi}{6}$.

256. Найти градусную меру углов, содержащих $\frac{7}{12}\pi$ и $\frac{49}{36}\pi$ радианов. Отв. 105°; 245°.

257. Какими числами, положительными или отрицательными, являются $\cos 2^\circ$ и $\cos 2$.

Отв. $\cos 2^\circ > 0$; $\cos 2 < 0$.

258. Найти значение выражений:

а) $\sin^3\left(\pi\cos^2\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\operatorname{tg}^3\left(3\pi\sin^2\frac{\pi}{6}\right)$.

Отв. а) 1; б) — 1.

259. Упростить выражение

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi-\alpha)\sin(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}.$$

Отв. $\operatorname{tg}\alpha$.

260. Упростить произведение

$$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{tg}^{-1}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right).$$

Отв. $-\cos^2\alpha$.

261. Найти значения x, заключенные между 0 и $\frac{\pi}{2}$ и удовлетворяющие уравнению $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

Указание. Если x заключено в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $2x$ будет заключено в границах 0 до π.

Отв. $x_1=\frac{\pi}{12}$ и $x_2=\frac{5\pi}{12}$, или $x_1=15^\circ$ и $x_2=75^\circ$.

ГЛАВА XXVIII

ПОСЛЕДУЮЩИЕ ГРУППЫ ОСНОВНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

§1. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ (ЧЕТВЕРТАЯ ГРУППА)

Основными формулами сложения являются следующие:

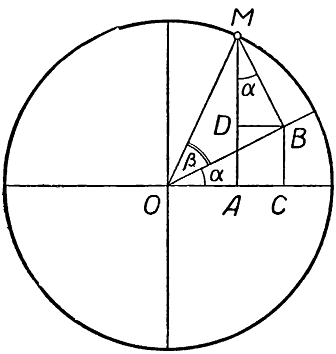


Рис. 156.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Первая из этих формул читается так: синус суммы двух чисел равен синусу первого числа, умноженному на косинус второго, плюс косинус первого на синус второго.

Аналогично читаются и остальные формулы.

Теперь перейдем к выводам и доказательствам.

В ы в о д ф о р м у л с и н у с а с у м м ы и к о с и н у с а с у м м ы (п р и о г р а н и ч е н н ы х у с л о в и я х). Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$ (рис. 156). Проведем $MA\perp OC$, $MB\perp OB$, $BC\perp OC$, $BD\parallel CA$.

Тогда

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{MA}{OM}=\frac{DA+MD}{OM}=\frac{BC+MD}{OM}=\frac{BC}{OM}+\frac{MD}{OM}=$$
$$=\frac{BC}{OB}\cdot\frac{OB}{OM}+\frac{MD}{MB}\cdot\frac{MB}{OM}=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta^*.$$

* Углы BMD и BOC равны между собой как углы с взаимно перпендикулярными сторонами.

Аналогично

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OA}{OM}=\frac{OC-AC}{OM}=\frac{OC-DB}{OM}=$$
$$=\frac{OC}{OM}-\frac{DB}{OM}=\frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OM}-\frac{DB}{MB}\cdot\frac{MB}{OM}=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Доказательство общности. Пусть требуется доказать общность каждой из двух выведенных формул:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Это, значит, требуется доказать, что каждая из них справедлива при любых значениях α и β, а не только при значениях, удовлетворяющих неравенствам: $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$.

Требующееся доказательство мы расчленим на пять последовательных этапов:

1. Пусть $\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

Тогда $\sin(\alpha+\beta)=\sin\frac{\pi}{2}=1$.

Наряду с этим

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$
$$=\sin\alpha\cdot\sin\alpha+\cos\alpha\cdot\cos\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Следовательно, при $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ формула $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ остается в силе, так как ее левая и правая части обращаются в единицу, как это было показано выше.

Подобным же образом можно доказать, что при $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ остается в силе и формула $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

2. Пусть $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$.

Примем $\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\alpha$ и $\beta_1=\frac{\pi}{2}-\beta$.

Тогда $0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta_1<\frac{\pi}{2}$ и $\alpha_1+\beta_1<\frac{\pi}{2}$.

Для α_1 и β_1, как это уже доказано, будет справедливой формула $\sin(\alpha_1+\beta_1)=\sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1$.

Заменяя теперь α_1 и β_1 их выражениями через α и β, получим:

$$\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$$

или

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta.$$

Это свидетельствует о справедливости формулы при

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2} \text{ и } \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi.$$

То же самое можно доказать и по отношению к формуле

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

3. На третьем этапе мы докажем следующее положение. Если формулы

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

и

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

справедливы для каких-нибудь значений α и β, то они будут справедливы и в том случае, если одно из значений α и β мы увеличим на $\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим выражение $\sin(\alpha+\gamma)$, в котором $\gamma=\beta+\frac{\pi}{2}$.

Легко видеть, что

$$\sin(\alpha+\gamma)=\sin\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]=\cos(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\alpha\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\cos\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\cos\gamma.$$

Итак, оказалось, что

$$\sin(\alpha+\gamma)=\sin\alpha\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma,$$

т. е. наша формула осталась в силе.

То же самое можно доказать и по отношению к формуле

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

4. На четвертом этапе докажем, что рассматриваемые нами две формулы справедливы для любых положительных значений α и β.

Пусть α и β — любые положительные числа. Тогда найдутся такие целые числа m и n, что $\alpha=\frac{\pi}{2}\cdot m+\alpha_1$ и $\beta=\frac{\pi}{2}\cdot n+\beta_1$, где будет $0<\alpha_1<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta_1<\frac{\pi}{2}$ и $0<\alpha_1+\beta_1<\pi$.

По доказанному ранее наши формулы справедливы для α_1 и β_1. По доказанному же в предыдущем этапе они будут оставаться справедливыми, если к α прибавим последовательно m раз, а к β n раз по $\frac{\pi}{2}$. Следовательно, наши формулы останутся в силе и для произвольных положительных чисел α и β.

5. Наконец, докажем, что наши формулы справедливы и для любых отрицательных чисел α и β.

Пусть α и β — любые отрицательные числа. Тогда найдутся такие целые числа m и n, что суммы $\alpha+2m\pi$ и $\beta+2n\pi$ окажутся числами положительными, которые обозначим соответственно через α_1 и β_1.

Для положительных чисел α_1 и β_1 по уже доказанному наши формулы

$$\sin(\alpha_1+\beta_1)=\sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1;$$
$$\cos(\alpha_1+\beta_1)=\cos\alpha_1\cos\beta_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1$$

справедливы.

В эти формулы подставим $\alpha+2m\pi$ вместо α_1 и $\beta+2n\pi$ вместо β_1. Тогда получим:

$$\sin[(\alpha+2m\pi)+(\beta+2n\pi)]=\sin(\alpha+2m\pi)\cos(\beta+2n\pi)+$$
$$+\cos(\alpha+2m\pi)\sin(\beta+2n\pi).$$
$$\cos[(\alpha+2m\pi)+(\beta+2n\pi)]=\cos(\alpha+2m\pi)\cos(\beta+2n\pi)-$$
$$-\sin(\alpha+2m\pi)\sin(\beta+2n\pi).$$

Отсюда вследствие периодичности тригонометрических функций получим:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Таким образом, справедливость формул доказана и для отрицательных значений α и β.

В тех случаях, когда α или β равны $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, справедливость наших формул можно доказать непосредственной проверкой.

Итак, доказано, что наши две формулы справедливы при любых значениях α и β. Этим и доказана общность каждой из этих формул.

В ы в о д о с т а л ь н ы х ф о р м у л с л о ж е н и я. Опираясь на то, что формулы

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

и

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

верны при любых значениях α и β, можно все остальные формулы сложения вывести очень кратким путем.

Действительно, рассматривая разность $\alpha-\beta$ как сумму $\alpha+(-\beta)$, получим:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Далее,

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]=$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

Наконец,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Аналогично получим, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы сложения позволяют находить тригонометрическую функцию суммы или разности двух углов через тригонометрические функции самих этих углов.

Например,

$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=$$
$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$
$$\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=$$
$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ=$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$
$$\operatorname{tg}15^\circ=\operatorname{tg}(45^\circ-30^\circ)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}30^\circ}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=$$
$$=\frac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6}=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}.$$

Примеры.

1. Доказать тождество

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha).$$

Доказательство.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+2\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\beta-\alpha)}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha).$$

2. Доказать тождество

$$\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$$

Доказательство.

$$\frac{\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)^2+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)^2}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\beta+2\cos^2\alpha\sin^2\beta}{2\cos^2\alpha\cos^2\beta}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha\cos^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}+\frac{\cos^2\alpha\sin^2\beta}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}=\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta.$$

3. Доказать тождество

$$\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(120-\alpha)=0.$$

Доказательство.

$$\cos\alpha+\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(120^\circ-\alpha)=$$
$$=\cos\alpha+\cos 120^\circ\cos\alpha-\sin 120^\circ\sin\alpha+\cos 120^\circ\cos\alpha+$$
$$+\sin 120^\circ\sin\alpha=\cos\alpha+2\cos 120^\circ\cos\alpha=\cos\alpha+$$
$$+2\cos(90^\circ+30^\circ)\cos\alpha=\cos\alpha+2(-\sin 30^\circ)\cos\alpha=\cos\alpha+$$
$$+2\left(-\frac{1}{2}\right)\cos\alpha=0.$$

§ 2. ФОРМУЛЫ УМНОЖЕНИЯ (ПЯТАЯ ГРУППА)

Основными формулами умножения являются следующие:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha;\quad \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Первая из этих формул читается так: синус двойного угла равен удвоенному синусу данного угла, умноженному на косинус того же угла.

Полезно эту формулу читать и так: синус любого угла равен удвоенному синусу половины этого угла, умноженному на косинус также половины этого угла.

Например,

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2};$$

$$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Соответствующим образом читаются и формулы:

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Вывод основных формул умножения.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Из основных формул умножения вытекают и такие формулы:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2};\quad \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha.$$

Основные формулы умножения позволяют находить значения тригонометрических функций удвоенного угла по данному значению какой-либо тригонометрической функции самого угла.

Например, если $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$,

то

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}.$$

Последовательное применение формул сложения позволяет выражать тригонометрические функции углов 3α, 4α, 5α и т. д. через тригонометрические функции угла α.

Примеры.

1.
$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha) = \\ &= \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha = \\ &= 2\sin\alpha\cos\alpha\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = \\ &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha) = \\ &= \cos 2\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha\sin\alpha = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cos\alpha - \\ &- 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha = \cos^3\alpha - \\ &- 3\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.\end{aligned}$$

По значениям тригонометрических функций, например 1°, можно при помощи формул сложения найти значения тригонометрических функций углов, содержащих любое целое число градусов.

3. Доказать тождество

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Доказательство.

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=$$

$$=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$$

$$=\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

§ 3. ФОРМУЛЫ ДЕЛЕНИЯ (ШЕСТАЯ ГРУППА)

Основными формулами деления являются следующие:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Чтобы вывести эти формулы, воспользуемся уже известными нам равенствами:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1;$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha.$$

Складывая и вычитая, получим соответственно:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha;$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha.$$

Отсюда легко получаются написанные выше две формулы деления.

Формулы деления позволяют находить значение тригонометрической функции половинного угла по данному значению функции самого угла.

Например, если $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, то

$$\sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Выведем еще формулы и для $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Полезно знать формулы для $1+\cos\alpha$ и $1-\cos\alpha$. Складывая и вычитая почленно равенства

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2};$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

получим соответственно:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Полезность этих двух последних формул заключается, в частности, в том, что они преобразовывают выражения $1+\cos\alpha$ и $1-\cos\alpha$ к виду, удобному для логарифмирования. Этими формулами приходится очень часто пользоваться.

Формулы понижения степени для $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ позволяют вторые степени $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражать через первую степень $\cos 2\alpha$.

Действительно, складывая и вычитая почленно равенства

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1;$$
$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha,$$

получим соответственно:

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha;$$
$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha.$$

Отсюда

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$
$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}.$$

§ 4. ФОРМУЛЫ, ВЫРАЖАЮЩИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УГЛА ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО УГЛА (СЕДЬМАЯ ГРУППА)

Легко понять следующие последовательные преобразования

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак, мы получили две формулы:

1) $$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$ 2) $$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Отсюда сразу вытекает еще и следующая формула:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Рассматривая эти формулы, легко заметить, что все тригонометрические функции угла α выражаются через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ рационально, т. е. с помощью только одних четырех действий. (Вспомним, что, например, $\sin\alpha$ выражается через $\operatorname{tg}\alpha$ иррационально:

$$\sin\alpha=\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\Bigg).$$

§ 5. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ И РАЗНОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ (ВОСЬМАЯ ГРУППА)

Основными формулами преобразования суммы и разности тригонометрических функций являются следующие:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Первая из этих формул читается так: сумма синусов двух углов равна удвоенному произведению синуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности.

Соответствующим образом читаются и остальные формулы.

Вывод этих формул.

Складывая и вычитая почленно известные нам равенства

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$

получим соответственно:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y.$$

Положим, $x+y=\alpha,\ x-y=\beta$.

Тогда $x=\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad y=\frac{\alpha-\beta}{2}.$

При этих обозначениях получим:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Складывая и вычитая почленно равенства

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y;$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

и изменяя обозначения, получим:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Выведенные формулы справедливы при любых значениях α и β, так как, каковы бы ни были числа α и β, можно подобрать такие x и y, чтобы соблюдались соотношения

$$\begin{cases}x+y=\alpha;\\ x-y=\beta,\end{cases}$$

в чем легко убедиться, разрешив эту систему относительно x и y.

Сумма и разность тангенсов

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Аналогично $$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

§ 6. ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (ДЕВЯТАЯ ГРУППА)

Такими формулами являются:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Вывод. Складывая почленно равенства

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta);$$
$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha-\beta),$$

получим:

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta).$$

Отсюда

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}.$$

Складывая и вычитая почленно равенства

$$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta);$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

и деля полученные результаты на 2, получим соответственно:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2};$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}.$$

Примеры.

1. Зная, что $\cos\alpha=\frac{9}{10}$ и что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, найти $\cos\frac{\alpha}{2}$.

Пользуясь формулой $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$, получим:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=+\sqrt{\frac{1+\frac{9}{10}}{2}}=+\sqrt{\frac{19}{20}}.$$

2. Зная, что $\cos\alpha=\frac{9}{10}$ и что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, найти $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Пользуясь формулой $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, найдем, что

$$\sin\alpha=+\sqrt{1-\frac{81}{100}}=+\frac{\sqrt{19}}{10}.$$

Пользуясь формулой $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, найдем, что

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{\sqrt{19}}{10}}{1+\frac{9}{10}}=\frac{\sqrt{19}}{19}.$$

3. Преобразовать к виду, удобному для логарифмирования, выражение $1+\sin\alpha+\cos\alpha$:

$$1+\sin\alpha+\cos\alpha=(1+\cos\alpha)+\sin\alpha=$$
$$=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$
$$=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

4. Преобразовать к виду, удобному для логарифмирования, выражение

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$$

Применяя формулы понижения степени, получим:

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1-\cos 2\beta}{2}=$$
$$=\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{2}=\frac{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2}=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

5. Зная, что $\operatorname{tg}\alpha=3$, найти $\sin 2\alpha$.

Полагая в формуле $\sin\gamma=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}$, что $\gamma=2\alpha$, получим:

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot 3}{1+3^2}=0{,}6.$$

6. Доказать тождество $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

$$\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=$$
$$=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}=$$
$$=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right).$$

7. Разность $\sin x \cos 6x - \sin 3x \cos 4x$ преобразовать в произведение.

Пользуясь формулой $\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$, получим:

$$\sin x \cos 6x - \sin 3x \cos 4x =$$
$$= \frac{\sin 7x + \sin(-5x)}{2} - \frac{\sin 7x + \sin(-x)}{2} =$$
$$= \frac{\sin(-5x) - \sin(-x)}{2} = \frac{\sin x - \sin 5x}{2} =$$
$$= \frac{2\sin(-2x)\cos 3x}{2} = -\sin 2x \cos 3x.$$

Примеры на доказательство условных тождеств.

1. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

Доказательство.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}(\pi-\alpha-\beta) =$$
$$= \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} =$$
$$= \sin(\alpha+\beta)\left[\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{1}{\cos(\alpha+\beta)}\right] =$$
$$= \sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)} =$$
$$= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} =$$
$$= \operatorname{tg}(\pi-\gamma).\ \frac{-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Другой способ доказательства.

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma =$$
$$= \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma =$$
$$= \operatorname{tg}(\pi-\gamma)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma =$$
$$= -\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

2. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Доказательство.

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = \sin\alpha+\sin\beta+\sin(\pi-\alpha-\beta) =$$
$$= \sin\alpha+\sin\beta+\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$
$$+ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$
$$= 2\cdot\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} =$$
$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Примеры на преобразование выражений к виду, удобному для логарифмирования, путем введения вспомогательного угла.

1. $$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) =$$
$$= \sqrt{2}\,(\cos 45^\circ \sin x + \sin 45^\circ \cos x) = \sqrt{2}\,\sin(x + 45^\circ)$$

(здесь вспомогательным углом служит угол 45°).

2. $$\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sin x + \operatorname{tg} 60^\circ \cos x = \sin x + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} \times$$
$$\times \cos x = \frac{\sin x \cos 60^\circ + \cos x \sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} =$$
$$= \frac{\sin(x + 60^\circ)}{\cos 60^\circ} = 2\sin(x + 60^\circ)$$

(здесь вспомогательным углом служит угол 60°).

3. $5\sin x + 7\cos x$. Очевидно, что $5\sin x + 7\cos x = = 5\left(\sin x + \frac{7}{5}\cos x\right)$.

Найдем такой вспомогательный угол φ, чтобы $\operatorname{tg}\varphi = \frac{7}{5}$. Теперь получим:

$$5\sin x + 7\cos x = 5(\sin x + \operatorname{tg}\varphi \cos x) = 5\left(\sin x + \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x\right) =$$
$$= \frac{5\sin(x + \varphi)}{\cos\varphi}$$

(вспомогательный угол φ равен приближенно $54^\circ 30'$).

4. $$3 - \operatorname{tg}^2\alpha = (\sqrt{3})^2 - \operatorname{tg}^2\alpha = \operatorname{tg}^2 60^\circ - \operatorname{tg}^2\alpha =$$
$$= (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg}\alpha) = \frac{\sin(60^\circ + \alpha)}{\cos 60^\circ \cos\alpha} \cdot \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\cos 60^\circ \cos\alpha} =$$
$$= \frac{4\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ - \alpha)}{\cos^2\alpha}$$

(здесь вспомогательным углом служит угол 60°).

5. Доказать тождество $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Доказательство.

$$\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + \right.$$
$$\left. + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right).$$

Воспользуемся формулой $2\sin x\cos y = \sin(x+y)+\sin(x-y)$. Теперь получим: $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)+\sin\frac{7\pi}{7}+\right.$$

$$\left.+\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\right]=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)+\sin\pi\right]=-\frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

6. Доказать тождество $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$.

Доказательство.

Воспользуемся дважды формулой $\cos x\cos y=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$. Тогда

$$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\cos 20^\circ\cdot\frac{\cos 120^\circ+\cos 40^\circ}{2}=$$

$$=\cos 20^\circ\cdot\frac{-\frac{1}{2}+\cos 40^\circ}{2}=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\cos 20^\circ\cos 40^\circ=$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 60^\circ+\cos 20^\circ}{2}=\frac{1}{8}.$$

7. Доказать тождество $\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ=3$.

$$\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 60^\circ\operatorname{tg} 80^\circ=\sqrt{3}\operatorname{tg} 20^\circ\operatorname{tg} 40^\circ\operatorname{tg} 80^\circ=$$

$$=\sqrt{3}\,\frac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}=$$

$$=\sqrt{3}\cdot\frac{2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cdot 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cdot 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\sin 10^\circ}=$$

$$=8\sqrt{3}\cos 10^\circ\sin 20^\circ\sin 40^\circ\,{}^*=$$

$$=8\sqrt{3}\cdot\cos 10^\circ\cdot\frac{\cos 20^\circ-\cos 60^\circ}{2}=$$

$$=4\sqrt{3}\left(\cos 10^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\cos 10^\circ\right)=$$

$$=4\sqrt{3}\left(\frac{\cos 30^\circ+\cos 10^\circ}{2}-\frac{1}{2}\cos 10^\circ\right)=$$

$$=4\sqrt{3}\cdot\frac{\cos 30^\circ}{2}=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3.$$

---

* Воспользуемся формулой $\sin x\sin y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$.

262. Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; $0<\beta<\frac{\pi}{2}$; $\sin\alpha=\frac{1}{3}$; $\sin\beta=\frac{1}{4}$. Отв. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{18}$.

263. Найти $\cos(\alpha+\beta)$, если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$; $\cos\alpha=\frac{1}{3}$; $\cos\beta=\frac{1}{4}$. Отв. $\frac{1-\sqrt{120}}{12}$.

264. Найти $\operatorname{tg} 15°$. Отв. $2-\sqrt{3}$.

265. Найти $\sin 2\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Отв. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

266. Найти $\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Отв. $-\frac{7}{25}$.

267. Найти $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{4}$.

Отв. $-\frac{40}{9}$.

268. Найти $\sin 3\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}9$.

Отв. $-\frac{27}{125}$.

269. Найти $\cos 3\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{1}{4}$.

Отв. $-\frac{11}{16}$.

270. Упростить выражения:

а) $\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$; Отв. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

б) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$ (воспользоваться тем, что $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$); Отв. $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

в) $\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}$; Отв. $2\cos\frac{\alpha}{2}$.

г) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$; Отв. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

271. Доказать тождества:

а) $\cos^3\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 4\alpha}{4}$;

б) $\frac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\cos^4\alpha=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha$.

[представить $\cos^4 x$ в виде $(\cos^2 x)^2$ и воспользоваться дважды формулой $\cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$];

г) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+1} = \sin 2\alpha.$

272. Преобразовать к виду, удобному для логарифмирования, выражения:

а) $\sin\alpha + \sin\beta$

б) $\sin\alpha + \cos\beta$ [воспользоваться тем, что $\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$].

в) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta$ (воспользоваться формулами понижения степени квадрата, косинуса и квадрата синуса).

Отв. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

г) $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$ Отв. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$.

д) $\cos^2\alpha + \cos^2(60^\circ+\alpha) + \cos^2(60^\circ-\alpha) = \frac{3}{2}$ (воспользоваться формулой $\cos^2\gamma = \frac{1+\cos 2\gamma}{2}$).

273. Найти значение выражения

$\frac{2+5\cos\alpha}{\sin\alpha}$, зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2$ (воспользоваться 7-й группой формул).

Отв. $-\frac{5}{4}$.

274. Найти $\frac{\sin 2\gamma}{2+5\cos 2\gamma}$, если $\operatorname{tg}\gamma = 2$.

Отв. $-\frac{4}{5}$.

275. Разность

$$\cos x\cos 6x - \cos 3x\cos 4x$$

преобразовать в произведение.

Отв. $-\sin 2x\sin 3x$.

276. П а р а д о к с. «Докажем», что $4 = 16$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любых значениях буквы x справедливо равенство

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \tag{1}$$

а следовательно, и вытекающие из него следующие равенства:

$$(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}, \tag{2}$$

$$\cos^3 x = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}, \tag{3}$$

$$\cos^3 x + 3 = (1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3, \tag{4}$$

$$(\cos^3 x + 3)^2 = [(1 - \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} + 3]^2. \tag{5}$$

Возьмем $x = \pi$. Тогда $\cos x = -1$, $\sin x = 0$ и из равенства (5) получим, что $2^2 = 4^2$, или $4 = 16$.

Где ошибка в наших рассуждениях?

§ 7. ПЕРИОДИЧНОСТЬ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКИ

1. Периодичность тригонометрических функций

Мы знаем, что при всяком значении x

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x;$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x;$$
$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x.$$

Это свойство тригонометрических функций характеризует их периодичность.

Дадим общее определение понятию периодичности функции.

Определение. ***Функция называется периодической, если существует число, отличное от нуля, прибавление которого к произвольному значению ее аргумента не меняет значения функции. Наименьшее положительное число, прибавление которого к любому значению аргумента не меняет значения функции, называется периодом функции.***

Теорема. ***Период функций*** $\sin x$ ***и*** $\cos x$ ***равен*** 2π, ***а период функции*** $\operatorname{tg} x$ ***равен*** π.

Доказательство. Нам известно, что $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ при всяком значении x.

Пусть h есть какое угодно положительное число, меньшее, чем 2π. Посмотрим, возможно ли равенство $\sin(x + h) = \sin x$ при всяком значении x.

Чтобы равенство

$$\sin(x+h)=\sin x$$

было справедливо при $x=0$, h должно равняться только числу π, так как по условию $0<h<2\pi$. Но если взять $h=\pi$, то равенство

$$\sin(x+h)=\sin x$$

уже будет неверным (например, при $x=\frac{\pi}{4}$).

Следовательно, никакое положительное число, меньшее 2π, не может быть периодом функции $\sin x$. Значит, периодом функции x является именно число 2π.

Таким же методом можно доказать, что периодом $\cos x$ является 2π, а периодом $\operatorname{tg} x$ является число π.

2. Графики тригонометрических функций

А. График функции $y=\sin x$.

При возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$ y возрастает от 0 до 1.

При возрастании x от $\frac{\pi}{2}$ до π y убывает от 1 до 0.

При возрастании x от π до $\frac{3\pi}{2}$ y убывает от 0 до -1.

При возрастании x от $\frac{3\pi}{2}$ до 2π y возрастает от -1 до 0.

График имеет вид, изображенный на рисунке 157. Одна волна кривой, построенная на участке от 0 до 2π, будет вследствие пе-

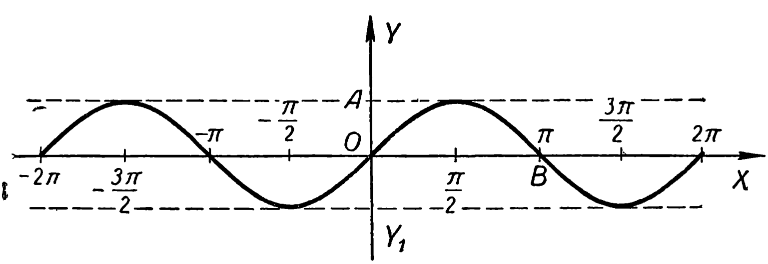


Рис. 157.

риодичности функции $\sin x$ повторяться бесконечное множество раз как слева, так и справа.

Отрезок OA принят за единицу длины. Отрезок OB равен π единицам длины.

Б. График функции $y=\cos x$ (рис. 158).

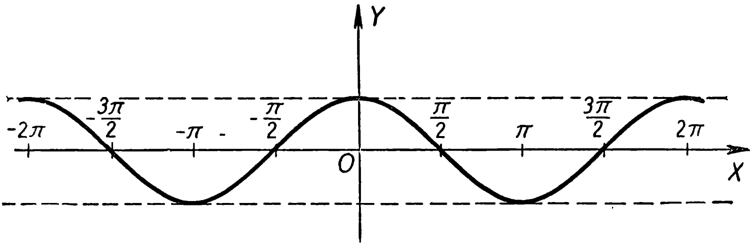


Рис. 158.

В. График функции $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 159).

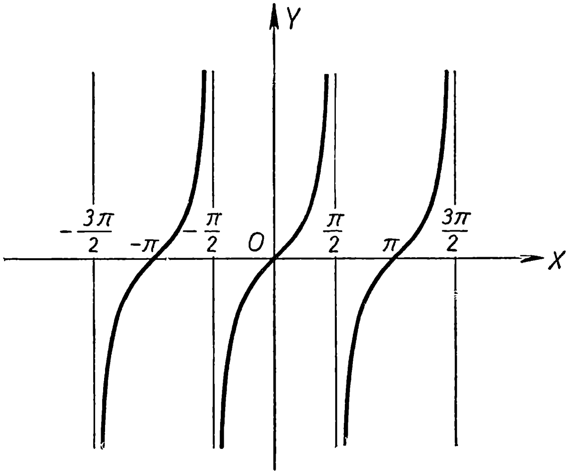


Рис. 159.

Этот график состоит из бесконечного множества одинаковых отдельных бесконечных ветвей, расположенных, как указано на рисунке 159.

УПРАЖНЕНИЯ

277. Показать, что периодом функции

а) $\sin 2x$ служит число π;

б) $\sin \omega x$ » » $\frac{2\pi}{\omega}$;

в) $\sin^2 x$ » » π;

г) $|\sin x|$ » » π;

д) $\sin^4 x+\cos^4 x$ » » $\frac{\pi}{2}$;

е) $\sin 4x+\sin 8x$ » » $\frac{\pi}{4}$.

278. Доказать, что функция $\cos\sqrt{x}$ не периодическая.

279. Построить графики функций:

а) $y=\sin 2x$;

б) $y=\sin 3x$;

в) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$;

г) $y=|\sin x|$ (весь график располагается в верхней полуплоскости).

§ 8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Основные определения и понятия

Определение. ***Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрических функций.*** Например, уравнения

$$\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2};$$

$$\sin x\cos 5x=\sin 2x\cos 4x;$$

$$\operatorname{tg}^{-1}x-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}2x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=2\cos x$$

суть тригонометрические.

Уравнение же, например, $x-\sin x-\cos x=0{,}2$ не является чисто тригонометрическим, так как неизвестное x содержится в этом уравнении не только под знаками тригонометрических функций. Такие уравнения будем называть смешанными тригонометрическими.

Корнем или решением тригонометрического уравнения (так же, как и всякого другого уравнения) ***называется такое значение неизвестного, которое удовлетворяет уравнению.***

Например, числа 0; π; 2π; 3π и т. д. или $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$ и т. д. являются корнями или решениями уравнения $\sin 2x=2\sin^2 x$, а число, скажем, $\frac{\pi}{2}$ корнем этого уравнения не будет.

Решить тригонометрическое уравнение — значит найти все его корни или убедиться в отсутствии таковых.

Обычно тригонометрическое уравнение имеет бесконечное множество корней. (В противоположность этому алгебраическое уравнение с одним неизвестным может иметь лишь конечное число корней.) Но встречаются и такие уравнения, которые не имеют ни одного действительного корня.

Уравнение $\sin 2x = 1$ имеет бесконечное множество корней, а именно: $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{4}$ и т. д., а уравнение $\sin 2x = 2$ не имеет ни одного действительного корня.

Простейшие тригонометрические уравнения и их общие решения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются следующие:

$$1)\ \sin x = a;\ 2)\ \cos x = a;\ 3)\ \operatorname{tg} x = a.$$

А. Решение уравнения $\sin x = a$

Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ не имеет ни одного действительного решения, так как синус никакого действительного числа не может оказаться числом, абсолютная величина которого больше единицы ($\sin x$ изменяется лишь в границах от -1 до $+1$).

Пусть $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Возьмем тригонометрический круг с радиусом, равным 1 (рис. 160). Отложим на OB от точки O отрезок OQ, равный a, и через точку Q проведем прямую, параллельную A_1A, до пересечения с окружностью в точках M и M_1.

Пусть острый положительный угол A_1OM_1 содержит α радианов. Тогда тупой угол A_1OM_1 будет содержать $\pi - \alpha$ радианов.

Числа α и $\pi - \alpha$ будут корнями уравнения $\sin x = a$. Но корнями уравнения $\sin x = a$ будут в силу периодичности не только числа α и $\pi - \alpha$, но и все числа, определяемые формулами:

$$x_1 = 2k\pi + \alpha \text{ и } x = 2k\pi + (\pi - \alpha),$$

где k — любое целое число.

Перепишем эти две формулы так:

$$x_1 = 2k\pi + \alpha \qquad (1)$$

и

$$x_2 = (2k + 1)\pi - \alpha \qquad (2)$$

и назовем α главным решением уравнения $\sin x = a$. Тогда первую формулу можно прочитать так: произведение числа π на любое четное число плюс главное решение α будет решением уравнения $\sin x = a$.

Вторую же формулу можно прочитать так: произведение числа π на любое нечетное число минус главное решение α будет решением уравнения $\sin x = a$.

Вместо этих двух формул можно написать одну:

$$x = n\pi + (-1)^n \alpha, \qquad (3)$$

где n — целое число.

Эта одна последняя формула содержит в себе как все решения, содержащиеся в формуле $x_1 = 2k\pi + \alpha$, так и все решения, содержащиеся в формуле $x_2 = (2k+1)\pi - \alpha$.

Из формулы (3) при четных значениях n получается формула (1), а при нечетных — формула (2). Выражение $(-1)^n$ при четном значении n дает единицу, а при нечетном — минус единицу.

Формула (3) является общим решением уравнения $\sin x = a$. Давая в этой формуле букве n произвольные целые значения, можно получить сколько угодно частных решений уравнения

$$\sin x = a.$$

Формула (3) остается в силе и в том случае, когда a удовлетворяет условию $-1 \leqslant a < 0$. Только в этом случае главное решение будет отрицательным числом в границах от $-\frac{\pi}{2}$ до 0. Убедиться в этом можно с помощью таких же рассуждений, которые были изложены для случая $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Б. Решение уравнения $\cos x = a$

Пусть $0 \leqslant a \leqslant 1$. Возьмем тригонометрический круг с радиусом 1 и отложим на OA от точки O отрезок OP, равный a (рис. 161). Через точку P проведем прямую, параллельную B_1B,

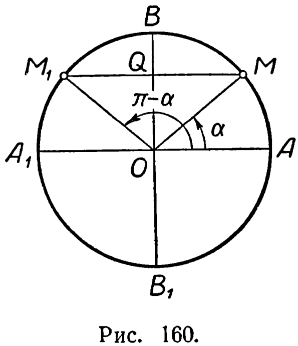


Рис. 160.

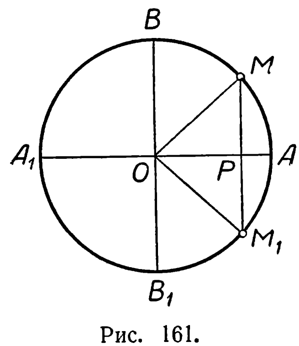


Рис. 161.

до пересечения с окружностью в точках M и M_1. Пусть положительный острый угол AOM содержит α радианов. Тогда угол AOM_1 будет содержать $-\alpha$ радианов.

Общим решением уравнения $\cos x = a$ будет $x = 2k\pi \pm \alpha$.

Если $-1 \leqslant a < 0$, то α будет числом радианов, содержащихся в угле, оканчивающимся во II четверти.

В. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при всяком значении a. Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, получим общее решение

$$x = k\pi + \alpha.$$

Если $a > 0$, то за α можно брать число радианов соответствующего угла, оканчивающегося в I четверти, а если $a < 0$, то угла, оканчивающегося в IV четверти.

Примеры:

1. Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$.

2. Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) = n\pi + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6}$.

3. Если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

4. Если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

5. Если $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, то $x = k\pi + \frac{\pi}{3}$.

6. Если $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, то $x = k\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = k\pi - \frac{\pi}{3}$.

Решение уравнений вида $\sin bx = a$; $\cos bx = a$; $\operatorname{tg} bx = a$

1. Решить уравнение $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

Обозначив $3x$ буквой u, получим:

$$\sin u = \frac{1}{2} \text{ и } u = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

Отсюда

$$3x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6};$$

$$x = n\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{18}.$$

2. Решить уравнение $\sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$5x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$$

и

$$x = n\frac{\pi}{5} + (-1)^n \frac{\pi}{20}.$$

В градусном измерении ответ запишется так:

$$x = 36^\circ n + (-1)^n 9^\circ.$$

3. Решить уравнение $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

$$3x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3};$$

$$x = 2k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}.$$

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} 5x = 1$.

$$5x = k\pi + \frac{\pi}{4};$$

$$x = k\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{20}.$$

Более сложные тригонометрические уравнения

Уравнение $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 3$ содержит различные тригонометрические функции от одной и той же неизвестной величины x.

В уравнение $\sin 2x = 2\sin^2 x$ дважды входит одна и та же функция синус, но величины, стоящие под знаками синусов, различны.

В уравнение же $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos x$ входят и различные функции, и различные выражения, стоящие под их знаками.

Решение более или менее сложных тригонометрических уравнений, подобных приведенным выше, сводится обычно к нахождению значения одной какой-нибудь тригонометрической функции от выражения, содержащего неизвестное.

Ознакомимся с приемами решения тригонометрических уравнений на примерах.

1. Пусть дано уравнение $\cos^2 x + \sin x = \frac{5}{4}$.

Заменив $\cos^2 x$ выражением $1 - \sin^2 x$, мы приходим к квадратному уравнению относительно $\sin x$:

$$1 - \sin^2 x + \sin x = \frac{5}{4};$$

$$4\sin^2 x - 4\sin x + 1 = 0;$$

$$(2\sin x - 1)^2 = 0;$$

$$2\sin x - 1 = 0;$$

$$\sin x = \frac{1}{2};$$

$$x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}.$$

2. $\sin^2 x + \cos 2x = \frac{1}{4}$.

Заменив $\sin^2 x$ выражением $\frac{1-\cos 2x}{2}$, мы приходим к уравнению первой степени относительно $\cos 2x$:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \cos 2x = \frac{1}{4};$$

$$1 + \cos 2x = \frac{1}{2};$$

$$\cos 2x = -\frac{1}{2}; \quad 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}; \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}.$$

3. $\sin 5x = \cos 7x$.

Заменяя $\cos 7x$ выражением $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right)$, мы преобразовываем данное уравнение к такому уравнению, в котором правая часть есть нуль, а левая — произведение выражений, содержащих неизвестную величину x:

$$\sin 5x - \cos 7x = 0;$$

$$\sin 5x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 7x\right) = 0;$$

$$2 \sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0;$$

$$\sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

а) $\sin\left(6x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$

$$6x - \frac{\pi}{4} = k\pi;$$

$$x = k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{24}.$$

б) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2};$$

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

4. $\sin x - \cos x = 0$.

Это уравнение является однородным первого измерения относительно $\sin x$ и $\cos x$. В силу этого уравнения $\cos x \neq 0$. Если бы $\cos x = 0$, то оказалось бы, что $\sin x = 0$. Но $\sin x$ и $\cos x$ не могут быть нулями одновременно.

Поэтому мы можем все члены уравнения разделить на $\cos x$:

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0; \quad \operatorname{tg} x = 1; \quad x = k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

5. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 6$ *;

$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 6(\sin^2 x + \cos^2 x)$;

$4\sin^2 x - 3\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$.

В силу этого уравнения $\cos x \neq 0$. Поэтому мы можем все члены уравнения разделить на $\cos^2 x$

$$\frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$4\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0;$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = \frac{3 \pm 5}{8}.$$

а) $\mathrm{tg}\, x = 1$; б) $\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{4}$;

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$. $x \approx 180^\circ k - 13^\circ 30'$.

6. $\sin 3x\cos x = \sin 7x\cos 5x$.

Воспользуемся формулой

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2};$$

$$\frac{\sin 4x + \sin 2x}{2} = \frac{\sin 12x + \sin 2x}{2};$$

$$\sin 4x = \sin 12x;$$

$$\sin 12x - \sin 4x = 0;$$

$$2\sin 4x\cos 8x = 0.$$

а) $\sin 4x = 0$;

$$4x = k\pi; \quad x = k\frac{\pi}{4}.$$

б) $\cos 8x = 0$;

$$8x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}; \quad x = k\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{16}.$$

7. $3\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = \frac{9}{2}$.

Воспользуемся формулами, выражающими $\sin x$ и $\cos x$ через $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ (см. § 4). Благодаря этому задача сведется к решению квадратного уравнения относительно $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$:

$$3\,\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\sqrt{3}\cdot\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{9}{2};$$

$$15\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 8\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 3 = 0.$$

---

* Заменив число 6 выражением $6\sin^2 x + 6\cos^2 x$, мы получим однородное уравнение второго измерения относительно $\sin x$ и $\cos x$.

а) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{6};$$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{3}.$$

б) $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{5}$;

$$\frac{x}{2}\approx 180^\circ k+13^\circ;$$

$$x\approx 360^\circ k+26^\circ.$$

8. $\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{8}$.

Воспользуемся формулой $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$;

$$\frac{\sin 2x}{2}\cos 2x=\frac{1}{8};$$

$$\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{4}.$$

Еще раз обратившись к формуле $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{2}$, получим:

$$\frac{\sin 4x}{2}=\frac{1}{4};$$

$$\sin 4x=\frac{1}{2};$$

$$4x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6};$$

$$x=n\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}.$$

9. $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$. К левой части уравнения прибавим два взаимно уничтожающихся члена $2\sin^2 x\cos^2 x$ и $-2\sin^2 x\cos^2 x$:

$$\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x=\frac{5}{8};$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2(\sin x\cos x)^2=\frac{5}{8};$$

$$1-2\cdot\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)^2=\frac{5}{8};$$

$$\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{3}{8};$$

$$\sin^2 2x=\frac{3}{4};\quad \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

а) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$2x = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3};$$

$$x = n\frac{\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

б) $\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$2x = n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right);$$

$$x = n\frac{\pi}{2} + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

10. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$.

Разделим левую и правую части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \sin 5x;$$

$$\cos\frac{\pi}{4} \sin x + \sin\frac{\pi}{4} \cos x = \sin 5x;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x;$$

$$\sin 5x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;$$

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0.$$

а) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$;

$$2x - \frac{\pi}{8} = n\pi;$$

$$x = n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{16}.$$

б) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$;

$$3x + \frac{\pi}{8} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2};$$

$$x = 2k\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24}.$$

Условия равенства одноименных тригонометрических функций

А. Условия равенства синусов

Синусы двух чисел x и y равны друг другу ($\sin x = \sin y$) тогда и только тогда, когда либо разность $x - y$ равна произведению числа π на четное число, либо когда сумма $x + y$ равна произведению числа π на нечетное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства

$$\sin x = \sin y; \quad \sin x - \sin y = 0$$

и

$$2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0$$

равносильны. Но последнее равенство справедливо либо при $\sin \frac{x-y}{2} = 0$, либо при $\cos \frac{x+y}{2} = 0$, т. е. либо при $\frac{x-y}{2} = k\pi$, либо при $\frac{x+y}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Отсюда следует, что равенство $\sin x = \sin y$ будет справедливо тогда и только тогда, когда либо $x - y = 2k\pi$, либо $x + y = (2k + 1)\pi$, где k — любое целое число.

Б. Условия равенства косинусов

Косинусы двух чисел x и y равны между собой ($\cos x = \cos y$) тогда и только тогда, когда либо сумма $x + y$, либо разность $x - y$ равна произведению числа π на четное число.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства

$$\cos x = \cos y, \quad \cos x - \cos y = 0$$

и

$$-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0$$

равносильны.

Но последнее равенство справедливо либо при $\frac{x+y}{2} = k\pi$, либо при $\frac{x-y}{2} = k\pi$, т. е. либо при $x + y = 2k\pi$, либо при $x - y = 2k\pi$, где k — любое целое число.

В. Условие равенства тангенсов

Тангенсы двух чисел x и y равны друг другу ($\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$) тогда и только тогда, когда разность $x - y$ равна произведению числа π на любое целое число, т. е. когда разность $x - y$ кратна числу π. (Мы здесь исключаем такие значения x и y, при которых $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$ не существуют.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$,

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\sin (x-y)}{\cos x \ \cos y} = 0$$

равносильны. Но последнее равенство справедливо лишь тогда, когда $\sin (x - y) = 0$, т. е. лишь тогда, когда $x - y = k\pi$.

Выведенные условия равенства одноименных тригонометрических функций полезно запомнить. Во многих случаях эти условия облегчают решение тригонометрических уравнений.

Применение выведенных условий к решению тригонометрических уравнений

1. Решить уравнение $\sin ax = \sin bx$.

Решение. По условию равенства синусов

$$ax - bx = 2k\pi \quad \text{и} \quad ax + bx = (2k+1)\pi.$$

Следовательно, решениями данного уравнения будут:

$$x = \frac{2k\pi}{a-b} \quad \text{и} \quad x = \frac{(2k+1)\pi}{a+b},$$

где k — любое целое число.

2. Решить уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Решение. По условиям равенства косинусов

$$\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi$$

и

$$\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 2k\pi.$$

Следовательно решениями данного уравнения будут:

$$x = \frac{2k\pi}{3} \quad \text{и} \quad x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}.$$

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg} bx$.

Решение. По условию равенства тангенсов $ax - bx = k\pi$. Отсюда

$$x = \frac{k\pi}{a-b}.$$

4. Решить уравнение $\sin 3x = \cos 2x$.

Решение. Преобразуем уравнение так, чтобы получить равенство одноименных функций:

$$\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

По условиям равенства синусов

$$3x - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2k\pi \quad \text{и} \quad 3x + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = (2k+1)\pi.$$

Отсюда

$$x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \quad \text{и} \quad x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{2}.$$

5. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

$$3x - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = k\pi; \quad 5x = k\pi + \frac{\pi}{2}; \quad x = k\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10}.$$

Смешанные тригонометрические уравнения

Смешанными тригонометрическими уравнениями* мы называем такие уравнения, в которых неизвестное входит одновременно и под знаком и не под знаком тригонометрической функции. Например, уравнения $5\cos x = x$; $\operatorname{tg} x = x$; $\cos 2x = 0{,}4x$; $x \sin x = 1$; $x + 2\sin x = 1$ суть смешанные тригонометрические уравнения. Корни таких уравнений можно находить, как правило, лишь приближенно. Поясним, как это делается.

Сначала с помощью графического метода можно определить число корней и их первые грубые приближения. Затем, пользуясь таблицей значений тригонометрических функций числового аргумента, можно каждое из найденных грубых приближений путем испытаний уточнять.

Примеры.

1. Решить уравнение $\cos 2x = 0{,}4x$.

Построим на миллиметровой бумаге графики функций $y = \cos 2x$ и $y = 0{,}4x$ (рис. 162). Эти графики пересекаются в трех точках

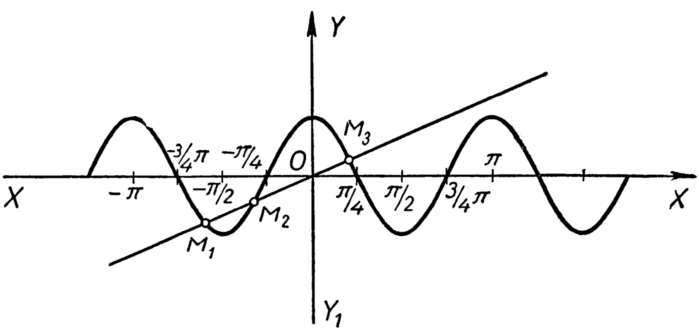


Рис. 162.

M_1, M_2 и M_3. Поэтому уравнение $\cos 2x = 0{,}4x$ имеет три различных корня. Этими корнями будут абсциссы точек M_1, M_2, M_3. Эти абсциссы, как видно на рисунке 162, близки к числам 0,6; —0,9 и —1,9. Последние и являются первыми грубыми приближенными значениями корней.

Чтобы уточнить первый корень, найдем значения разности $\cos 2x - 0{,}4x$ при $x = 0{,}6$ и при других значениях, близких к 0,6, пользуясь таблицами.

---

* Термин «смешанные тригонометрические уравнения» не является общепринятым. Здесь он употребляется условно.

Уточнение первого корня

Значения x	Значения разности $\cos 2x - 0{,}4x$
0,6	$\cos 1{,}2 - 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}3624 - 0{,}24 = 0{,}1224$
0,62	$\cos 1{,}24 - 0{,}4 \cdot 0{,}62 = 0{,}3248 - 0{,}248 = 0{,}0768$
0,64	$\cos 1{,}28 - 0{,}4 \cdot 0{,}64 = 1{,}2867 - 0{,}256 = 0{,}0307$
0,65	$\cos 1{,}30 - 0{,}4 \cdot 0{,}65 = 0{,}2675 - 0{,}260 = 0{,}0075$
0,66	$\cos 1{,}32 - 0{,}4 \cdot 0{,}66 = 0{,}2482 - 0{,}2640 = -0{,}0168$

Из этой таблицы видно, что значения $\cos 2x$ и $0{,}4x$ становятся довольно близкими друг другу при $x = 0{,}65$.

Число 0,65 мы можем считать уже лучшим приближенным значением первого корня, чем значение 0,6.

Уточнение второго корня

Значения x	Значения разности $\cos 2x - 0{,}4x$
$-0{,}90$	$\cos(-1{,}80) - 0{,}4 \cdot (-0{,}9) = \cos 1{,}80 + 0{,}36 = -0{,}2272 + 0{,}3600 = 0{,}1328$
$-0{,}88$	$\cos(-1{,}76) - 0{,}4 \cdot (-0{,}88) = \cos 1{,}76 + 0{,}352 = -0{,}1881 + 0{,}3520 = 0{,}1639$
$-0{,}94$	$\cos(-1{,}88) - 0{,}4 \cdot (-0{,}94) = \cos 1{,}88 + 0{,}376 = -0{,}3043 + 0{,}3760 = 0{,}0717$
$-0{,}98$	$\cos(-1{,}96) - 0{,}4 \cdot (-0{,}98) = \cos 1{,}96 + 0{,}392 = -0{,}3795 + 0{,}3920 = 0{,}0125$
$-0{,}99$	$\cos(-1{,}98) - 0{,}4 \cdot (-0{,}99) = \cos 1{,}98 + 0{,}396 = -0{,}3979 + 0{,}3960 = -0{,}0019$

За более точное значение второго корня можно взять число $-0{,}99$.

За уточненный третий корень после надлежащих испытаний можем принять число $-1{,}92$.

Если бы нам было необходимо получить корни с еще большей точностью, то мы воспользовались бы более точными таблицами значений тригонометрических функций числового аргумента и совершили бы терпеливо все необходимые испытания.

2. Пусть требуется решить уравнение $\cos x = x$.

Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = x$ (рис. 163). Эти графики пересекаются лишь в одной точке M. Поэтому уравнение $\cos x = x$ имеет лишь один корень. Этим корнем является абсцисса точки M, т. е. длина отрезка OP. Эта абсцисса, как видно из рисунка, близка к числу 0,7.

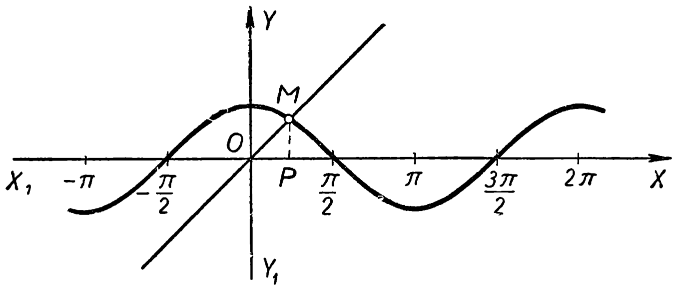


Рис. 163.

Уточним этот корень путем испытаний.

Значения x	Значения разности $\cos x - x$
0,7	$\cos 0{,}7 - 0{,}7 = 0{,}7648 - 0{,}7000 = 0{,}0648$
0,72	$\cos 0{,}72 - 0{,}72 = 0{,}7518 - 0{,}7200 = 0{,}0318$
0,74	$\cos 0{,}74 - 0{,}74 = 0{,}7385 - 0{,}7400 = -0{,}015$

За уточненный корень можно принять число 0,74.

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = x$.

Построим графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = x$ (рис. 164).

График функции $y = \operatorname{tg} x$ состоит из бесконечного множества отдельных бесконечных ветвей. Поэтому прямая $y = x$ имеет бесчисленное множество точек пересечения с графиком $y = \operatorname{tg} x$.

Следовательно, уравнение $\operatorname{tg} x = x$ имеет бесконечное множество различных корней.

Число нуль является точным корнем этого уравнения, так как $\operatorname{tg} 0 = 0$. Кроме этого нулевого корня, уравнение $\operatorname{tg} x = x$, как это уже было выяснено, имеет бесконечное множество положительных корней и бесконечное множество отрицательных корней. Ограничимся задачей найти только наименьший положительный корень. Из рисунка 164 видно, что этот корень близок к числу 4,5.

Для уточнения этого корня проведем испытания.

Значения x	Значения разности $\operatorname{tg} x - x$
4,50	$\operatorname{tg} 4{,}50 - 4{,}5 = 4{,}6373 - 4{,}5000 = 0{,}1373$
4,48	$\operatorname{tg} 4{,}48 - 4{,}48 = 4{,}2254 - 4{,}4800 = -0{,}2546$
4,49	$\operatorname{tg} 4{,}49 - 4{,}49 = 4{,}4223 - 4{,}4900 = -0{,}0077$

За уточненный наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$ можно принять число 4,49.

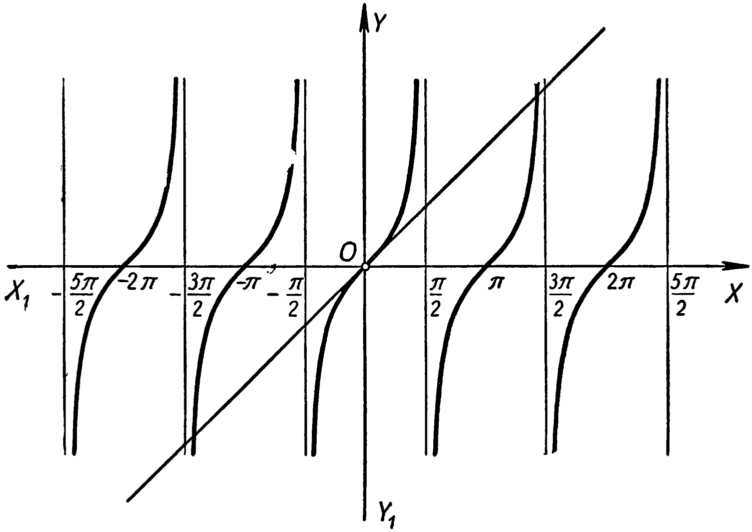


Рис. 164.

4. Решить уравнение $x \sin x - 0{,}5 = 0$.

Перепишем это уравнение в виде $\sin x = \frac{0{,}5}{x}$ и построим графики функций

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = \frac{0{,}5}{x} \text{ (рис. 165).}$$

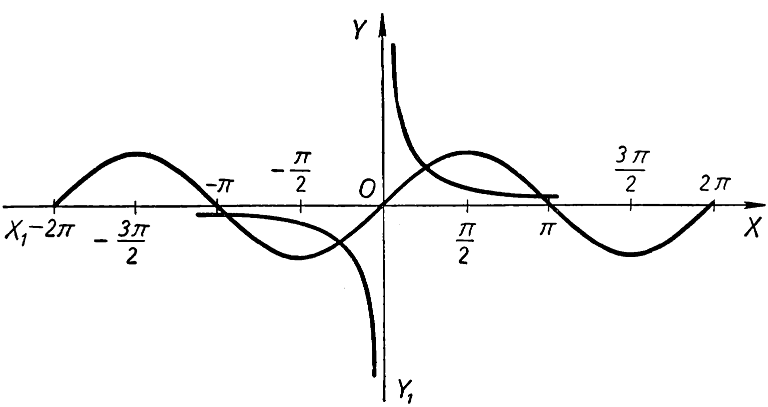


Рис. 165.

Эти графики пересекаются в бесконечном множестве точек. Поэтому данное уравнение имеет бесконечное множество корней (положительных и отрицательных). Из рисунка 165 видно, что наименьший положительный корень близок к числу 0,7. Путем испытаний можем получить уточненное значение этого корня, равное 0,74.

§ 9. О КОСЕКАНСЕ, СЕКАНСЕ И КОТАНГЕНСЕ

В курсах тригонометрии, кроме $\sin x$, $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, рассматриваются еще три тригонометрические функции $\csc x$ (косеканс x), $\sec x$ (секанс x), $\operatorname{ctg} x$ (котангенс x).

Изучать функции $\csc x$, $\sec x$ и $\operatorname{ctg} x$ нет необходимости. Эти функции являются величинами, обратными $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, а именно:

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \sin^{-1} x;$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x;$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}^{-1} x.$$

Задачи, в которых фигурируют $\csc x$, $\sec x$, $\operatorname{ctg} x$, можно решать путем замены этих функций их выражениями через $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Поясним это на примерах.

1. Упростить выражение

$$\frac{\csc x + \sec x}{\csc x - \sec x} = \frac{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg} x^{*}}{1 - \operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$$

Мы здесь воспользовались формулой

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

2. Доказать тождество

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{y}{2} + \operatorname{ctg}\frac{z}{2} = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}$$

при условии, что

$$x + y + z = \pi.$$

---

* Это мы получили, разделив числитель и знаменатель предыдущей дроби на $\cos x$.

Доказательство. Из условия $x+y+z=\pi$ следует, что

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}; \quad \frac{z}{2}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right).$$

Из того, что

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

следует, что

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{y}{2}+\operatorname{ctg}\frac{z}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+\frac{\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}=$$

$$\frac{\cos\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}+\cos\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}+\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}=\cos\frac{z}{2}\cdot\frac{\sin\frac{z}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}}=$$

$$=\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\frac{\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}=\frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{y}{2}\operatorname{ctg}\frac{z}{2}.$$

§ 10. ПРОСТОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ КОЛЕБАНИЕ

Пусть точка M (рис. 166) движется с постоянной угловой скоростью ω радианов в секунду по окружности. Тогда проекция точки M на вертикальный диаметр, т. е. точка P, будет совершать колебательные движения вдоль вертикального диаметра вверх и вниз между точками B и B_1. Такое движение точки P и называется простым гармоническим колебанием.

Чтобы вывести формулу простого гармонического колебания, примем следующие обозначения:

t — время в секундах;

R — радиус окружности;

M_0 — положение движущейся по окружности точки в начальный момент, т. е. при $t=0$ (рис. 167);

M — положение движущейся по окружности точки через t секунд;

y — ордината точки P (y изменяется в границах от $-R$ до $+R$);

α — угол AOM_0 в радианах.

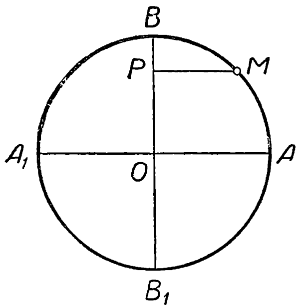


Рис. 166.

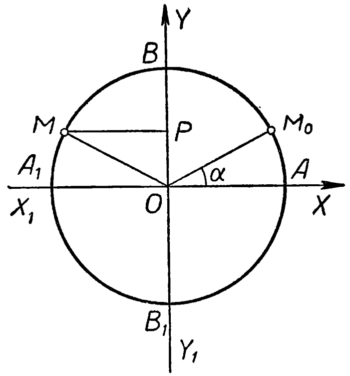


Рис. 167.

Тогда поворот радиуса-вектора из положения $\overrightarrow{OM_0}$ до положения $\overrightarrow{OM}$ будет равен ωt радианам. Поворот же из положения $\overrightarrow{OA}$ до положения $\overrightarrow{OM}$ будет равен $\omega t+\alpha$ радианам.

По определению синуса

$$\frac{y}{R}=\sin(\omega t+\alpha),$$

или

$$y=R\sin(\omega t+\alpha).$$

Последнее уравнение и выражает закон простого гармонического колебания. В этом уравнении постоянная R называется амплитудой колебания; постоянная α называется начальной фазой колебания, а переменная $\omega t+\alpha$ — фазой колеблющейся точки.

Время T, в течение которого точка M совершит один полный оборот по окружности, а точка P — одно полное колебание, называется периодом гармонического колебания.

Легко понять, что

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Из данного определения следует, что $T=\frac{2\pi}{\omega}$ есть период функции

$$y=R\sin(\omega t+\alpha).$$

В этом можно убедиться и непосредственно. Действительно,

$$R\sin[\omega(t+T)+\alpha]=R\sin(\omega t+\omega T+\alpha)=$$
$$=R\sin\left(\omega t+\omega\cdot\frac{2\pi}{\omega}+\alpha\right)=R\sin(2\pi+\omega t+\alpha)=R\sin(\omega t+\alpha).$$

Величина, обратная периоду колебания, т. е.

$$\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi},$$

называется **частотой колебания**. Она показывает, сколько полных колебаний совершает точка P в единицу времени (в 1 *сек.*).

В природе протекает много разнообразных процессов колебательного характера, близких к гармоническому колебанию. Однако простое гармоническое колебание обладает еще одной весьма ценной особенностью. Как правило, можно как угодно сложные колебательные движения представлять с любой степенью точности в виде суммы различных простых гармонических колебаний, т. е. сводить анализ сложных процессов движения к анализу простейших.

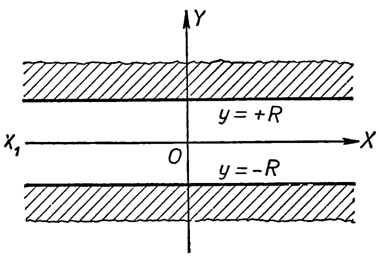


Рис. 168.

Разложение сложных колебательных процессов на сумму простых гармонических колебаний является мощным средством исследования разнообразных физических явлений. Подробные сведения обо всем этом излагаются в курсах математического анализа.

График функции $y=R\sin(\omega x+\alpha)$ называется синусоидальной кривой. Весь график этой функции располагается в полосе, образованной прямыми $y=-R$ и $y=+R$ (рис. 168).

Чтобы составить представление о графике функции $y=R\sin(\omega x+\alpha)$, рекомендуется построить последовательно графики следующих более простых функций:

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right);\qquad y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right);$$
$$y=\sin 2x;\qquad y=\sin\frac{1}{2}x;$$
$$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right);\qquad y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right);$$
$$y=\frac{3}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right);\qquad y=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right).$$

График функции $y=R\sin(\omega x+\alpha)$ пересекает ось X_1X при тех значениях x, при которых $\omega x+\alpha$ равно $k\pi$, где k — любое целое число, т. е. при значениях x, определяемых формулой

$$x=\frac{k\pi-\alpha}{\omega}.$$

Таким образом, абсциссами точек пересечения с осью X_1X будут числа:

$$-\frac{\alpha}{\omega}; \quad \frac{\pi-\alpha}{\omega}; \quad \frac{2\pi-\alpha}{\omega}; \quad \frac{3\pi-\alpha}{\omega}; \ldots .$$

Наибольшее значение R функция $y=R\sin(\omega x+\alpha)$ принимает при тех значениях x, при которых

$$\omega x+\alpha=\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

где k — любое целое число, т. е. в тех точках, для которых

$$x=\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi-\alpha}{\omega}.$$

Наименьшее значение R эта функция принимает при таких значениях x, при которых

$$\omega x+\alpha=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,$$

т. е. при

$$x=\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi-\alpha}{\omega}.$$

На рисунке 169 изображен сплошной линией график функции $y=2{,}5\sin 2x$, а пунктиром — график функции $y=\sin x$.

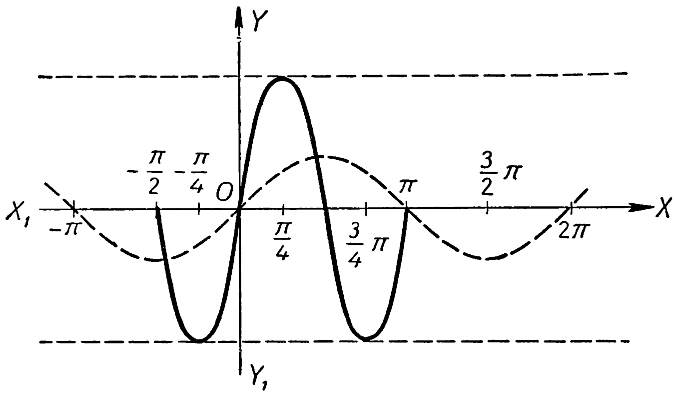


Рис. 169.

Охарактеризуем функцию $y=2{,}5\sin 2x$ и ее график. Период функции равен π. График этой функции пересекает ось X_1X в точках, в которых $2x=k\pi$, или $x=k\frac{\pi}{2}$, т. е. в точках 0; $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\pi$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm 2\pi$; ....

Наибольшее значение 2,5 функция имеет в точках, в которых $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, или $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, т. е. в точках $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}\pm\pi$; $\frac{\pi}{4}\pm 2\pi$; $\frac{\pi}{4}\pm 3\pi$; ....

Наименьшее значение, равное $-2,5$, она имеет в точках, в которых $2x=-\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi$, или $x=-\frac{\pi}{4}\pm k\pi$, т. е. в точках $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}\pm\pi$; $-\frac{\pi}{4}\pm 2\pi$; $-\frac{\pi}{4}\pm 3\pi$; ....

Весь график располагается в полосе, образованной прямыми $y=2,5$ и $y=-2,5$. Амплитуда колебания равна 2,5, а начальная фаза равна нулю. На рисунке 170 изображен график функции $y=2,5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

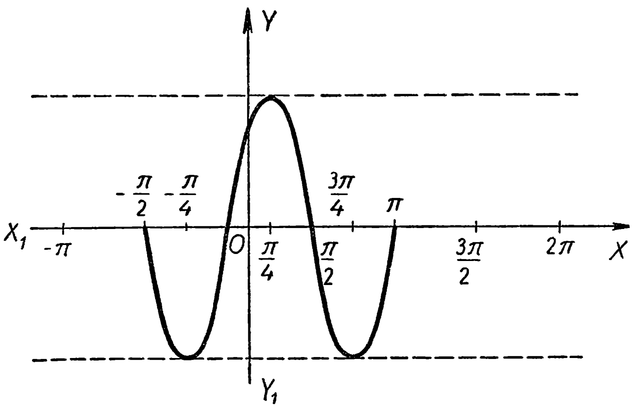


Рис. 170.

Период функции равен π. График пересекает ось X_1X в точках, в которых $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$, или $x=k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$, т. е. в точках $-\frac{\pi}{8}$; $\pm\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$; $\pm\pi-\frac{\pi}{8}$; $\pm 3\pi-\frac{\pi}{8}$; ....

Наибольшее значение 2,5 функция имеет в точках, в которых $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, или $x=\frac{\pi}{8}+k\pi$, т. е. в точках $\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}\pm\pi$; $\frac{\pi}{8}\pm 2\pi$; $\frac{\pi}{8}\pm 3\pi$; ....

Наименьшее значение, равное $-2,5$, функция имеет в точках, в которых $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, или $x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi$, т. е. в точках $-\frac{3\pi}{8}$; $-\frac{3\pi}{8}\pm\pi$; $-\frac{3\pi}{8}\pm 2\pi$; ....

Весь график располагается в полосе, образованной прямыми $y=2,5$ и $y=-2,5$.

Амплитуда колебания равна 2,5, а начальная фаза $\frac{\pi}{4}$.

График функции $y=2{,}5\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ есть не что иное, как график функции $y=2{,}5\sin 2x$, смещенный влево на $\frac{\pi}{4}$.

УПРАЖНЕНИЯ

280. Зная, что $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=a$ и $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=b$, найти $\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}2y$.

281. Доказать, что $\sin(\alpha+2\beta)=-\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=0$.

282. При каких значениях x выражение $\sin x+\cos x$ имеет наибольшее значение?

283. Найти связи между x, y и z, если известно, что

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y+\operatorname{tg}z=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y\operatorname{tg}z.$$

284. Найти $\sin x$ и $\cos x$, если $a\sin x+b\cos x=c$. Всегда ли эта задача имеет решение?

285. Доказать, что $\sin x\sin y\sin z\leqslant\frac{1}{8}$, если $x+y+z=\frac{\pi}{2}$.

286. Доказать, что $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}>1+\operatorname{ctg}\alpha$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

287. Доказать, что $\sin\cos\varphi<\cos\sin\varphi$, если $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$.

288. При каких целых значениях m функция $y=\dfrac{\sin\frac{5}{m}x}{\sin mx}$ имеет период 3π?

ГЛАВА XXIX

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ *

§ 1. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Когда задается какое-либо отвлеченное число x и требуется найти $\sin x$, то, как известно, всякий раз для любого определенного значения x мы находим для $\sin x$ единственный ответ, а именно некоторое определенное отвлеченное число, заключенное в границах от -1 до $+1$ включительно.

Например,

$$\sin 0 = 0;\ \sin \pi = 0;\ \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = -1;\ \sin 5 = -0{,}9589.$$

Это замечание относится и к каждой из остальных тригонометрических функций. Поэтому все тригонометрические функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ являются функциями однозначными.

Если же нам будет задано какое-либо отвлеченное число x в границах от -1 до $+1$ включительно и будет предложено отыскать такое отвлеченное число y, синус которого равен числу x, то всякий раз будет получаться не один, а бесконечное множество ответов.

Например, если $\sin y = \frac{1}{2}$, то $y = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$, где k — любое целое число (см. стр. 513).

Это замечание относится и к остальным тригонометрическим функциям.

Пусть $\sin y = x$, где $|x| \leqslant 1$.

Отсюда следует, что y есть такое отвлеченное число, синус которого равен x. Вместо этого словесного утверждения пишут:

$$y = \operatorname{Arc} \sin x$$

(читают: «y равен арксинусу x»).

* Обратные тригонометрические функции называют также обратными круговыми функциями.

Как уже разъяснялось, выражение $\operatorname{Arc}\sin x$ для всякого данного значения x, заключенного в границах от -1 до $+1$ включительно, имеет бесконечное множество различных значений.

Приставка Arc неотделима от обозначения sin и вместе с ним образует знак нового математического действия над отвлеченным числом x.

Подобным же образом вводятся математические действия

$$\operatorname{Arc}\cos x \text{ (арккосинус } x)$$

и

$$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x \text{ (арктангенс } x).$$

$\operatorname{Arc}\cos x$ обозначает такие всевозможные отвлеченные числа, что косинус каждого из них равен x ($|x| \leqslant 1$).

$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ обозначает такие всевозможные отвлеченные числа, что тангенс каждого из них равен x (здесь x может быть любым числом).

Выражения $\operatorname{Arc}\sin x$, $\operatorname{Arc}\cos x$, $\operatorname{Arc}\operatorname{tg} x$ называются обратными тригонометрическими функциями аргумента x.

Как мы уже видели, все обратные тригонометрические функции являются функциями многозначными (с бесконечным множеством значений). В отличие от обратных тригонометрических функций, функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и т. д. называются прямыми тригонометрическими функциями аргумента x.

Как уже отмечалось, все прямые тригонометрические функции являются функциями однозначными.

Пользоваться обратными тригонометрическими функциями при решении задач не всегда удобно вследствие их многозначности. Поэтому наряду с обратными тригонометрическими функциями $\operatorname{Arc}\sin x$, $\operatorname{Arc}\cos x$ и т. д. вводятся и изучаются еще и другие обратные тригонометрические функции, а именно

$$\arcsin x, \quad \arccos x \quad \operatorname{arc}\operatorname{tg} x,$$

которые определяются так, чтобы каждая из них была функцией однозначной.

§ 2. СВОЙСТВА ОДНОЗНАЧНЫХ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

A. $\arcsin x$

$\arcsin x$ есть отвлеченное число в границах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, равное числу радианов, содержащихся в таком угле, синус которого равен x.

Из этого определения следует, что равенство $y = \arcsin x$ равносильно следующим утверждениям:

$$1) \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$2) \quad \sin y = x.$$

Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то равенство $y = \arcsin x$ равносильно следующим утверждениям:

$$1)\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$2)\ \sin y = x.$$

Если $-1 \leqslant x \leqslant 0$, то равенство $y = \arcsin x$ равносильно следующим утверждениям:

$$1)\ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant 0;$$

$$2)\ \sin y = x.$$

Значение функции $\arcsin x$ представляет собой определенное действительное число лишь в том случае, когда

$$|x| \leqslant 1.$$

Из данного определения функция $\arcsin x$ следует, что

$$\arcsin 0 = 0; \qquad \arcsin(-0) = 0;$$

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \qquad \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \qquad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}; \qquad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3};$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}; \qquad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Чтобы найти, например, $\arcsin \frac{1}{2}$, мы сперва ищем в границах от 0 до 90° такой угол, синус которого равен $\frac{1}{2}$. Таким углом будет угол 30° *. В этом угле содержится $\frac{\pi}{6}$ радианов. Следовательно, $\arcsin \frac{1}{2}$ равняется отвлеченному числу $\frac{\pi}{6}$.

Чтобы найти $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, мы сперва ищем в границах от —90 до 0° такой угол, синус которого равен $-\frac{1}{2}$. Таким углом будет угол —30°. В этом угле содержится $-\frac{\pi}{6}$ радианов. Следовательно, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

---

* Мы здесь не должны были бы обращаться к градусной мере угла. И если мы это делаем, то только потому, что часто учащиеся с большей легкостью производят расчеты углов в градусном измерении, нежели в радианном.

Очевидно, что $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}=-\arcsin\frac{1}{2}$.
Этот результат легко обобщить и получить, что

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x.$$

Нетрудно убедиться, что, например,

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2};$$

$$\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{2};$$

$$\sin(\arcsin 1)=1.$$

Из определения функции $\arcsin x$ следует, что

$$\sin(\arcsin x)=x.$$

Если над числом x сначала выполняется действие нахождения арксинуса, а затем над полученным результатом действие нахождения синуса, то в результате получится первоначальное число x.

Выражение $\arcsin^3 x$ принято понимать как выражение $(\arcsin x)^3$. Выражение же $\arcsin x^3$ принято понимать как выражение $\arcsin(x^3)$.

Например,

$$\arcsin^3\frac{1}{2}=\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{\pi}{6}\right)^3=\frac{\pi^3}{216};$$

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}.$$

Б. $\operatorname{arc\,tg} x$

$\operatorname{arc\,tg} x$ есть отвлеченное число в границах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, равное числу радианов, содержащихся в таком угле, тангенс которого равен x.

Из этого определения следует, что равенство $y=\operatorname{arc\,tg} x$ равносильно следующим утверждениям:

1) $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$;
2) $\operatorname{tg} y=x$.

Если $x\geqslant 0$, то равенство $y=\operatorname{arc\,tg} x$ равносильно следующим утверждениям:

1) $0\leqslant y<\frac{\pi}{2}$;
2) $\operatorname{tg} y=x$.

Если $x\leqslant 0$, то равенство $y=\operatorname{arc\,tg} x$ равносильно следующим утверждениям:

1) $-\frac{\pi}{2}<y\leqslant 0$;
2) $\operatorname{tg} y=x$.

Значение функции $\operatorname{arc\,tg} x$ представляет собой определенное действительное число при всяком значении x.

Из данного определения функции $\operatorname{arc\,tg} x$ следует, что

$$\operatorname{arctg} 0 = 0; \qquad \operatorname{arctg}(-0) = 0;$$
$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}; \qquad \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6};$$
$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}; \qquad \operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4};$$
$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}; \qquad \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Если $x \to +\infty$, то $\operatorname{arc\,tg} x \to \frac{\pi}{2}$.

Если $x \to -\infty$, то $\operatorname{arc\,tg} \to -\frac{\pi}{2}$.

Поэтому иногда условно пишут:

$$\operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2};$$
$$\operatorname{arc\,tg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x;$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x.$$

B. arc cos x

$\arccos x$ есть отвлеченное число в границах от 0 до π, равное числу радианов, содержащихся в таком угле, косинус которого равен x.

Равенство $y = \arccos x$ равносильно следующему:

$$\begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant \pi; \\ \cos y = x. \end{cases}$$

Значение функции $\arccos x$ представляет определенное действительное число тогда и только тогда, когда $|x| \leqslant 1$.

Из данного определения функции $\arccos x$ следует, что

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}; \qquad \arccos(-0) = \frac{\pi}{2};$$
$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}; \qquad \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3};$$
$$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4};$$
$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}; \qquad \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6};$$
$$\arccos 1 = 0; \qquad \arccos(-1) = \pi - 0 = \pi.$$

Очевидно, что

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$
$$\cos(\arccos x) = x.$$

§ 3. ВЫРАЖЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Многозначные обратные тригонометрические функции выражаются формулами:

$\mathrm{Arc}\sin x = k\pi + (-1)^k \arcsin x$ (см. стр. 513—515);

$\mathrm{Arc\,tg}\, x = k\pi + \mathrm{arc\,tg}\, x$;

$\mathrm{Arc}\cos x = 2k\pi \pm \arccos x$,

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Например,

$$\mathrm{Arc}\sin \frac{1}{2} = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6};$$

$$\mathrm{Arc\,tg}\, 1 = k\pi + \frac{\pi}{4};$$

$$\mathrm{Arc}\cos \frac{\sqrt{2}}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

и т. д.

Функция $y = \mathrm{Arc}\sin x$ называется функцией, обратной функции $y = \sin x$. Функция же $\csc x$ не есть функция, обратная функции $\sin x$, но есть величина, обратная величине $\sin x$, так как $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

Из многозначной функции $\mathrm{Arc}\sin x$ можно выделить сколько угодно однозначных функций. Например, можно выделить однозначную функцию, заключающуюся в границах от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ или от $\frac{3\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{2}$ и т. д.

Но во всех теоретических и практических вопросах принято пользоваться преимущественно однозначной функцией арксинуса в границах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, т. е. такой, которая и была введена нами выше. Это замечание относится и к остальным обратным тригонометрическим функциям.

§ 4. О ЗНАКАХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДЕЙСТВИЙ

Напишем знаки известных нам математических действий:

$\sqrt{\ }$	— знак квадратного корня;
$\sqrt[3]{\ }$	— знак кубического корня;
$\log_{10}$	— знак логарифма по основанию 10;
$\log_2$	— » » » » 2;
$\log_3$	— » » » » 3;
$\sin$	— знак синуса;
$\cos$	— знак косинуса;
$\arcsin$	— знак арксинуса (однозначного);
$\mathrm{arc\,tg}$	— знак арктангенса (однозначного);

$\operatorname{Arc}\sin$ — знак арксинуса (многозначного);
$\operatorname{Arc}\operatorname{tg}$ — знак арктангенса (многозначного).

Если под каждым из этих знаков поместить какое-либо число, например число 100, то получим:

$\sqrt{100}$ — корень квадратный из числа 100;
$\sqrt[3]{100}$ — корень кубический из числа 100;
$\log_{10} 100$ — логарифм числа 100 по основанию 10;
$\log_2 100$ — » » 100 » 2;
$\log_3 100$ — » » 100 » 3;
$\sin 100$ — синус числа 100;
$\cos 100$ — косинус числа 100;
$\arcsin 100$ — арксинус (однозначный) числа 100;
$\operatorname{arc}\operatorname{tg} 100$ — арктангенс (однозначный) числа 100;
$\operatorname{Arc}\sin 100$ — арксинус (многозначный) числа 100;
$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 100$ — арктангенс (многозначный) числа 100.

Любое из этих математических действий выполняется над отвлеченным числом и в результате опять получается отвлеченное число. Всякое математическое действие выполняется по своему особому правилу.

Пользуясь тем, что эти правила нам известны, мы получим:

$\sqrt{100} = 10$;
$\sqrt[3]{100} = 4 +$ некоторое положительное число, меньшее 1;
$\log_{10} 100 = 2$;
$\log_2 100 = 6 +$ некоторое положительное число, меньшее 1;
$\log_3 100 = 4 +$ некоторое положительное число, меньшее 1;
$\sin 100 =$ синус угла в 100 радианов $\approx -0{,}515$;
$\cos 100 \approx 0{,}857$;
$\arcsin 100$ не равняется никакому действительному числу;
$\operatorname{arc}\operatorname{tg} 100 \approx 1{,}561$;
$\operatorname{Arc}\sin 100$ не равняется никакому действительному числу;
$\operatorname{Arc}\operatorname{tg} 100 \approx k\pi + 1{,}561$.

Выражаясь образно, можно сказать, что каждый знак математического действия представляет собой как бы простейшую математическую «машину», принимающую к переработке отвлеченные числа. В то время как некоторые из этих «машин» принимают к переработке любые числа, другие принимают не всякие числа.

Например, «машины» $\sqrt[3]{}$; $\sin$; $\cos$; $\operatorname{arc}\operatorname{tg}$ принимают к переработке любые числа. «Машина» $\sqrt{}$ принимает лишь положительные числа и нуль. «Машины» $\log_{10}$; $\log_2$; $\log_3$ принимают лишь положительные числа. «Машины» $\arcsin$, $\arccos$ принимают лишь числа от -1 до $+1$ включительно.

Полученное в результате математических действий число может выражать ту или иную физическую величину в зависимости от той конкретной задачи, которую мы решали с помощью этих математических действий.

§ 5. ПРИМЕРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ОДНОЗНАЧНЫМИ ОБРАТНЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

1. Упростить выражение $\sin(\arccos x)$.

Так как $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, то

$$\sin(\arccos x) \geqslant 0.$$

Поэтому, пользуясь формулой $\sin\gamma = \pm\sqrt{1-\cos^2\gamma}$, получим, что

$$\sin(\arccos x) = +\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

2. Упростить выражение $\cos(\arcsin x)$.

Так как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, значит, $\cos(\arcsin x) \geqslant 0$.

Поэтому, пользуясь формулой $\cos\gamma = \pm\sqrt{1-\sin^2\gamma}$, получим, что

$$\cos(\arcsin x) = +\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

3. Упростить выражение $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$.

Пользуясь формулой $\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}$,

получим, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{1}{x}$.

4. Упростить выражение $\operatorname{tg}(\arcsin x)$.

Пользуясь формулой $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}$, получим, что

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5. Упростить выражение $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Пусть $x \geqslant 0$, тогда $0 \leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Пользуясь формулой

$$\sin\gamma = \pm\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}},$$

получим, что

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \pm\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Но из этих двух знаков годным является только знак плюс. Действительно, $\sin(\operatorname{arctg} x) \geqslant 0$, так как при $x \geqslant 0$ $0 \leqslant \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$. Правая же часть будет положительным числом или нулем, если из двух знаков, стоящих перед ней, выбрать только знак плюс (ведь по условию $x \geqslant 0$). Итак, окончательно

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = +\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Пусть $x < 0$, тогда $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 0$.

Пользуясь формулой

$$\sin\gamma = \pm\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\gamma}},$$

получим, что

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \pm\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}} = \pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Но из этих двух знаков годным является только знак плюс. Ведь $\sin(\operatorname{arctg} x) < 0$, так как при $x < 0$ будет $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < 0$. Правая же часть будет отрицательным числом лишь тогда, когда мы из двух знаков, стоящих перед ней, выберем только знак плюс (ведь по условию $x < 0$). Итак, при $x < 0$ формула имеет тот же вид, как и при $x \geqslant 0$, т. е.

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = +\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Таким образом, равенство

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

справедливо при всяком значении x.

6. Доказать тождество $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Сначала вычислим синус левой части написанного выше равенства*:

$$\sin(\arcsin x + \arccos x) =$$
$$= \sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arccos x) + \sin(\arccos x)\cos(\arcsin x) =$$
$$= x\cdot x + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1.$$

Из одного того факта, что $\sin(\arcsin x + \arccos x) = 1$, мы еще не можем заключить, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, так как существует бесконечное множество различных углов, синус которых равен 1.

Чтобы удостовериться в том, что сумма $\arcsin x + \arccos x$ равняется именно $\frac{\pi}{2}$, необходимо найти границы этой суммы.

По определению

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

Складывая, получим:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x + \arccos x \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

* Воспользуемся здесь формулой $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

Но среди чисел, больших или равных $-\frac{\pi}{2}$ и меньших или равных $\frac{3\pi}{2}$, имеется лишь одно число $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен 1. Поэтому

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается и тождество

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

7. Показать справедливость равенства

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

Сначала вычислим тангенс суммы, стоящей в левой части написанного равенства:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)\right]^{*} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right)}.$$

Для сокращения записей вычислим предварительно значения тангенсов, стоящих в числителе последней дроби:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{5}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}.$$

Найдем также, что

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{11}.$$

Теперь

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) =$$

$$= \frac{\frac{4}{7} + \frac{3}{11}}{1 - \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{11}} = \frac{65}{65} = 1.$$

---

* Воспользуемся здесь формулой $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

Очевидно, что

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4};$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{5} < \frac{\pi}{4};$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{7} < \frac{\pi}{4};$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{8} < \frac{\pi}{4}.$$

Складывая, получим, что

$$\left(0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) < \pi.$$

Итак, мы установили два факта:

1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}\right) = 1;$

2) $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} < \pi.$

Из этих двух фактов вытекает, что

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4},$$

что и требовалось доказать.

8. Решить уравнение $\arccos x = 2\arcsin x$.

Если два числа равны, то равны и их косинусы. Поэтому из данного уравнения вытекает уравнение $\cos(\arccos x) = \cos(2\arcsin x)$. Но данное уравнение и вновь полученное, вообще говоря, не равносильны. Всякий корень первого уравнения будет корнем второго, но не всякий корень второго уравнения обязательно должен быть корнем первого, так как из равенства косинусов не обязательно следует равенство чисел, стоящих под знаками косинусов. Поэтому каждый из корней второго уравнения надо испытать подстановкой в первое уравнение и отобрать лишь те, которые удовлетворяют первому уравнению.

Второе уравнение после преобразований примет вид:

$$x = \cos^2(\arcsin x) - \sin^2(\arcsin x)^*,$$

или

$$x = (\sqrt{1 - x^2})^2 - x^2,$$

или

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ и } x_2 = -1.$$

---

* Здесь использована формула $\cos 2\gamma = \cos^2\gamma - \sin^2\gamma$.

Подставляя в первоначально заданное уравнение вместо неизвестного x число $\frac{1}{2}$, получаем:

$$\arccos\frac{1}{2}=2\arcsin\frac{1}{2},$$

или

$$\frac{\pi}{3}=2\frac{\pi}{6},$$

т. е. тождество.

Подставляя число -1, получим:

$$\arccos(-1)=2\arcsin(-1),$$

или

$$\pi=2\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. равенство неверное.

Итак, первоначальное уравнение имеет лишь один корень $x=\frac{1}{2}$.

9. Решить уравнение $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} 2x=\frac{\pi}{4}$.

Преобразуем данное уравнение, взяв тангенсы его левой и правой части:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg} 2x)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

(см. пояснения к примеру 8).

Применим формулу тангенса суммы и примем во внимание, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$:

$$\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x)}=1;$$

$$\frac{x+2x}{1-x\cdot 2x}=1; \qquad 3x=1-2x^2;$$

$$2x^2+3x-1=0;$$

$$x_1=\frac{\sqrt{17}-3}{4} \text{ и } x_2=\frac{-\sqrt{17}-3}{4}.$$

Равенство

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}+\operatorname{arctg} 2\cdot\frac{\sqrt{17}-3}{4}=\frac{\pi}{4}$$

справедливо, так как его левая часть заключена между 0 и $\frac{\pi}{2}$ и имеет своим тангенсом единицу.

Равенство же

$$\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{17}-3}{4}+\operatorname{arctg} 2\cdot\frac{-\sqrt{17}-3}{4}=\frac{\pi}{4}$$

несправедливо, так как его левая часть заключена между $-\pi$ и 0, а потому не может равняться $\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, данное уравнение имеет только один корень

$$x=\frac{\sqrt{17}-3}{4}.$$

10. Найти точное значение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$ или $\arcsin(\sin 10)$. По определению

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 5)=5.$$

Но будет грубой ошибкой считать $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)=5$. Ведь по определению

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg} x<\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$ есть число, принадлежащее промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Число же 5 этому промежутку не принадлежит.

Полагая $x=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$ и взяв тангенсы левой и правой части последнего равенства, получим:

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}[\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)], \quad \text{или}$$

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 5.$$

По условию равенства тангенсов (см. стр. 621)

$$x=k\pi+5,$$

где k — целое число.

Но в наших условиях $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.

Поэтому

$$-\frac{\pi}{2}<k\pi+5<\frac{\pi}{2}.$$

Решив эти неравенства, получим, что

$$\frac{-\frac{\pi}{2}-5}{\pi}<k<\frac{-\frac{\pi}{2}-5}{\pi}.$$

Следовательно, $k=-2$

и

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)=-2\pi+5.$$

Полагая $x=\arcsin(\sin 10)$ и взяв синусы левой и правой части этого равенства, получим: $\sin x=\sin 10$.

По условию равенства синусов

$$x=k\pi+(-1)^k 10.$$

В наших условиях

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant k\pi + (-1)^k 10 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $k=3$.

Следовательно,

$$\arcsin(\sin 10) = 3\pi + (-1)^3 10 = 3\pi - 10.$$

Примечание. Мы назвали функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$ и т. д. обратными тригонометрическими, т. е. обратными по отношению к функциям $y=\sin x$, $y=\cos x$ и т. д. В связи с этим возникает вопрос: что вообще следует понимать под термином «функция, обратная данной»? Ответ на этот вопрос изложен в следующем параграфе.

§ 6. ВЗАИМНО ОБРАТНЫЕ ФУНКЦИИ И СВЯЗЬ МЕЖДУ ИХ ГРАФИКАМИ

Если уравнение $y=f(x)$, определяющее y как функцию от x, можно решить относительно x, причем так, что каждому значению y будет соответствовать одно определенное значение x, то мы получим уравнение $x=\varphi(y)$, определяющее x как функцию от y. Эта вторая функция $x=\varphi(y)$ называется обратной по отношению к первой $y=f(x)$, а первая — обратной по отношению ко второй. Например, функции $y=2x+1$ и $x=\frac{y-1}{2}$ взаимно обратные. Также взаимно обратны функции $y=2^x$ и $x=\log_2 y$.

Функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ имеют одно и то же графическое изображение. Однако тождественность графиков взаимно обратных функций не должна заслонять различие между типами (структурами) этих функций. Например, из двух взаимно обратных функций $y=2^x$ и $x=\log_2 y$ первая является показательной, а вторая — логарифмической. Из двух взаимно обратных функций $y=x^3$ и $x=\sqrt[3]{y}$ первая является рациональной, а вторая — иррациональной.

Если мы запишем обратную функцию $x=\varphi(y)$ в виде $y=\varphi(x)$, т. е. обозначим аргумент, как обычно, буквой x, а функцию — буквой y, то получим $y=\varphi(x)$.

Функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ также называются взаимно обратными, так как обозначения переменных не играют роли при изучении функциональных зависимостей. Например, уравнения $y=\sin x$ и $v=\sin u$ выражают одну и ту же функциональную зависимость.

Таким образом, взаимно обратными функциями является как пара функций

$$y=2^x \quad \text{и} \quad x=\log_2 y,$$

так и пара функций

$$y = 2^x \quad \text{и} \quad y = \log_2 x.$$

Как мы уже знаем, графики функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ тождественны. Однако графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ уже, вообще говоря, не тождественны. Мы докажем, что один из графиков двух взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ является зеркальным отражением другого в биссектрисе первого координатного угла.

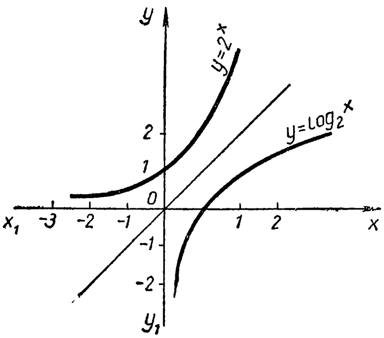


Рис. 171.

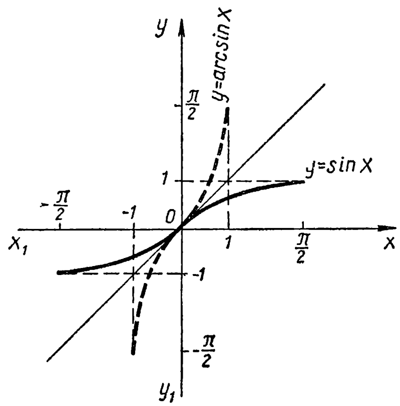


Рис. 172.

Действительно, каждой точке (a, b) графика функции $y = f(x)$ соответствует точка (b, a), принадлежащая графику функции $x = \varphi(y)$.

Но точки (a, b) и (b, a) таковы, что одна из них является зеркальным отражением другой в биссектрисе первого координатного угла. Поэтому графики, например, функций $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$ расположатся симметрично относительно биссектрисы первого координатного угла (рис. 171).

График функции $y = \arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ будет зеркальным отражением в биссектрисе первого координатного угла графика функции $y = \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ (рис. 172).

Графики обратных тригонометрических функций

На рисунке 173 изображен график функции $y = \arcsin x$.
На рисунке 174 изображен график функции $y = \arccos x$.
На рисунке 175 изображен график функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Когда $x = 0$, то и $y = 0$. Когда $x \to -\infty$, то $y \to -\frac{\pi}{2}$.

Когда $x \to +\infty$, то $y \to +\frac{\pi}{2}$.

Эти три графика являются **зеркальным отражением** в биссектрисе первого координатного угла соответствующих частей графиков функций $y=\sin x$, $y=\cos x$, $\operatorname{tg} x$.

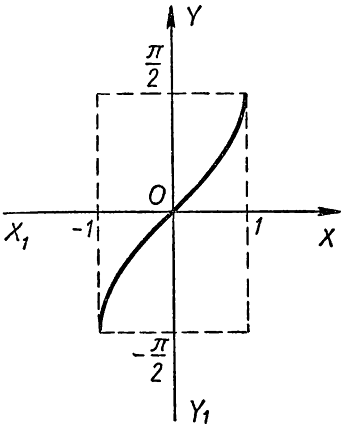


Рис. 173.

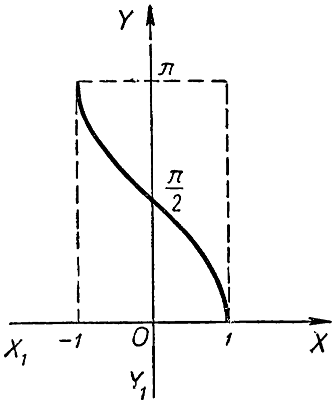


Рис. 174.

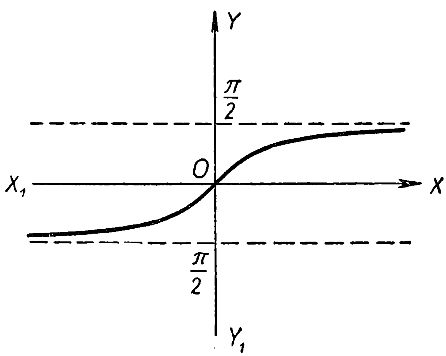


Рис. 175.

УПРАЖНЕНИЯ

289. Найти значения выражений:

а) $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; Отв. 0.

б) $\sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; Отв. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

в) $\operatorname{tg}\left(2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arcsin\frac{1}{2}\right)$, Отв. $-\sqrt{3}$.

290. Найти значения выражений:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arcsin\frac{1}{4}\right)$; Отв. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt{15}}{12}$.

б) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; Отв. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

в) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$. Отв. 1.

291. Решить уравнение $\arccos(x-1)=2\arccos x$. Отв. 0; $\frac{1}{2}$.

292. Решить уравнение $\operatorname{arctg}(x+1)+\operatorname{arctg}(x-1)=\operatorname{arctg}2$. Отв. 1.

293. Доказать, что $\arcsin(\cos\arcsin x)+\arccos(\sin\arccos x)=\frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА XXX

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ВОЗНИКНОВЕНИЮ ВЫРАЖЕНИЙ ВИДА $a+b\sqrt{-1}$

Решая, например, уравнение $x^2-2x+2=0$, получим:

$$x_1=1+\sqrt{-1} \text{ и } x_2=1-\sqrt{-1}.$$

Решая уравнение

$$x^2+4x+13=0,$$

получим:

$$x_1=-2+3\sqrt{-1} \text{ и } x_2=-2-3\sqrt{-1}.$$

(Мы приняли, что $\sqrt{-9}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=3\sqrt{-1}$.)

Выражения $1+\sqrt{-1}$, $1-\sqrt{-1}$, $-2+3\sqrt{-1}$, $-2-3\sqrt{-1}$ мы не придумывали; они возникли в процессе решения уравнений.

В дальнейшем мы увидим, что в алгебре встречаются и другие действия, приводящие к выражениям вида

$$a+b\sqrt{-1},$$

где a и b есть действительные числа.

Особенность выражения

$$a+b\sqrt{-1}$$

заключается в том, что в него входит квадратный корень из минус единицы, т. е. символ $\sqrt{-1}$. Этот символ $\sqrt{-1}$ пока для нас не имеет смысла, так как квадратный корень из отрицательного числа не может равняться ни положительному, ни отрицательному числу, ни нулю, т. е. не может равняться никакому действительному числу.

Отказываться изучать выражения вида $a+b\sqrt{-1}$ лишь потому, что символ $\sqrt{-1}$ не есть действительное число, означало бы допустить очень большое торможение в развитии алгебры, развитии ее методов. Отказываться изучать выражения вида $a+b\sqrt{-1}$ неразумно, подобно тому, как неразумно было бы отказываться изучать символы $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ и другие лишь потому, что они не являются рациональными числами.

Если бы мы отказались пользоваться выражениями вида $a+b\cdot\sqrt{-1}$, то многие алгебраические действия остались бы невыполнимыми. Например, нельзя было бы выполнить действие извлечения корня 6-й степени из отрицательного числа.

Если же мы будем искать результат извлечения корня 6-й степени из отрицательного числа в виде выражения $a+b\sqrt{-1}$, то это действие окажется выполнимым. (Все это подробно будет изложено ниже.)

Учение о числах вида $a+b\sqrt{-1}$ и теории, развитые на основе этого учения, оказались мощным средством, позволившим успешно решить крупнейшие теоретические и практические проблемы. Например, знаменитый русский ученый Николай Егорович Жуковский * блестяще использовал эти теории для расчета крыльев самолета. Эти теории с огромным успехом применяются в электротехнике, гидромеханике, теории упругости и во многих других отделах естествознания и техники.

§ 2. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

По форме выражения

$$a+b\cdot\sqrt{-1}$$

напишем выражение

$$a+bi,$$

где a и b — действительные числа.

Какой смысл будет иметь символ i и само выражение $a+bi$, выяснится позже. Мы начнем с того, что условимся выполнять действия сложение, вычитание, умножение и деление над выражениями вида $a+bi$ по обычным правилам алгебры, принимая всякий раз $i^2=-1$.

Символ i назовем **мнимой единицей**.

Сначала рассмотрим, что следует понимать под различными целыми степенями мнимой единицы.

По условию $i^2=-1$.

Далее,

$$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i; \qquad i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot -1=-1;$$
$$i^4=i^2\cdot i^2=-1\cdot -1=1; \qquad i^7=i^4\cdot i^3=1\cdot -i=-i;$$
$$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i; \qquad i^8=i^4\cdot i^4=1\cdot 1=1 \text{ и т. д.}$$

---

* См. „Краткие исторические сведения".

$$i^{-5}=\frac{1}{i^5}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{1}{-1}=-i;$$

$$i^{22}=i^{20}\cdot i^2=(i^4)^5\cdot i^2=1^5\cdot(-1)=-1;$$

$$i^{75}=i^{72}\cdot i^3=(i^4)^{18}\cdot i^3=1\cdot(-1)=-i;$$

$i^{739}=i^3$ (число 3 есть остаток при делении 739 на 4).

В качестве упражнения найдем значения нескольких выражений, содержащих мнимую единицу:

1) $(1+i)^4=[(1+i)^2]^2=(1+2i+i^2)^2=$
$=(1+2i-1)^2=(2i)^2=4i^2=4\cdot(-1)=-4;$

2) $(1+i\sqrt{3})^3=1+3\cdot i\sqrt{3}+3(i\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}\cdot i)^3=$
$=1+3i\sqrt{3}-9-3i\sqrt{3}=-8;$

3) $(2+3i)(3+2i)=6+4i+9i+6i^2=6+13i-6=13i;$

4) $(2+3i)(2-3i)=2^2-(3i)^2=4+9=13.$

§ 3. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Выражение

$$a+bi,$$

где a и b — действительные числа и i — мнимая единица, называется комплексным числом, записанным в алгебраической форме.

Число a называется действительной частью, а b — мнимой частью комплексного числа $a+bi$. Действительная часть комплексного числа обозначается символом $R(a+bi)$. Например,

$$R(3+5i)=3,$$

$$R(-3+5i)=-3.$$

Буква R здесь употребляется как первая буква французского слова «reelle», что означает «действительный».

Коэффициент b, входящий в комплексное число $a+bi$, называется коэффициентом при мнимой единице и обозначается символом $I(a+bi)$. Например, $I(3+5i)=5$, $I(3-5i)=-5$.

Буква I здесь употребляется как первая буква французского слова «imaginair», означает «мнимый».

Числа a и b называются первой и второй составляющими комплексного числа $a+bi$.

Комплексное число по определению считается равным нулю тогда и только тогда, когда оба его составляющих числа равны нулю одновременно.

Из этого определения следует, что комплексные числа $a+bi$ и a_1+b_1i равны друг другу тогда и только тогда, когда одновременно $a=a_1$ и $b=b_1$.

В самом деле, если $a_1+b_1i=a+bi$, то $(a_1-a)+(b_1-b)i=0$. Отсюда по только что приведенному определению следует, что $a_1-a=0$ и $b_1-b=0$, т. е. $a_1=a$ и $b_1=b$.

Комплексные числа вида $a+0i$ отождествляются с действительными числами, а именно считается, что

$$a+0i=a.$$

Таким образом, любое действительное число можно рассматривать как частный случай комплексного числа. Например,

$$5=5+0i.$$

Комплексное число $a+bi$, в котором $b\neq 0$, называется мнимым. Число вида $0+bi$ называется чисто мнимым и считается, что

$$0+bi=bi.$$

Таким образом, произведение действительного числа на мнимую единицу есть чисто мнимое число.

Так как

$$\pm\sqrt{-a^2}=\pm ai,$$

то квадратный корень из отрицательного числа есть число чисто мнимое.

Понятия «больше» и «меньше» неприменимы к мнимым числам. Например, нет смысла говорить, что $3i$ больше, чем $2i$, или, что $3i$ меньше, чем $2i$. Нет смысла говорить, что $3+2i$ больше, чем $2+3i$, или что $3+2i$ меньше, чем $2+3i$.

Определение. ***Два комплексных числа, имеющие одинаковые первые составляющие и противоположные вторые составляющие, называются сопряженными*** (взаимно).

Короче, два комплексных числа $a+bi$ и $a-bi$ называются сопряженными. Числа $2+3i$ и $2-3i$ сопряженные. Если данное число $-5\frac{1}{2}-18i$, то ему сопряженным будет $-5\frac{1}{2}+18i$. Если данное число $9i$, то ему сопряженным будет $-9i$. Если данное число $5+0i$, то ему сопряженным будет $5-0i$, т. е. если данное число 5, то ему сопряженным также будет 5.

Замечания

1. Пусть $A>0$. Тогда $\sqrt{-A}=i\sqrt{A}$, т. е. квадратный корень из отрицательного числа есть число чисто мнимое. Корень же, например, четвертой или шестой степени из отрицательного числа, как мы увидим ниже, уже не будет чисто мнимым числом (см. стр. 569).

2. Пусть $A>0$. Тогда равенство

$$\sqrt{-A}=i\sqrt{A} \qquad (1)$$

будет справедливым.

Но наряду с этим равенство

$$\sqrt{A}=i\sqrt{-A} \qquad (2)$$

уже будет несправедливым. Докажем это. Допустим, что неравенство (2) справедливо. Заменим в нем выражение $\sqrt{-A}$ равным ему выражением $i\sqrt{A}$ (см. равенство 1). Тогда получим:

$$\sqrt{A}=i\cdot i\sqrt{A}.$$

Но это последнее равенство является неверным, так как оно приводит к нелепому равенству

$$1=i^2, \text{ или } 1=-1.$$

Итак, доказано, что равенство

$$\sqrt{A}=i\sqrt{-A},$$

где $A>0$, является неверным.

§ 4. ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Эти действия, как уже было указано выше, производятся следующим образом:

Сложение

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.$$

Вычитание

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

Умножение

$$(a+bi)(c+di)=ac+bdi^2+adi+bci=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2+b^2.$$

Произведение двух сопряженных комплексных чисел есть действительное неотрицательное число.

Деление

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac-bdi^2+bci-adi}{c^2-d^2i^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

(Здесь предполагалось, что $c+di\neq 0$, так как делить на нуль невозможно.)

Обратим внимание на то, что деление комплексных чисел начинается с умножения делимого и делителя на число, сопряженное знаменателю.

Заметим, что, выполняя четыре действия над комплексными числами, мы всякий раз получаем в результате опять же комплексное число.

Например, при делении числа $a+bi$ на число $c+di$ мы получили комплексное число, действительная часть которого равна $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, а мнимая часть есть $\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Легко доказать, что сумма и произведение комплексных чисел обладают переместительным, сочетательным и распределительным свойствами. Но на доказательстве этого мы останавливаться не будем.

§ 5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК АФФИКСЫ ТОЧЕК

Составляющие a и b комплексного числа $a+bi$ примем за абсциссу и ординату точки. Полученная таким образом точка M (рис. 176) называется геометрическим изображением этого комплексного числа.

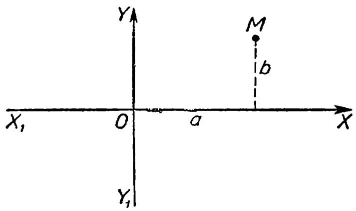


Рис. 176.

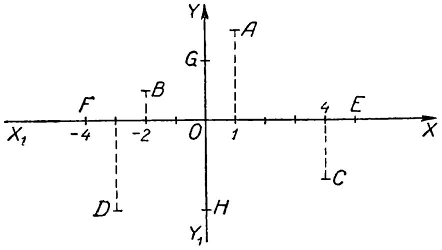


Рис. 177.

Комплексное число $a+bi$ называется аффиксом точки $M(a, b)$ («аффикс» происходит от латинского слова «affixus», что означает «прикрепленный»).

Аффиксы точек оси X_1X являются действительными числами, тогда как аффиксы точек оси Y_1Y есть чисто мнимые числа.

Аффиксами точек A; B; C; D; E; F; G; H (рис. 177) являются комплексные числа: $1+3i$, $-2+i$, $4-2i$, $-3-3i$, $5+0i$, $-4+0i$, $0+2i$ и $0-3i$.

Каждому комплексному числу соответствует одна и только одна точка координатной плоскости, и, наоборот, каждой точке плоскости соответствует одно и только одно комплексное число.

Таким образом, между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости имеет место взаимно однозначное соответствие.

Конечно, комплексное число и его изображение в виде точки — это разные понятия, разные вещи. Несмотря на это, с помощью такого изображения удается хорошо иллюстрировать многие положения, связанные с комплексными числами.

§ 6. ВЕКТОРЫ НА ПЛОСКОСТИ КАК ИЗОБРАЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Вектором называется направленный прямолинейный отрезок. Направление вектора задается тем, что одна из его конечных точек считается началом, а вторая — концом. В соответствии с этим считается, что вектор направлен от своего начала к своему концу. Вектор обозначают парой букв с общей стрелкой над ними: $\overrightarrow{AB}$. При этом первая буква A обозначает начало вектора, а вторая B — его конец (рис. 178).

Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковую длину, лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых и направлены в одну и ту же сторону.

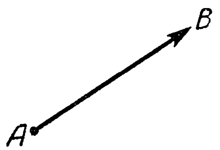


Рис. 178.

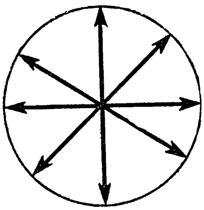


Рис. 179.

Векторы, изображенные на рисунке 179, различны, хотя все они имеют одинаковую длину, равную радиусу окружности.

В предыдущем параграфе была дана геометрическая интерпретация * комплексных чисел в виде точек координатной плоскости. Теперь мы можем дать комплексным числам еще и другую геометрическую интерпретацию. А именно каждому комплексному числу мы поставим в соответствие вектор, идущий от начала координат к точке, аффиксом которой является это комплексное число.

Таким образом, каждое комплексное число будет изображаться вектором, лежащим в координатной плоскости.

Комплексное число $a+bi$ изображается вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 180).

На рисунке 181 векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OH}$ изображают комплексные числа: $1+3i$, $-2+i$; $4-2i$, $-3-3i$; $5+0i$; $-5+0i$; $0+5i$; $0-5i$.

Действительные числа изображаются векторами, лежащими на оси X_1X, а чисто мнимые числа — векторами, лежащими на оси Y_1Y.

Каждому комплексному числу соответствует один и только один вектор, лежащий в координатной плоскости, и, наоборот, каждому

* Геометрическая интерпретация означает геометрическое истолкование, или геометрическое представление, или геометрический смысл какого-либо математического действия или положения.

вектору, лежащему в координатной плоскости, соответствует одно и только одно комплексное число.

Между множеством комплексных чисел и множеством векторов, лежащих в координатной плоскости, имеет место взаимно однозначное соответствие.

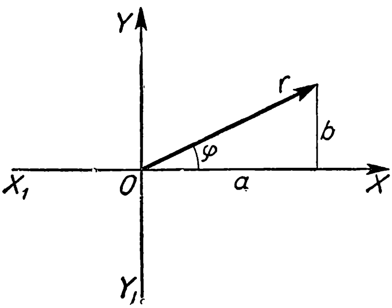


Рис. 180.

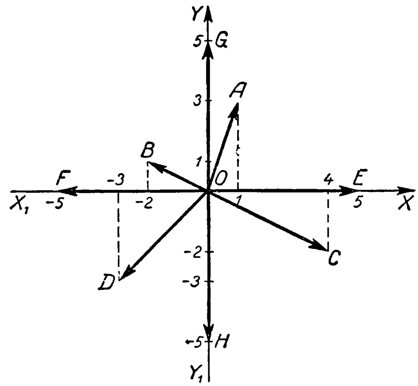


Рис. 181.

Конечно комплексное число и изображающий его вектор — это разные понятия, разные вещи. Но, несмотря на это, с помощью векторов удается хорошо иллюстрировать многие положения, связанные с комплексными числами.

§ 7. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Модуль комплексного числа

Построим вектор $\overline{OM}$, изображающий комплексное число $a+bi$ (рис. 182).

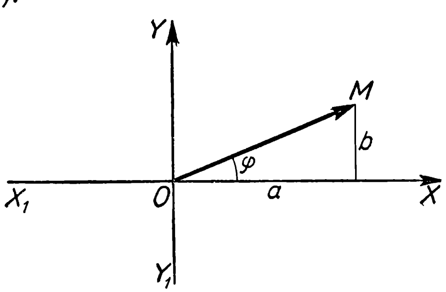


Рис. 182.

Сам вектор $\overline{OM}$ принято обозначать символом $\vec{r}$, а его длину — буквой r.

Очевидно, что $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Эта положительная величина называется **модулем** комплексного числа $a+bi$ и обозначается символом $|a+bi|$. Таким образом,

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2};$$
$$|1+i|=\sqrt{2};$$
$$|-1-i|=\sqrt{2};$$
$$|0+0i|=0;$$
$$|3-4i|=5;$$
$$|3+0i|=\sqrt{3^2+0^2}=3=|3|;$$
$$|-3+0i|=\sqrt{(-3)^2+0^2}=3=|-3|;$$
$$|a+0i|=\sqrt{a^2+0^2}=|a|.$$

Из последних трех равенств видно, что модуль действительного числа равен абсолютному значению этого действительного числа:

$$|0+5i|=5;$$
$$|0-5i|=5;$$
$$|bi|=|b|;$$
$$|i|=1.$$

Отсюда видно, что модуль чисто мнимого числа равен абсолютному значению коэффициента при i.

Нуль есть единственное комплексное число, модуль которого равен нулю.

Точки, аффиксами которых являются комплексные числа с одним и тем же модулем, лежат на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным их модулю.

Аргумент комплексного числа

Определение. ***Отвлеченное число φ в границах $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, равное числу радианов*, содержащихся в угле между положительным направлением оси X_1X и вектором*** (рис. 182), ***называется главным значением аргумента комплексного числа $a+bi$ и обозначается символом*** $\arg(a+bi)$.

---

* Здесь полезно напомнить, что радиан есть единица для измерения углов. Радиан есть такой центральный угол, которому соответствует дуга, равная по своей длине радиусу окружности.

Число радианов, содержащихся в центральном угле, равно отношению длины дуги, заключенной между его сторонами, к радиусу.

Угловой градус и угловой радиан являются различными основными единицами измерения углов. Угловой градус содержится в полном обороте 360 раз, а угловой радиан лишь 2π раз (или приблизительно 6,28 раза).

Напомним также, что π есть отвлеченное иррациональное число.

Угол φ будем отсчитывать следующим образом.

Если вектор $\overrightarrow{OM}$ лежит в верхней полуплоскости, то угол φ мы будем отсчитывать от положительного направления оси OX против хода часовой стрелки до направления вектора $\overrightarrow{OM}$. Если же вектор будет лежать в нижней полуплоскости, то отсчет производится от оси OX по ходу часовой стрелки до направления вектора.

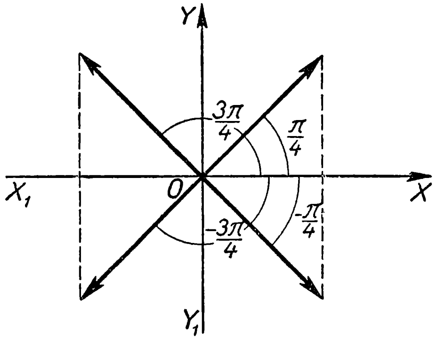


Рис. 183.

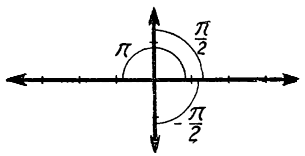


Рис. 184.

В первом случае φ выражается положительным числом, а во втором — отрицательным.

В том случае, когда вектор, соответствующий комплексному числу, окажется лежащим на оси X_1X и направленным в сторону, противоположную положительному направлению оси X_1X, мы будем принимать $\varphi = \pi$.

Примеры.

Построив векторы, соответствующие комплексным числам: $1+i$; $1-i$, $-1+i$; $-1-i$ (рис. 183), легко видеть, что

$$\arg(1+i) = \frac{\pi}{4}; \qquad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4};$$

$$\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}; \quad \arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4}.$$

Построив векторы, соответствующие числам $4+0i$; $-4-0i$; $0+2i$; $0-2i$ (рис. 184), легко видеть, что

$$\arg(4+0i) = \arg 4 = 0; \qquad \arg(0+2i) = \arg 2i = \frac{\pi}{2};$$

$$\arg(-4+0i) = \arg(-4) = \pi; \qquad \arg(0-2i) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Главное значение аргумента действительного положительного числа равно нулю.

Главное значение аргумента действительного отрицательного числа равно π.

Главное значение аргумента чисто мнимого числа с положительным коэффициентом при i равно $\frac{\pi}{2}$.

Главное значение аргумента чисто мнимого числа с отрицательным коэффициентом при i равно $-\frac{\pi}{2}$.

Главное значение φ аргумента комплексного числа определяется однозначно из системы двух равенств:

$$\cos\varphi=\frac{a}{r} \text{ и } \sin\varphi=\frac{b}{r},$$

где

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

В том случае, когда $\cos\varphi=-1$, а $\sin\varphi=0$, будем считать $\varphi=\pi$, а не $-\pi$, как это мы условились раньше.

Определение. ***Аргументом комплексного числа $a+bi$ называется выражение $\varphi+2k\pi$, где φ есть главное значение аргумента комплексного числа $a+bi$, а k есть любое целое число*** (положительное, отрицательное или нуль).

Главное значение аргумента комплексного числа определяется однозначно.

Аргумент же комплексного числа имеет бесконечное множество значений, которые отличаются друг от друга на величину, кратную 2π *.

Аргумент комплексного числа $a+bi$ обозначается символом $\operatorname{Arg}(a+bi)$.

По определению

$$\operatorname{Arg}(a+bi)=\arg(a+bi)+2k\pi.$$

Например:

$$\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi;$$

$$\operatorname{Arg}(\sqrt{3}+3i)=\frac{\pi}{3}+2k\pi;$$

$$\operatorname{Arg}5=2k\pi; \quad \operatorname{Arg}(-5)=\pi+2k\pi; \quad \operatorname{Arg}(5i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi.$$

Ранее термином «аргумент» мы называли независимую переменную. Здесь же этот термин употребляется совсем в другом смысле. Здесь мы употребляем не термин «аргумент», а термин «аргумент комплексного числа».

В заключение найдем модуль и аргумент числа $\frac{5-i}{2-3i}$.

---

* Величина называется **кратной** 2π, если она равна $2k\pi$, где k — любое целое число (положительное, отрицательное или нуль).

Произведение kx, где k — любое целое число, называется числом, кратным x.

Сначала выполним деление:

$$\frac{5-i}{2-3i}=\frac{(5-i)(2+3i))}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{13+13i}{13}=1+i.$$

Теперь получим:

$$\left|\frac{5-i}{2-3i}\right|=|1+i|=\sqrt{2},$$

$$\operatorname{Arg}\frac{5-i}{2-3i}=\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}+2k\pi.$$

§ 8. ВЫРАЖЕНИЕ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СОСТАВЛЯЮЩИХ И ВЫРАЖЕНИЕ СОСТАВЛЯЮЩИХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ МОДУЛЯ И АРГУМЕНТА

Как уже известно из предыдущего параграфа,

$$r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}, \quad \arg(a+bi)=\varphi,$$

где φ определяется однозначно из системы двух равенств (рис. 185):

$$\cos\varphi=\frac{a}{r} \text{ и } \sin\varphi=\frac{b}{r};$$

$$\operatorname{Arg}(a+bi)=\varphi+2k\pi.$$

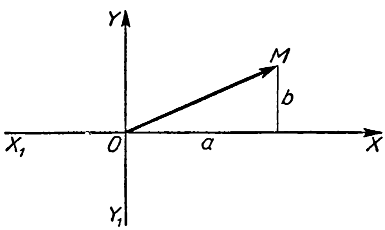


Рис. 185.

Замечание. Число нуль есть единственное комплексное число, аргумент которого неопределенный.

Обратная задача решается так:

$$a=r\cos\varphi \text{ и } b=r\sin\varphi.$$

§ 9. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Поскольку

$$a=r\cos\varphi \text{ и } b=r\sin\varphi \qquad (\text{см. § 8}),$$

постольку

$$a+bi=r\cos\varphi+ir\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ***называется тригонометрической формой комплексного числа*** в отличие от формы $a+bi$, называемой алгебраической.

Каждая из этих двух форм имеет свои преимущества. Преимущества тригонометрической формы мы увидим в следующих параграфах.

Примеры преобразования алгебраической формы комплексного числа в тригонометрическую

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);\qquad 1=\cos 0+i\sin 0;$$
$$-1=\cos\pi+i\sin\pi;$$
$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right];\qquad i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2};$$
$$\sqrt{3}+3i=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Очевидно, что

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=r[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)].$$

Обратим внимание на условия равенства двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме.

Два комплексных числа, заданных в тригонометрической форме, равны друг другу тогда и только тогда, когда их модули равны, а аргументы отличаются на величину, кратную 2π.

Следовательно, если

$$r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

то

$$1)\ r_1=r_2 \text{ и } 2)\ \varphi_2=\varphi_1+2k\pi.$$

§ 10. УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ, ЗАДАННЫХ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Умножение

$$[r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)]\cdot[r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)]=$$
$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i\sin\varphi_1\cos\varphi_2+i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Этот результат показывает, что ***модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей, а аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.***

Короче можно сказать так: ***при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.***

Геометрическое истолкование умножения

Пусть

вектор $\overrightarrow{OM_1}$ изображает множимое $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$;
» $\overrightarrow{OM_2}$ » множитель $r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$;
» $\overrightarrow{OM}$ » произведение $r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+$ $+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$ (рис. 186).

Вектор $\overrightarrow{OM}$ получается путем поворота вектора $\overrightarrow{OM_1}$ на угол φ_2 и умножения его модуля на r_2.

Если $r_2 > 1$, то происходит растяжение вектора $\overrightarrow{OM_1}$; если же $r_2 < 1$, то — сжатие.

Таким образом, вектор, соответствующий произведению, получается из вектора, соответствующего множимому путем его поворота и растяжения (или сжатия).

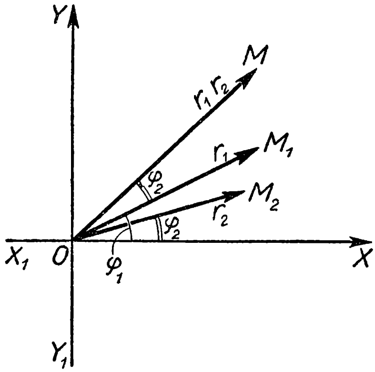


Рис. 186.

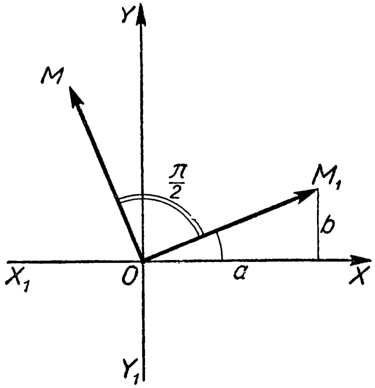


Рис. 187.

Умножение комплексного числа на i геометрически означает поворот вектора, соответствующего множимому, на угол $\frac{\pi}{2}$, так как $|i| = 1$ и $\arg i = \frac{\pi}{2}$ (рис. 187).

Вектор $\overrightarrow{OM_1}$ изображает число $a + bi$.

» $\overrightarrow{OM}$ » произведение $(a + bi) \cdot i$.

Деление

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - i\cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

При делении двух комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

§ 11. ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

Пусть n — целое положительное число. Тогда

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ldots r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r^n[\cos(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi) + i\sin(\varphi + \varphi + \ldots + \varphi)] =$$

$$= r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Итак,

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n[\cos n\varphi + i\sin n\varphi]. \qquad \text{(I)}$$

Пусть $n = -m$, где m — целое положительное число. Тогда

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-m} = \frac{1}{[r\cos\varphi + i\sin\varphi]^m} = \frac{1}{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)} =$$

$$= \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{r^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)(\cos m\varphi - i\sin m\varphi)} = \frac{\cos m\varphi - i\sin m\varphi}{r^m(\cos^2 m\varphi + \sin^2 m\varphi)} =$$

$$= r^{-m}(\cos m\varphi - i\sin m\varphi) = r^{-m}[\cos(-m\varphi) + i\sin(-m\varphi)].$$

Последний результат показывает, что формула (I) верна и для целых отрицательных показателей.

Итак, ***чтобы возвысить комплексное число в целую (положительную или отрицательную) степень, достаточно возвысить в эту степень модуль, а аргумент умножить на показатель степени.***

Переписав формулу (I) в виде

$$r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

и сократив на r^n, получим:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Эта формула называется формулой Муавра.

Формула Муавра имеет применение как в самой математике, так и в ее приложениях.

Полагая в формуле Муавра $n = 2$, получим:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi,$$

или

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i\,2\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Приравнивая друг другу в отдельности действительные и мнимые части комплексных чисел, стоящих в левой и правой частях последнего равенства, получим:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Полагая $n = 3$, получим:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi; \quad \sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$$

и т. д.

§ 12. ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЯ И ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА

Определение. ***Корнем n-й степени из данного комплексного числа называется всякое комплексное число, n-я степень которого равна данному комплексному числу.***

Мы здесь докажем, что корень n-й степени из комплексного числа, отличного от нуля, всегда имеет n и только n различных значений (n — натуральное число).

Корень n-й степени из комплексного числа $a+bi$ обозначается символом $\sqrt[n]{a+bi}$.

Данное комплексное число $a+bi$ запишем в тригонометрической форме $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Пусть

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

По определению корня получим:

$$[\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

или

$$\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

По условию равенства двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, получим:

$$\rho^n=r \text{ и } n\alpha=\varphi+2k\pi,$$

или

$$\rho=\sqrt[n]{r};\qquad \alpha=\frac{\varphi+2k\pi}{n}.$$

Таким образом, результат извлечения корня представится так:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+r\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $\sqrt[n]{r}$ есть арифметическое значение корня, т. е. определенное положительное число, а k есть любое целое число. ($\sqrt[n]{r}$ легко вычислить с помощью таблиц логарифмов.)

Поскольку буква k может принимать любые целые значения, может показаться на первый взгляд, что корень имеет бесконечное множество различных значений. Но мы увидим, что это не так.

Сначала придадим букве k последовательно значения 0; 1; 2; 3; ...; $(n-1)$.

Тогда получим следующие n значений корня:

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n}+i\sin\frac{\varphi}{n}\right);\\
&2)\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right);\\
&3)\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+4\pi}{n}\right);\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&n)\ \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right].
\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Во-первых, докажем, что среди этих n значений нет двух одинаковых.

Пусть p и q — какие угодно различные числа, взятые из конечной последовательности 0; 1; 2; 3; ...; $(n-1)$.

Тогда комплексные числа

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2p\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2p\pi}{n}\right) \text{ и } \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2q\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2q\pi}{n}\right)$$

будут различными, так как разность их аргументов не является числом, кратным 2π.

Действительно,

$$\frac{\varphi+2p\pi}{n}-\frac{\varphi+2q\pi}{n}=\frac{p-q}{n}\cdot 2\pi.$$

Но величина $\frac{p-q}{n}\cdot 2\pi$ не является кратной 2π, так как $\frac{p-q}{n}$ не есть целое число.

Во-вторых, докажем, что при всяком значении буквы k, не принадлежащем конечной последовательности 0; 1; 2; 3; ...; $(n-1)$, мы получим такое значение корня, которое уже содержится в перечне (А).

Пусть $k=N$, где N — произвольное целое число, не принадлежащее конечной последовательности 0; 1; 2; ...; $(n-1)$.

Пусть при делении N на n получилось целое частное m и целый остаток h. Тогда

$$N=mn+h,$$

где

$$0\leqslant h\leqslant n-1.$$

Теперь получим, что

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2N\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2N\pi}{n}\right)=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi+2(mn+h)\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2(mn+h)\pi}{n}\right]=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2h\pi}{n}+2m\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2h\pi}{n}+2m\pi\right)\right]=$$
$$=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2h\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2h\pi}{n}\right).$$

Но это последнее комплексное число содержится в перечне (А), так как $0\leqslant h\leqslant n-1$.

Корень n-й степени из нуля имеет только одно значение, равное нулю, т. е.

$$\sqrt[n]{0}=0.$$

Примеры.

1. $$\sqrt[5]{1+i}=\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=$$

$$=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right);$$

$$k=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4.$$

$$\sqrt[5]{1+i}=\begin{cases}\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{20}+i\sin\frac{\pi}{20}\right);\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{20}+i\sin\frac{9\pi}{20}\right);\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{20}+i\sin\frac{17\pi}{20}\right);\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{20}+i\sin\frac{25\pi}{20}\right);\\ \sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{33\pi}{20}+i\sin\frac{33\pi}{20}\right).\end{cases}$$

2. $$\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{0+2k\pi}{n},$$

$k=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ (n-1).$

$$\sqrt[n]{1}=\begin{cases}\cos 0+i\sin 0=1;\\ \cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};\\ \cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n};\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}.\end{cases}$$

Найти все четыре значения $\sqrt[4]{-2-i2\sqrt{3}}$. Прежде всего представим подкоренное число в тригонометрической форме. Очевидно, что $|-2-i2\sqrt{3}|=4$, а угол φ определяется из двух равенств:

$$\cos\varphi=\frac{a}{r}\quad\text{и}\quad\sin\varphi=\frac{b}{r},$$

т. е. из равенств:

$$\cos\varphi=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad\sin\varphi=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда главное значение аргумента комплексного числа $-2-i2\sqrt{3}$ равно $-\frac{2\pi}{3}$. Но результат извлечения корня из комплексного числа не изменится, если мы вместо главного значения его аргумента возьмем другое его значение. Поэтому примем, например, $\varphi = \frac{4\pi}{3}$. $\left(\frac{4\pi}{3}\right.$ мы получили, прибавив к главному значению $-\frac{2\pi}{3}$ число $\left.2\pi.\right)$

$$\sqrt[4]{-2-i2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)} =$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right),$$

где

$$k = 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

$$\sqrt[4]{-2-i2\sqrt{3}} = \begin{cases} \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; \\ \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)\right] = \\ = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; \\ \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)\right] = \\ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}; \\ \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)\right] = \\ = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Найдем все 6 значений корня шестой степени из минус единицы:
$$\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6},$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5).$$

$$\sqrt[6]{-1} = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \\ \cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6} = i; \\ \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \\ \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \\ \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i; \\ \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i. \end{cases}$$

Получилось три пары сопряженных мнимых комплексных корней. Из них два корня чисто мнимые.

§ 13. СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ СЛОЖЕНИЕМ И ВЫЧИТАНИЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И ВЕКТОРОВ

Комплексное число $x+iy$ принято обозначать одной буквой, например буквой z или w.

Если число $x+iy$ обозначено буквой z, то под символом $\bar{z}$ понимают число, сопряженное числу z, т. е. комплексное число $x-iy$. Например, если $w=2-3i$, то $\bar{w}=2+3i$.

Мы знаем, что комплексное число $z=x+iy$ можно изображать на плоскости точкой M с координатами x и y, что записывается так: $M(x; y)$.

Мы знаем также, что комплексное число z можно изображать и вектором $\overrightarrow{OM}$, который начинается в начале координат и кончается в точке M. Проекциями вектора $\overrightarrow{OM}$ на оси OX и OY будут соответственно x и y, что записывается так:

$$\overrightarrow{OM}(x; y).$$

Соответствие между комплексным числом z, точкой M и вектором OM мы будем обозначать знаком $\longleftrightarrow$ и писать

$$z=x+iy \longleftrightarrow M(x; y) \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}\{x; y\}.$$

Ввиду такого соответствия принято говорить вместо слов «комплексное число z» просто «точка z» или «вектор z».

Рассмотрим два комплексных числа:

$$z_1=x_1+iy_1 \longleftrightarrow M_1(x_1; y_1) \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_1\{x_1; y_1\}$$

и

$$z_2=x_2+iy_2 \longleftrightarrow M_2(x_2; y_2) \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}_2\{x_2; y_2\}.$$

На рисунке 188 построены точки M_1 и M_2 и векторы $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ с их проекциями на оси координат. Как известно, векторы складываются по правилу параллелограмма. На том же рисунке 188 построен параллелограмм $OM_1M_3M_2$, так что вектор $\overrightarrow{OM}_3=\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2$. Легко видеть, что вектор $\overrightarrow{OM}_3$ соответствует комплексному числу, являющемуся суммой комплексных чисел z_1 и z_2.

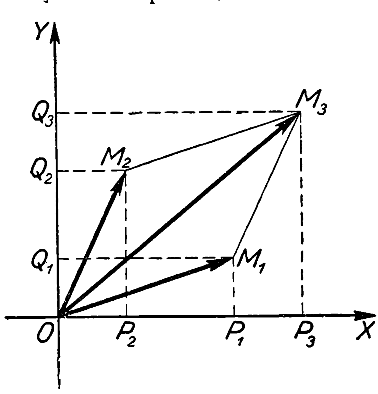


Рис. 188.

Таким образом, вектор, соответствующий сумме двух комплексных чисел, есть сумма векторов, соответствующих слагаемым. Короче можно сказать так: при сложении комплексных чисел складываются и соответствующие им векторы.

Геометрические векторы по определению считаются равными, если они имеют одинаковую длину, параллельны и одинаково направлены.

Поэтому в результате параллельного переноса геометрического вектора получается вектор, равный исходному.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{M_2M_3}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{OM_3}$, построенные на рисунке 188. Очевидно, что

$$OP_1 = P_2P_3 = x_1;\ \ OP_2 = P_1P_3 = x_2;$$
$$OQ_1 = Q_2Q_3 = y_1;\ \ OQ_2 = Q_1Q_3 = y_2.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_2M_2} \longleftrightarrow z_1 \ \text{ и } \ \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_1M_3} \longleftrightarrow z_2.$$

Подставляя в равенство $\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ вместо векторов $\overrightarrow{OM_2}$ или $\overrightarrow{OM_1}$ равные им векторы $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$, можно написать:

$$\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_3}, \tag{1}$$

или

$$\overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{M_2M_3}. \tag{2}$$

Пользуясь этими равенствами, можно получить другое правило сложения векторов (конечно, равносильное правилу параллелограмма).

Для того чтобы сложить векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$, нужно из конца вектора $\overrightarrow{OM_1}$ построить вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$, равный вектору $\overrightarrow{OM_2}$ (или из конца вектора $\overrightarrow{OM_2}$ построить вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$, равный вектору $\overrightarrow{OM_1}$), а затем построить вектор $\overrightarrow{OM_3}$, который начинается в начале первого вектора и кончается в конце второго вектора. Это правило можно назвать правилом замыкания ломаной, так как вектор $\overrightarrow{OM_3}$ замыкает ломаную OM_1M_3 или ломаную OM_2M_3.

Из рисунка 188 видно, что вектор $\overrightarrow{OM_3}$ имеет проекции

$$x_3 = x_1 + x_2 \ \text{ и } \ y_3 = y_1 + y_2.$$

Таким образом, сложению векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ по правилу замыкания ломаной соответствует сложение комплексных величин z_1 и z_2:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \longleftrightarrow \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} =$$
$$= \overrightarrow{OM_3}\ \{x_1 + x_2;\ y_1 + y_2\}.$$

Заметим, что сложение векторов по правилу замыкания ломаной точно так же производится и при любом другом расположении точек M_1 и M_2. Теперь рассмотрим вычитание.

Перепишем равенства (1) и (2) так:

$$\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{M_1M_3},$$

$$\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{M_2M_3}.$$

Из этих равенств и из рисунка 188 следует, что **разность двух векторов, начинающихся в одной точке, есть вектор, который начинается в конце вычитаемого вектора и кончается в конце уменьшаемого вектора.**

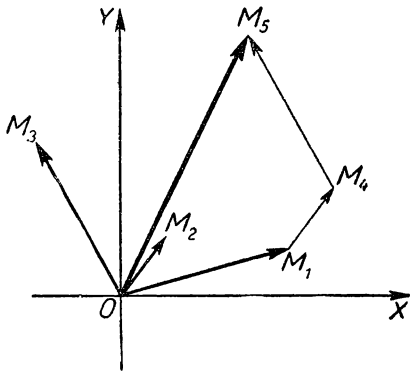


Рис. 189.

Правило замыкания ломаной особенно полезно при сложении более чем двух векторов. Например, для того чтобы сложить три вектора $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ (рис. 189), нужно из конца вектора $\overrightarrow{OM_1}$ построить вектор $\overrightarrow{M_1M_4}$, равный вектору $\overrightarrow{OM_2}$, из конца вектора $\overrightarrow{M_1M_4}$ построить вектор $\overrightarrow{M_4M_5}$, равный вектору $\overrightarrow{OM_3}$, а затем построить вектор $\overrightarrow{OM_5}$, который замыкает ломаную $OM_1M_4M_5$.

Величина и направление замыкающего вектора $\overrightarrow{OM_5}$ не зависят от того, в каком порядке мы строим ломаную из векторов, равных данным векторам $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$.

Сложению нескольких векторов соответствует сложение комплексных чисел, изображаемых этими векторами.

Длина вектора $\overrightarrow{OM_3}$ *есть модуль суммы комплексных чисел* z_1, z_2 (рис. 188).

Длины же векторов $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ являются модулями комплексных чисел z_1 и z_2.

Из того, что $OM_3 < OM_1 + OM_2$, следует, что $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

Если бы векторы $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ лежали на одной прямой и были бы одинаково направлены, то оказалось бы, что

$$OM_3 = OM_1 + OM_2, \text{ т. е.}$$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Следовательно, *модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей слагаемых,* что записывается так:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Вектор $\overrightarrow{M_1M_3}$ (рис. 188) соответствует комплексному числу, равному разности комплексных чисел z_3 и z_1, т. е. комплексному числу $z_3 - z_1$. Но мы знаем, что модуль любого комплексного числа равен длине вектора, соответствующего этому комплексному числу. Поэтому $|z_3 - z_1| = M_1M_3$.

С другой стороны, M_1M_3 есть расстояние между точками M_1 и M_3, соответствующими комплексным числам z_1 и z_3. Следовательно, модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками, соответствующими этим комплексным числам.

Пример. Если $|z - 2i| = 4$, то точка z лежит на окружности с центром в точке (0; 2) и радиусом, равным 4.

§ 14. ЗАДАЧИ

1. Точки M_1, M_2 и M_3, аффиксами которых являются три комплексных числа z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой. Доказать, что отношение $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$ есть действительное число.

Доказательство. Разностям $z_2 - z_1$ и $z_3 - z_2$ соответствуют векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$ (рис. 190).

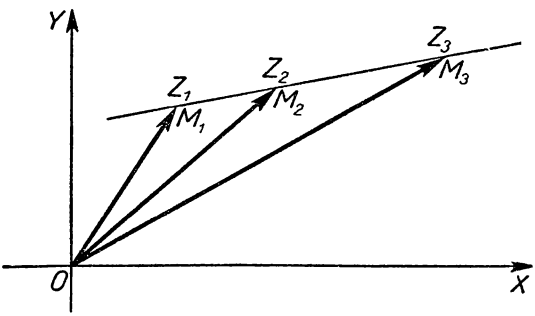


Рис. 190.

Векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M_3}$ лежат на одной прямой и одинаково направлены. Поэтому соответствующие им комплексные числа $z_2 - z_1$ и $z_3 - z_2$ будут иметь один и тот же аргумент φ. Следовательно,

$$z_2 - z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$z_3 - z_2 = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r и ρ — действительные числа.

Отношение $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2}$ равно отношению $\frac{r}{\rho}$, т. е. есть число действительное, что и требовалось доказать.

2. Точки M_1, M_2, M_3 и M_4, аффиксами которых являются четыре комплексных числа z_1, z_2, z_3, z_4, лежат последовательно на одной и той же окружности. Доказать, что двойное отношение

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

есть действительное число.

Доказательство. Комплексным числам $z_1 - z_3$ и $z_2 - z_3$ соответствуют последовательно векторы $\overrightarrow{M_3M_1}$ и $\overrightarrow{M_3M_2}$ (рис. 191). Так как при делении комплексных чисел аргументы вычитаются,

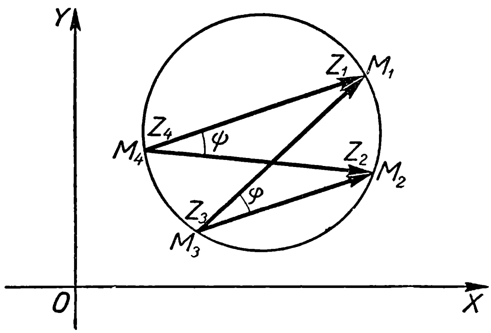


Рис. 191.

то аргумент отношения $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ будет равен $\varphi + 2k\pi$. Так же точно аргумент отношения $\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ будет равен $\psi + 2m\pi$. Следовательно,

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и

$$\frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_3} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Но $\psi = \varphi$, как углы вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу. Поэтому двойное отношение $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ будет равно $\frac{r}{\rho}$, т. е. будет числом действительным, что и требовалось доказать.

Примечание. При решении этой задачи мы воспользовались тем, что аргументом отношения $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ будет $\varphi + 2k\pi$. Поясним это.

Перенесем начала векторов $\overrightarrow{M_3M_1}$ и $\overrightarrow{M_3M_2}$ в начало координат (рис. 192).

Тогда аргументом комплексного числа $z_1 - z_3$, соответствующего вектору $\overline{M_3M_1}$, будет $\theta_1 + 2m\pi$, а аргументом комплексного числа $z_2 - z_3$ будет $\theta_2 + 2n\pi$. Следовательно, аргументом отношения $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ будет

$$(\theta_1 + 2m\pi) - (\theta_2 + 2n\pi), \quad \text{т. е.}$$
$$\theta_1 - \theta_2 + 2(m - n)\pi, \quad \text{или} \quad \varphi + 2k\pi.$$

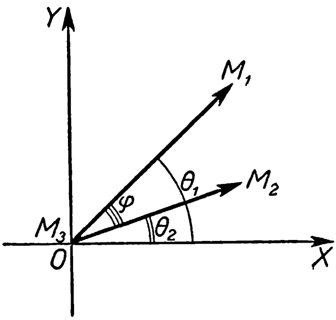


Рис. 192.

§ 15. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК ИЗОБРАЖЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Еще в древности математики сталкивались в процессе решения некоторых задач с извлечением квадратного корня из отрицательных чисел и считали в этих случаях задачу неразрешимой. Тогда не знали и не предполагали, что можно создать теорию комплексных чисел и пользоваться ею для решения практических задач. Поэтому математики того времени относились к мнимым числам с недоверием и отвергали их. В первой половине XVI века была найдена формула Кардано (см. стр. 629, 630):

$$y_{1,2,3} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}\,^{*},$$

представляющая решение кубического уравнения

$$y^3 + py + q = 0. \tag{1}$$

При исследовании этой формулы обнаружилось следующее: когда $\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ — отрицательное число, все три корня уравнения (1) обязательно действительные. Таким образом, оказалось, что для нахождения трех действительных корней уравнения (1) необходимо выполнить извлечение квадратного корня из отрицательного числа и два раза извлечение кубического корня из комплексного числа. Поясним сказанное на числовом примере.

Уравнение $y^3 - 63y + 162 = 0$ имеет три действительных корня: 3; 6; -9.

---

* Эта формула носит имя Кардано и впервые была им опубликована в 1545 году. Однако имеется предположение, что он заимствовал ее от Тарталья. Имеется и другое предположение, что формула Кардано была найдена еще в 1515 году С. Ферро. С. Ферро, Н. Тарталья и Дж. Кардано — итальянские математики XVI века.

При нахождении этих корней по формуле Кардано имеем следующее:

$$y_{1,2,3}=\sqrt[3]{-\frac{162}{2}+\sqrt{\left(\frac{162}{2}\right)^2+\left(\frac{-63}{3}\right)^3}}+$$
$$+\sqrt[3]{-\frac{162}{2}-\sqrt{\left(\frac{162}{2}\right)^2+\left(\frac{-63}{3}\right)^3}},$$

или

$$y_{1,2,3}=\sqrt[3]{-81+\sqrt{6561-9261}}+\sqrt[3]{-81-\sqrt{6561-9261}}=$$
$$=\sqrt[3]{-81+\sqrt{-2700}}+\sqrt[3]{-81-\sqrt{-2700}}.$$

Этот факт, свидетельствующий о возможности нахождения действительных корней уравнения с помощью операций над мнимыми числами, произвел на математиков того времени сильнейшее впечатление и содействовал в некоторой мере признанию мнимых чисел.

Несмотря на это, все же многие математики продолжали относиться к мнимым числам с недоверием, как к чему-то сверхъестественному.

Так, немецкий ученый Г. Лейбниц в 1702 году писал: «Мнимые числа — это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием» *.

Несостоятельность и вредность таких взглядов на мнимые числа ярко обнаружилась при появлении гениальных творений Л. Эйлера (1707 — 1783). Эйлер сделал мнимые числа мощным орудием для решения важных и трудных вопросов гидродинамики и других вопросов естествознания.

Пользуясь мнимыми числами, он продвинул далеко вперед и развитие самих математических наук.

Замечательная формула $e^{xi}=\cos x+i\sin x$ (см. стр. 699), явившаяся первым важным результатом теории комплексных чисел, была найдена Эйлером в 1748 году. Полагая в этой формуле Эйлера $x=2\pi$, получаем удивительную связь между числами e, π и i:

$$e^{2\pi i}=1.$$

Пользуясь теорией комплексных чисел, Софья Ковалевская решила труднейшую проблему о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

В своей знаменитой работе «О присоединенных вихрях» Н. Е. Жуковский с помощью теории комплексных чисел дал формулу для определения подъемной силы, действующей на самолет.

---

* В данном случае слово «амфибия» употреблено Лейбницем как символ, характеризующий соединение двух противоположных начал.

Амфибии (в зоологии) — название земноводных позвоночных животных. Амфибия (в технике) — машина, способная двигаться по суше и по воде.

Таким образом, мнимые числа, казавшиеся когда-то бесполезным, бессмысленным понятием, не только приобрели реальный характер, но и оказались мощным средством, ускоряющим развитие науки и техники.

Введение комплексных чисел сделало рассмотрение многих вопросов более единообразным и ясным и явилось новым, очень важным этапом в развитии понятия числа (см. раздел «О расширении понятия числа»).

В настоящее время комплексные числа широко употребляются для математического описания и решения очень многих вопросов физики и техники (в гидродинамике, аэромеханике, электротехнике, атомной физике и др.).

Теперь поясним кратко, как могут комплексные числа являться изображениями физических величин.

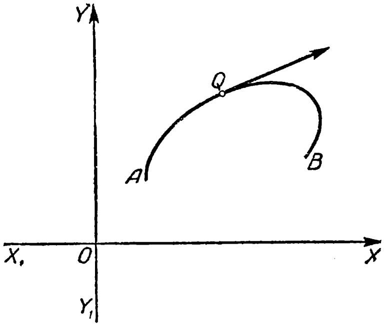


Рис. 193.

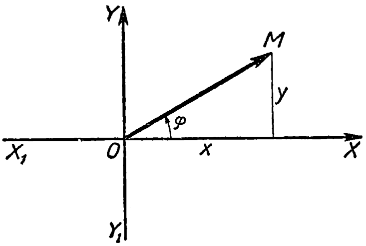


Рис. 194.

Под термином «комплексная величина» мы будем понимать всякую величину, которая может быть изображена геометрически вектором на плоскости.

Пусть точка Q движется произвольным образом в координатной плоскости XOY и пусть ее траекторией будет линия AB (рис. 193).

Как известно, скорость движущейся точки в любой момент имеет направление, совпадающее с направлением касательной к траектории в той ее точке, где находится в этот момент движущаяся точка. Следовательно, в любой момент скорость будет иметь некоторую величину и некоторое направление. Поэтому скорость будет определена лишь тогда, когда мы будем знать не только ее числовое значение, но и ее направление.

Пусть скорость точки в некоторый момент имеет числовое значение v *м/сек* и направлена по лучу, составляющему с положительным направлением оси X_1X угол φ.

Тогда эту скорость можно изобразить вектором $\overrightarrow{OM}$ с длиной, равной v единицам масштаба, и с углом φ между ним и осью X_1X (рис. 194).

(Начало вектора, изображающего скорость, мы поместили в начале координат. Это можно делать потому, что векторы, параллельные друг другу, одинаково направленные и имеющие равные длины, считаются равными.)

Сам вектор, изображающий скорость, принято обозначать символом $\vec{v}$, а его длину буквой v. Символы $\vec{v}$ и v имеют совершенно различный смысл. $\vec{v}$ есть изображение скорости, а v есть изображение лишь числового значения скорости. Нельзя писать $\vec{v}=v$.

Итак, скорость рассматриваемого нами движения есть такая физическая величина, которую можно изобразить вектором на плоскости. Значит, скорость есть «комплексная величина».

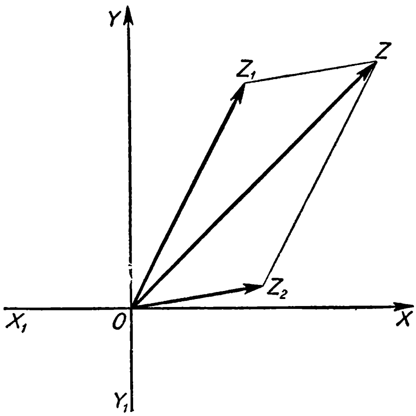


Рис. 195.

Но вектор $\overline{OM}$ определяется комплексным числом

$$x+yi,$$

где x и y — координаты конца вектора $\overline{OM}$ (рис. 194).

Следовательно, и скорость может быть изображена комплексным числом

$$x+yi,$$

где

$$x=v\cos\varphi \quad \text{и} \quad y=v\sin\varphi.$$

Таким образом, комплексное число $x+yi$ может представлять собой физическую величину (в данном случае скорость).

Комплексными числами можно изображать и другие физические величины, например ускорение при плоском движении, силы, действующие в одной плоскости, напряжение магнитного поля в различных точках плоскости и др.

С помощью действий над комплексными числами можно решать задачи, связанные с соответствующими физическими величинами.

Пример. Пусть скорость самолета относительно воздушных масс определяется комплексным числом $z_1=x_1+y_1i$, а скорость ветра комплексным числом $z_2=x_2+y_2i$.

Тогда путевая скорость самолета будет определяться комплексным числом

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\,i.$$

(Скорости складываются по правилу параллелограмма, рис. 195). Скорость самолета относительно воздушных масс называется технической скоростью.

294. Найти все 6 значений $\sqrt[6]{-1}$ и полученные результаты проверить возведением в степень.

Обратить внимание на то, что два значения из этих 6 значений будут чисто мнимыми, а остальные четыре не чисто мнимыми. Ни одного действительного значения $\sqrt[6]{-1}$ не имеет.

295. Найти:

$$|-\sqrt{2}+i\sqrt{2}|; \quad R(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}); \quad I(-\sqrt{2}+i\sqrt{2});$$
$$\arg(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}); \quad \operatorname{Arg}(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}).$$

296. Выразить в тригонометрической форме числа:

$$\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad -\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad i; \; -i; \quad 1; \; -1.$$

297. Где лежат точки, для которых:

1) $|z|=1$*; $|z|<1$; $|z|>1$.
2) $R(z)=1$; $R(z)<1$; $R(z)>1$.
3) $I(z)=1$; $I(z)<1$; $I(z)>1$.
4) $\arg z=1$; $\arg z=\frac{\pi}{2}$; $\arg z=-\frac{\pi}{2}$;

$$\arg z=0; \quad \arg z=\pi.$$

298. Найти значение выражений:

1) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^6$. Отв. 2.

2) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2k}$, где k — целое число. Отв. 1, если k четное. -1, если k нечетное.

299. Найти действительные числа x и y, если

$$x+yi=\frac{(1+i)^7}{(1-i)}.$$ Отв. $x=8$; $y=0$.

300. Найти модуль комплексного числа:

а) $(1+i)^4+3i$; Отв. 5.

б) $\frac{(1+i)^5}{1-i}$. Отв. 4.

---

* Буквой z обозначается для краткости комплексное число $x+iy$,

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}; \quad R(z)=x; \quad I(z)=y;$$
$$\arg z=\varphi; \quad \arg z=\varphi+2k\pi.$$

301. Найти комплексное число $z = x + yi$, если

$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ и $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$. Отв. 1) $6+17i$; 2) $6+8i$.

302. Найти аргумент комплексного числа $-1+i\sqrt{3}$.

Отв. $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

303. Найти все значения корня 10-й степени из единицы. (Полученные значения проверить путем возведения в 10-ю степень.)

304. Найти значение выражения $x^3 - x^2 + 10$ при $x = 1+i$.

Отв. 8.

305. Найти значение выражения $x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 14x + 10$ при $x = 1+i$. Отв. 0.

306. Найти значения следующих выражений:

а) ω^2; ω^3; ω^4; ω^6 при $\omega \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$;

б) $(1+2\omega+3\omega^2)(1+3\omega+2\omega^2)$ при $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$;

в) $x^4 + x^2 + 1$ при $x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Отв. а) $-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$; 1; $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$; 1;

б) 3; в) i.

307. Вычислить

$$\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}},$$

где n — натуральное число.

Указание. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n} \cdot \frac{1+i}{(1-i)^{-1}}$. Отв. $(-1)^n \cdot 2$.

308. Найти все комплексные числа, для которых

$$\bar{z} = z^{n-1},$$

где $\bar{z}$ — комплексное число, сопряженное с z, а n — целое положительное число, большее 2.

309. Парадокс. Докажем, что $+1 = -1$.

Доказательство. При доказательстве будем пользоваться равенством.

$$\sqrt{-A} = i\sqrt{A}.$$

При любых значениях x и y справедливо равенство

$$\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x}.$$

Положим, что $x = a$, $y = b$, тогда

$$\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a}. \qquad (1)$$

Положим, что $x=b$, $y=a$. Тогда

$$\sqrt{b-a}=i\sqrt{a-b}. \tag{2}$$

Перемножая (1) и (2), получим:

$$\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b-a}=i^2\sqrt{b-a}\cdot\sqrt{a-b}.$$

Разделив на $\sqrt{a-b}$ и на $\sqrt{b-a}$, придем к тому, что

$$1=i^2 \quad \text{или} \quad 1=-1.$$

Где ошибка в наших рассуждениях?

310. Пусть A и B — точки, соответствующие комплексным числам z_1 и z_2. Найти комплексное число, соответствующее точке C, делящей отрезок AB пополам.

311. Три вершины параллелограмма находятся в точках, соответствующих комплексным числам z_1, z_2, z_3. Найти комплексное число, соответствующее четвертой вершине, противолежащей вершине z_1.

312. Где лежит точка, соответствующая комплексному числу z, если $|z+2i|=1$.

313. Найти все четыре значения выражения

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}.$$

314. Найти модуль и аргумент комплексного числа

$$w=z^2+z,$$

если

$$z=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

ГЛАВА XXXI

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ РАСПОЛОЖЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

§ 1. МНОГОЧЛЕН n-й СТЕПЕНИ

Определение. ***Выражение***

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + px^2 + qx + r,$$

где $a \neq 0$ ***и*** n ***— целое положительное число, называется многочленом n-й степени относительно x.*** При этом предполагается, что буква x может принимать любые значения, т. е. что буква x обозначает собой величину, могущую изменяться как угодно. Что же касается букв a, b, c, ... , p, q, r, то они обозначают наперед выбранные известные числа, остающиеся неизменными при всех изменениях величины x. Буквы a, b, c, ..., p, q, r называются коэффициентами многочлена. Буква же x является независимой переменной.

Если среди чисел b, c, ... , p, q, r ни одно не равно нулю, то многочлен называется полным. В противном случае его называют неполным.

Примеры:

$3x^5 - x^4 + 2x^3 + 7x^2 - 4x - 11$ — полный многочлен 5-й степени относительно x;

$19y^3 - 2y^2 + y + 1$ — полный многочлен 3-й степени относительно y;

$z^{10} + z - 3$ — неполный многочлен 10-й степени относительно z;

$ax^2 + bx + 12$ — многочлен 2-й степени относительно x с буквенными коэффициентами;

$5x^2 - 2x + 13$ — полный многочлен 2-й степени с числовыми коэффициентами;

$ax^2 + bx$ — неполный многочлен 2-й степени с буквенными коэффициентами;

$x^3 - 13$ — неполный многочлен 3-й степени с числовыми коэффициентами;

$ax + b$ — общий вид многочлена 1-й степени;

$ax^2 + bx + c$ — общий вид многочлена 2-й степени;

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ — общий вид многочлена 3-й степени и т. д.

Во всех этих примерах предполагается, что $a \neq 0$.

Числовое значение многочлена n-й степени (относительно переменной x) зависит от значения x. Если изменять значение x, то будет изменяться и значение самого многочлена. Например,

при $x = 0$ значение многочлена $x^2 + x + 1$ будет 1;

» $x = \frac{1}{2}$ » » » $\frac{7}{4}$;

» $x = 1$ » » » 3;

» $x = -5$ » » » 21 и т. д.

Выражение $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + kx^2 + lx + m$ называется многочленом, расположенным по убывающим степеням переменной x.

Выражение же $m + lx + kx^2 + \ldots + cx^{n-2} + bx^{n-1} + ax^n$ называется многочленом, расположенным по возрастающим степеням переменной x. Буква x в обоих случаях является независимой переменной.

Член, содержащий независимую переменную в наивысшей степени, называется высшим членом.

Член, не зависящий от независимой переменной, называется свободным членом. В каждом из написанных выше многочленов свободным членом является m, а высшим членом ax^n.

Если свободный член не равен нулю, то этот свободный член называется низшим членом многочлена. Если свободный член равен нулю, то низшим членом называется тот, который содержит наинизшую степень независимой переменной.

Примеры:

Выражение $-a^3 - a^2 + 2$ есть многочлен 3-й степени, расположенный по убывающим степеням переменной a, с коэффициентами -1; -1; 0; 2.

Выражение $x - 5x^3 + x^4$ есть многочлен 4-й степени, расположенный по возрастающим степеням переменной x, с коэффициентами 0; 1; 0; -5; 1.

Выражение $a^5 - b^5$ есть многочлен 5-й степени, расположенный по убывающим степеням переменной a, с коэффициентами 1; 0; 0; 0; 0; -1.

Выражение $a^5 - b^5$ можно рассматривать и как многочлен 5-й степени, расположенный по возрастающим степеням переменной b, с коэффициентами 1; 0; 0; 0; 0; -1.

Многочлен $4x^4y^5 - 3x^2y^6 + 12x^8y^3 - 11$ зависит от двух переменных x и y. Но мы можем его рассматривать как многочлен, зависящий только от одной переменной, например от x. Для этого надо только под буквой y понимать какое-нибудь выбранное число и при изменениях x оставлять y неизменным.

Если многочлен

$$4x^4y^5 - 3x^2y^6 + 12x^8y^3 - 11$$

переписать в форме

$$12y^3x^8 + 4y^5x^4 - 3y^6x^2 - 11,$$

то получим многочлен 8-й степени, расположенный по убывающим степеням переменной x. Если же его переписать в форме

$$-3x^2y^6 + 4x^4y^5 + 12x^8y^3 - 11,$$

то получим многочлен 6-й степени, расположенный по убывающим степеням переменной y, с коэффициентами

$$-3x^2;\ 4x^4;\ 0;\ 12x^8;\ 0;\ 0;\ -11.$$

Выражение $(a^2+b^2)x^4 - cx^2 + (m+n)$ есть многочлен 4-й степени, расположенный по убывающим степеням переменной x, с коэффициентами

$$(a^2+b^2);\ 0;\ -c;\ 0;\ (m+n).$$

§ 2. УМНОЖЕНИЕ РАСПОЛОЖЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Произведение $(4x^3 - 5x^2 + x - 2)(x^2 - 3x + 1)$ условимся записывать так:

$$\times\begin{array}{r} 4x^3 - 5x^2 + x - 2 \\ x^2 - 3x + 1. \end{array}$$

Покажем на примерах, как удобнее вести запись при умножении расположенных многочленов.

П р и м е р ы:

1.
$$\begin{array}{r} \times\ 5x^3 - 7x^2 + \ x - 6 \\ -2x^2 - 3x + 1 \\ \hline -10x^5 + 14x^4 - \ 2x^3 + 12x^2 \qquad\qquad \\ -15x^4 + 21x^3 - \ 3x^2 + 18x \qquad \\ + \ 5x^3 - 7x^2 + x - 6 \\ \hline -10x^5 - x^4 + 24x^3 + 2x^2 + 19x - 6. \end{array}$$

Последняя строка представляет собой произведение данных многочленов после приведения подобных членов.

Высший член произведения равен произведению высших членов перемножаемых многочленов; низший член равен произведению их низших членов.

2.
$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} x^2+x+1 \\ x-1 \end{array} \\ \hline x^3+x^2+x\phantom{{}-1} \\ -x^2-x-1 \\ \hline x^3\phantom{{}+x^2+x}-1. \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{l} \times\begin{array}{l} a_1x^2+a_2x+a_3 \\ b_1x^2+b_2x+b_3 \end{array} \\ \hline a_1b_1x^4+a_1b_2x^3+a_1b_3x^2 \\ \qquad +a_2b_1x^3+a_2b_2x^2+a_2b_3x \\ \qquad\qquad a_3b_1x^2+a_3b_2x+a_3b_3 \\ \hline a_1b_1x^4+(a_1b_2+a_2b_1)x^3+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)x^2+(a_2b_3+a_3b_2)x+a_3b_3. \end{array}$$

Полученное произведение есть многочлен 4-й степени, расположенный по убывающим степеням независимой переменной x, с коэффициентами

$$a_1b_1;\ (a_1b_2+a_2b_1);\ (a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1);\ (a_2b_3+a_3b_2);\ a_3b_3.$$

§ 3. ДЕЛЕНИЕ РАСПОЛОЖЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Деление многочлена n-й степени относительно x на многочлен k-й степени относительно x есть новое действие, которому необходимо дать определение, так как мы еще не знаем, что надо понимать под этим действием. Это определение мы дадим сначала на примере, а затем и в общем виде.

Определение на примере. Разделить многочлен $x^5+x^4+x^3+2x^2+3x+4$ на многочлен x^2+x+1, это значит найти два новых многочлена Q и R так, чтобы равенство

$$x^5+x^4+x^3+2x^2+3x+4=(x^2+x+1)Q+R \qquad (1)$$

оказалось тождеством и чтобы степень многочлена R была ниже степени делителя x^2+x+1.

Если бы мы умели производить деление таких многочленов, то нашли бы, что

$$Q=x^3+2 \text{ и } R=x+2.$$

Действительно, при этих значениях Q и R равенство (1) обращается в тождество и при этом степень многочлена $x+2$ ниже степени делителя x^2+x+1.

Получающийся в результате деления многочлен $Q=x^3+2$ называется неполным частным, а второй многочлен $R=x+2$ — остатком.

Определение общее. ***Разделить многочлен M на многочлен D — это значит найти два новых многочлена Q и R так, чтобы равенство***

$$M=D\cdot Q+R$$

оказалось тождеством и чтобы степень многочлена R была ниже степени делителя D.

R называется остатком. Q называется неполным частным, если $R\neq 0$, и полным частным, если $R=0$. Однако как неполное частное, так и полное частное обычно называют просто частным.

В том случае, когда остаток R равен нулю, равенство (2) принимает вид $M=D\cdot Q$.

В этом случае говорят, что M делится на D, а Q является частным. Когда R не равно нулю, говорят, что M не делится на D.

Покажем сначала, как производится деление многочленов методом неопределенных коэффициентов.

Пусть требуется разделить x^3+x+1 на x^2+x+1.

Здесь $Q(x)$ есть многочлен второй степени, а $R(x)$ есть многочлен степени не выше первой.

Поэтому

$$x^3+x+1=(x^2+x+1)(ax+b)+px+q.$$

Неизвестные числа a, b, p, q мы найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов, состоящих в левой и правой части написанного выше тождества.

$$\begin{array}{c|l} x^3 & a=1 \\ x^2 & a+b=0 \\ x & a+b+p=1 \\ x^0 & b+q=1. \end{array}$$

Отсюда $a=1$, $b=-1$, $p=1$, $q=2$.

Следовательно, частное равно $x-1$, а остаток равен $x+2$.

Теперь мы перейдем к изложению другого способа деления многочленов, более удобного, который будем называть «делением углом».

Деление углом многочленов начнем с рассмотрения примеров.

Пусть требуется найти частное от деления многочлена $x^2-5x-2+6x^3$ на многочлен $2x^2-1-x$.

Расположив делимое и делитель по убывающим степеням независимой переменной x, выполним процесс деления пока без пояснений и без обоснования.

$$\begin{array}{r|l} 6x^3+\ x^2-5x-2 & 2x^2-x-1 \\ \cline{2-2} \underline{\mp 6x^3 \pm 3x^2 \pm 3x\quad} & 3x+2. \end{array}$$

Первый остаток: $4x^2-2x-2$

$$\underline{\mp 4x^2 \pm 2x \pm 2}$$

Второй остаток: $\quad 0$

Последний (в данном примере второй) остаток оказался равным нулю. Мы скажем, что деление совершилось без остатка и в частном получилось $3x+2$. Правильность полученного частного можно проверить умножением. В самом деле,

$$\begin{array}{r} \times\ 2x^2-\ x-1 \\ 3x+2 \\ \hline 6x^3-3x^2-3x \\ +4x^2-2x-2 \\ \hline 6x^3+x^2-5x-2 \end{array}$$

Теперь поясним, как производился процесс деления. Мы начали с того, что высший член делимого разделили на высший член делителя. Полученный результат приняли за первый член частного. Произведение делителя на этот первый член частного вычли из делимого. Получили первый остаток $4x^2-2x-2$. Высший член первого остатка разделили снова на высший член делителя. Получили второй член частного. Произведение делителя на этот второй член частного вычли из первого остатка. Получили второй остаток, оказавшийся равным нулю. На этом процесс деления прекратился.

Применим указанную схему деления расположенных многочленов еще к нескольким примерам.

Пример 1. $\begin{array}{r|l} x^4-3x^2+2 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{\mp x^4 \pm\ x^3} & x^3+x^2-2x-2. \end{array}$

Первый остаток: x^3-3x^2+2

$$\underline{\mp x^3 \pm\ x^2}$$

Второй остаток: $-2x^2+2$

$$\underline{\pm 2x^2 \mp 2x}$$

Третий остаток: $-2x+2$

$$\underline{\pm 2x \mp 2}$$

Четвертый остаток: 0

Значит,

$$\frac{x^4-3x^2+2}{x-1}=x^3+x^2-2x-2.$$

Пример 2.
$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x+1 \\ \cline{2-2} \mp x^5 \mp x^4 & x^4-x^3+x^2-x+1. \end{array}$$

Первый остаток: $-x^4+1$

$\underline{\pm x^4 \pm x^3}$

Второй остаток: x^3+1

$\underline{\mp x^3 \mp x^2}$

Третий остаток: $-x^2+1$

$\underline{\pm x^2 \pm x}$

Четвертый остаток: $x+1$

$\underline{\mp x \mp 1}$

Пятый остаток: 0

Следовательно,

$$\frac{x^5+1}{x+1} = x^4-x^3+x^2-x+1.$$

Пример 3.
$$\begin{array}{r|l} x^4+x^3+x^2+x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} \mp x^4 \mp x^3 \mp x^2 & x^2. \\ \cline{1-1} \text{Первый остаток: } x+1 & \end{array}$$

На этом процесс деления заканчивается, так как степень остатка ниже степени делителя.

Мы скажем, что при делении многочлена $x^4+x^3+x^2+x+1$ на многочлен x^3+x+1 получается в частном x^2 и в остатке $x+1$.

Правильность полученного частного и остатка можно проверить, если воспользоваться тем, что делимое равно произведению делителя на частное, сложенному с остатком.

Действительно, легко видеть, что сумма $(x^2+x+1)\,x^2+(x+1)$ тождественно равна делимому $x^4+x^3+x^2+x+1$.

Пример 4.
$$\begin{array}{r|l} x^8+1 & x^3+1 \\ \cline{2-2} \mp x^8 \mp x^5 & x^5-x^2 \end{array}$$

Первый остаток: $-x^5+1$

$\underline{\pm x^5 \pm x^2}$

Второй остаток: x^2+1

Деление прекращается, так как высший член последнего остатка не делится нацело на высший член делителя.

В частном получилось x^5-x^2, а в остатке x^2+1.

Проверка:

$$(x^3+1)(x^5-x^2)+(x^2+1) = x^8+x^5-x^5-x^2+x^2+1 = x^8+1.$$

Рассмотрим еще несколько примеров деления многочленов с буквенными коэффициентами.

Пример 5. Пусть требуется разделить многочлен

$$\frac{1}{2}x^4+2y^4+3x^2y^2-\frac{11}{6}x^3y-\frac{11}{3}xy^3$$

на многочлен x^2+2y^2-3xy. Примем за независимую переменную, например, величину y и расположим делимое и делитель по убывающим степеням этой величины. После этого станем производить деление:

$$\begin{array}{r|l}
2y^4-\frac{11}{3}xy^3+3x^2y^2-\frac{11}{6}x^3y+\frac{1}{2}x^4 & 2y^2-3xy+x^2 \\ \cline{2-2}
\mp 2y^4 \pm 3xy^3 \mp x^2y^2 \qquad\qquad\qquad\qquad & y^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{2}x^2. \\ \cline{1-1}
-\frac{2}{3}xy^3+2x^2y^2-\frac{11}{6}x^3y+\frac{1}{2}x^4 & \\
\pm\frac{2}{3}xy^3 \mp x^2y^2 \pm \frac{1}{3}x^3y \qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
x^2y^2-\frac{3}{2}x^3y+\frac{1}{2}x^4 & \\
\mp x^2y^2 \pm \frac{3}{2}x^3y \mp \frac{1}{2}x^4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad\qquad\qquad &
\end{array}$$

Пример 6. Пусть требуется разделить a^5-b^5 на $a-b$. Примем за независимую переменную величину a. Так как делимое и делитель уже расположены по убывающим степеням этой величины, можно прямо приступить к делению:

$$\begin{array}{r|l}
a^5 \qquad\qquad -b^5 & a-b \\ \cline{2-2}
\mp a^5 \pm ba^4 \qquad\qquad & a^4+ba^3+b^2a^2+b^3a+b^4. \\ \cline{1-1}
ba^4-b^5 & \\
\mp ba^4 \pm b^2a^3 & \\ \cline{1-1}
b^2a^3 \qquad -b^5 & \\
\mp b^2a^3 \pm b^3a^2 & \\ \cline{1-1}
b^3a^2-b^5 & \\
\mp b^3a^2 \pm b^4a & \\ \cline{1-1}
b^4a-b^5 & \\
\mp b^4a \pm b^5 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Значит,

$$\frac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+ba^3+b^2a^2+b^3a+b^4.$$

Пример 7. Пусть требуется разделить многочлен $x^3+y^3+z^3-3xyz$ на многочлен $x+y+z$. Примем за независимую переменную, например, величину x и расположим делимое и делитель по убывающим степеням этой величины. После этого произведем деление.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-3yzx+(y^3+z^3) & x+(y+z) \\
\cline{2-2}
\mp x^3 \mp (y+z)x^2 & x^2-(y+z)x+(y^2+z^2-yz). \\
\cline{1-1}
-(y+z)x^2-3yzx+(y^3+z^3) & \\
\pm (y+z)x^2 \pm (y+z)^2 x & \\
\cline{1-1}
(y^2+z^2-yz)x+(y^3+z^3) & \\
\mp (y^2+z^2-yz)x \mp (y^3+z^3) & \\
\cline{1-1}
\qquad 0 &
\end{array}$$

Деление произошло без остатка и в частном получилось

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz.$$

Таким образом,

$$\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{x+y+z}=x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz.$$

Пример 8.

$$\begin{array}{l|l}
Ax^3+Bx^2+Cx+D & x-a \\
\cline{2-2}
\mp Ax^3 \pm Aax^2 & Ax^2+(Aa+B)x+(Aa^2+Ba+c). \\
\cline{1-1}
(Aa+B)x^2+Cx+D & \\
\mp (Aa+B)x^2 \pm (Aa^2+Ba)x & \\
\cline{1-1}
(Aa^2+Ba+C)x+D & \\
\mp (Aa^2+Ba+C)x \pm (Aa^3+Ba^2+Ca) & \\
\cline{1-1}
Aa^3+Ba^2+Ca+D &
\end{array}$$

Деление прекращается, так как последний остаток вовсе не содержит буквы x, а поэтому не делится нацело на высший член делителя. Остаток при делении оказался равным

$$Aa^3+Ba^2+Ca+D.$$

Теперь перейдем к обоснованию уже изложенного выше правила деления расположенных многочленов.

Пусть требуется разделить друг на друга два многочлена, расположенных по убывающим степеням какой-либо независимой переменной, например буквы x.

Предположим, что искомое частное есть целый относительно x многочлен (или одночлен) и что этот многочлен расположен тоже по убывающим степеням буквы x.

Из умножения расположенных многочленов известно, что высший член произведения равен произведению высшего члена множимого на высший член множителя. Значит, первый член частного равен частному от деления первого члена делимого на первый член делителя. После этого вычтем из делимого произведение делителя на найденный уже первый член частного. Результат этого вычитания назовем первым остатком. Если этот первый остаток окажется равным нулю, то это будет означать, что частное данных многочленов есть найденный целый одночлен. Если же этот первый остаток не окажется равным нулю, то он будет представлять собой произведение делителя на алгебраическую сумму остальных, еще не найденных членов частного. Поэтому второй член частного будет равен частному от деления высшего члена первого остатка на высший член делителя. Аналогичными рассуждениями и действиями мы будем получать и остальные члены частного, если они имеются.

Деление окажется выполненным нацело, если последний остаток окажется равным нулю. Если же мы дойдем до такого остатка, который не равен нулю и степень которого ниже степени делителя, то это будет означать, что частное от деления первоначально заданных многочленов не может быть целым многочленом.

В этом случае в результате деления мы получаем только часть частного, а именно только целую часть частного, а также в определенном виде и остаток.

Имея целую часть частного и остаток, мы можем частное двух данных многочленов записать в виде суммы целого выражения и некоторой дроби.

Например, при делении многочлена x^8+1 на многочлен x^3+1 мы получили в частном x^5-x^2, а в остатке x^2+1. Поэтому

$$\frac{x^8+1}{x^3+1}=x^5-x^2+\frac{x^2+1}{x^3+1}.$$

Выражение x^5-x^2 называется ц е л о й ч а с т ь ю д р о б и $\frac{x^8+1}{x^3+1}$.

§ 4. НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ С ПОМОЩЬЮ ИХ РАЗЛОЖЕНИЯ НА НЕПРИВОДИМЫЕ МНОЖИТЕЛИ

Если каждый из двух многочленов делится без остатка на третий, то этот третий называется общим делителем первых двух многочленов.

Наибольшим общим делителем двух многочленов называется их общий делитель наивысшей степени.

Например, для многочленов

$$x^3+6x^2+11x+6 \text{ и } x^3+7x^2+14x+8$$

выражение $x+1$ есть общий делитель, а выражение x^2+3x+2 есть наибольший общий делитель.

Приведем примеры на нахождение наибольшего общего делителя.

Пример 1. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$x^2-1 \text{ и } x^3-1.$$

Пользуясь тем, что

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

и

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$

находим, что искомым наибольшим общим делителем будет $x-1$.

Пример 2. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$x^3-6x^2+11x-6 \text{ и } x^3-7x+6.$$

Пользуясь тем, что

$$\begin{gathered}
x^3-6x^2+11x-6=x^3-x^2-5x^2+5x+6x-6= \\
=x^2(x-1)-5x(x-1)+6(x-1)= \\
=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3), \\
x^3-7x+6=x^3-x^2+x^2-x-6x+6= \\
=x^2(x-1)+x(x-1)-6(x-1)= \\
=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3),
\end{gathered}$$

находим искомый наибольший общий делитель:

$$(x-1)(x-2).$$

Аналогично можно находить наибольший общий делитель и нескольких многочленов.

§ 5. АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ НАИБОЛЬШЕГО ОБЩЕГО ДЕЛИТЕЛЯ ДВУХ МНОГОЧЛЕНОВ

В предыдущем параграфе было показано, как находить общий наибольший делитель двух многочленов с помощью разложения этих многочленов на неприводимые множители. Однако такое разложение на множители не всегда доступно. Алгоритм же Евклида для нахождения наибольшего общего делителя двух многочленов представляет собой такой способ, который позволяет во всех случаях находить общий наибольший делитель только с помощью конечного числа делений. Покажем этот алгоритм на примерах.

Пример 1. Найти общий наибольший делитель многочленов

$$x^2-1 \text{ и } x^3-1.$$

Разделим x^3-1 на x^2-1:

$$\begin{array}{r|l} x^3-1 & x^2-1 \\ \cline{2-2} \mp x^3 \pm x & x. \\ \hline x-1 & \end{array}$$

Теперь разделим делитель x^2-1 на остаток $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^2-1 & x-1 \\ \cline{2-2} \mp x^2 \pm x & x+1. \\ \hline x-1 & \\ \mp x \pm 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Деление здесь произошло без остатка. Значит, $x-1$ и будет искомым общим наибольшим делителем.

Пример 2. Найти общий наибольший делитель многочленов

$$x^3-6x^2+11x-6 \text{ и } x^3-7x-6.$$

Произведем первое деление:

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+11x-6 & x^3-7x+6 \\ \cline{2-2} \mp x^3 \pm 7x \mp 6 & 1. \\ \hline -6x^2+18x-12 & \end{array}$$

Произведем второе деление. Чтобы выполнить это деление, мы должны были бы разделить предыдущий делитель x^3-7x+6 на остаток $-6x^2+18x-12$. Но так как

$$-6x^2+18x-12=-6(x^2-3x+2),$$

для удобства будем делить многочлен x^3-7x+6 не на $-6x^2+18x-12$, а на x^2-3x+2. От такой замены решение вопроса не пострадает, так как наибольшие общие делители двух многочленов, отличающихся друг от друга лишь постоянным множителем, равноправны.

Итак, произведем второе деление в следующем виде:

$$\begin{array}{r|l} x^3-7x+6 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2} \mp x^3 \pm 3x^2 \mp 2x & x+3. \\ \hline 3x^2-9x+6 & \\ \mp 3x^2 \pm 9x \mp 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Остаток оказался равным нулю, значит, последний делитель, т. е. многочлен

$$x^2-3x+2,$$

и будет искомым наибольшим общим делителем.

Пример 3. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$x^4+3x^3+3x^2+3x+2 \text{ и } x^4+x^3-3x^2+4.$$

Первое деление:

$$\begin{array}{r|l}
x^4+3x^3+3x^2+3x+2 & x^4+x^3-3x^2+4 \\ \cline{2-2}
\mp x^4\mp \ \ x^3\pm 3x^2\mp 4 \qquad & \qquad 1. \\ \cline{1-1}
2x^3+6x^2+3x-2 \quad &
\end{array}$$

Второе деление:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4+2x^3-6x^2+8 \qquad\qquad & 2x^3+6x^2+3x-2 \\ \cline{2-2}
\mp 2x^4\mp 6x^3\mp 3x^2\pm 2x \qquad\qquad & \qquad x-2. \\ \cline{1-1}
-4x^3-\ \ 9x^2+2x+8 & \\
\pm 4x^3\pm 12x^2\pm 6x\mp 4 & \\ \cline{1-1}
3x^2+8x+4 &
\end{array}$$

(Для удобства мы взяли здесь за делимое не $x^4+x^3-3x^2+4$, а $2x^4+2x^3-6x^2+8$.)

Третье деление:

$$\begin{array}{r|l}
6x^3+18x^2+9x-6 \quad & 3x^2+8x+4 \\ \cline{2-2}
\mp 6x^3\mp 16x^2\mp 8x \qquad & \quad 2x+\frac{2}{3}\cdot \\ \cline{1-1}
2x^2+\ \ x-6 \quad & \\
\mp 2x^2\mp\frac{16}{3}x\mp\frac{8}{3} & \\ \cline{1-1}
-\frac{13}{3}x-\frac{26}{3} &
\end{array}$$

(Для удобства мы взяли здесь за делимое не $2x^3+6x^2+3x-2$, а $6x^3+18x^2+9x-6$.)

Четвертое деление:

$$\begin{array}{r|l}
3x^2+8x+4 & \ x+2 \\ \cline{2-2}
\mp 3x^2\mp 6x \quad & 3x+2. \\ \cline{1-1}
2x+4 & \\
\mp 2x\mp 4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}$$

Для удобства мы взяли за делитель не $-\frac{13}{3}x-\frac{26}{3}$, а $x+2$, так как $-\frac{13}{3}x-\frac{26}{3}=-\frac{13}{3}(x+2)$.

После четвертого деления остаток оказался равным нулю. Следовательно, последний делитель $x+2$ и будет искомым наибольшим общим делителем.

Схема алгоритма Евклида такова. Один из двух многочленов делят на другой, степень которого не выше степени первого.

Далее, за делимое берут всякий раз тот многочлен, который служил в предшествующей операции делителем, а за делитель берут остаток, полученный при той же предшествующей операции. Этот процесс прекращается, как только остаток окажется равным нулю.

Алгоритм Евклида основан на следующем. Пусть M — делимое, D — делитель, Q — частное и R — остаток.
Тогда

$$M=Q\cdot D+R.$$

Из этого равенства следует, что наибольший общий делитель многочленов M и D будет тот же, что и наибольший общий делитель D и R (подробнее см. Г. М. Шапиро. Высшая алгебра).

Упражнение. Найти наибольший общий делитель многочленов

$$x^3-1 \text{ и } x^3+2x^2+2x+1$$

с помощью алгоритма Евклида и путем разложения данных многочленов на множители.

Отв. x^2+x+1.

УПРАЖНЕНИЯ

315. Найти частное от деления

$$x^5-1 \text{ на } x-1.$$

Результат проверить умножением.

316. Найти частное от деления

$$-2x^5+x^4+2x^3-4x^2+2x+4 \text{ на } x^3+2.$$

317. Найти неполное частное и остаток от деления

$$x^5+x^3+x^2+1 \text{ на } x^2+x+1.$$

Результат проверить, пользуясь тем, что делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток.

318. Найти частное от деления

$$x^5+x^3+x^2+1 \text{ на } x^2+1$$

путем разложения делимого на множители.

Отв. $(x+1)(x^2+1)$.

319. Найти частное от деления

$$x^4+x^2y^2+y^4 \text{ на } x^2+xy+y^2$$

путем непосредственного деления многочленов и путем разложения делимого на множители (см. стр. 111, пример 9).

320. Найти частное от деления

$$a^3+b^3+c^3-3abc \text{ на } a+b+c$$

(см. стр. 111 пример 6).

§ 6. ВЫДЕЛЕНИЕ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ НЕПРАВИЛЬНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

Определение. ***Выражение***

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}x+b_m}$$

называется рациональной дробью.

Если $n \geqslant m$, то эта дробь называется неправильной; в противном случае, т. е. когда $n<m$, она называется правильной.

Например, рациональные дроби

$$\frac{x^8+1}{x^3+1}, \qquad \frac{x^2-x-1}{x^2+3x+100}, \qquad \frac{2x+1}{3x+100}$$

являются неправильными.

Рациональные дроби

$$\frac{x^3+1}{x^4+1}, \quad \frac{x}{x^2+1}, \quad \frac{x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

являются правильными.

Выделение целой части

Пусть требуется выделить целую часть неправильной рациональной дроби, например дроби $\frac{x^4+x+1}{x^2+x+1}$.

Разделим многочлен x^4+x+1 на многочлен x^2+x+1.

$$\begin{array}{r|l}
x^4+x+1 & x^2+x+1 \\ \cline{2-2}
\mp x^4 \mp x^3 \mp x^2 & x^2-x. \\ \cline{1-1}
-x^3-x^2+x+1 & \\
\pm x^3 \pm x^2 \pm x & \\ \cline{1-1}
2x+1 &
\end{array}$$

Получили частное x^2-x и остаток $2x+1$.

Делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток. Поэтому

$$x^4+x+1=(x^2+x+1)(x^2-x)+2x+1.$$

Разделив левую и правую части этого тождества на x^2+x+1, получим:

$$\frac{x^4+x+1}{x^2+x+1}=x^2-x+\frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Выражение x^2-x называется ц е л о й частью дроби $\frac{x^4+x+1}{x^2+x+1}$; выражение же $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ есть правильная дробь.

Таким образом, неправильная рациональная дробь

$$\frac{x^4+x+1}{x^2+x+1}$$

оказалась представленной в виде суммы многочлена x^2-x и правильной дроби $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Изложенное преобразование применимо ко всякой неправильной рациональной дроби.

В курсе высшей математики встречаются задачи, для решения которых необходима операция выделения целой части неправильной рациональной дроби.

УПРАЖНЕНИЯ

321. Выделить целую часть неправильной рациональной дроби

$$\frac{x^3-1}{x+1},$$

т. е. представить эту дробь в виде алгебраической суммы целого многочлена и правильной рациональной дроби.

Отв. $x^2-x+1-\frac{2}{x+1}$.

322. Выделить целую часть дроби

$$\frac{x^5}{x^2+1}.$$

323. Выделить целую часть дроби

$$\frac{ax+b}{px+q}.$$

(У к а з а н и е. Здесь также примените деление «углом».)

Отв. $\frac{a}{p}+\frac{b-\frac{aq}{p}}{px+q}$.

ГЛАВА XXXII

ТЕОРЕМА БЕЗУ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. ИЛЛЮСТРАЦИЯ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ НА ПРИМЕРАХ

Пусть требуется, например, разделить многочлен x^3+5x^2-6x-6 на двучлен $x-2$.

Можно предсказать, что остаток при этом делении будет равен 10. Проверим это:

$$\begin{array}{r|l} x^3+5x^2-6x-6 & x-2 \\ \mp x^3 \pm 2x^2 & \overline{x^2+7x+8.} \\ \hline 7x^2-6x & \\ \mp 7x^2 \pm 14x & \\ \hline 8x-6 & \\ \mp 8x \pm 16 & \\ \hline 10 & \end{array}$$

Предсказание было сделано следующим образом.

Рассматривая делитель $x-2$, мы видим, что в нем из независимой переменной x вычитается число 2. Это число 2 мы подставили в делимое вместо переменной x и получили 10, т. е. как раз остаток.

Действительно, $2^3+5\cdot 2^2-6\cdot 2-6=8+20-12-6=10$.

Таким образом, оказалось, что остаток от деления многочлена на $x-2$ равен значению делимого при $x=2$.

Это правило определения остатка, сформулированное в общем виде, и будет являться теоремой Безу.

При делении многочлена x^3+5x^2-6x-6 на $x-3$ остаток будет равен:

$$3^3+5\cdot 3^2-6\cdot 3-6=27+45-18-6=48.$$

(Проверьте это непосредственным делением.)

При делении многочлена x^4+x-10 на $x+2$, т. е. на $x-(-2)$, остаток будет равен:

$$(-2)^4+(-2)-10=4.$$

(Проверьте это непосредственным делением.)

При делении многочлена x^3+x+1 на $x-i$ остаток равен i^3+i+1, т. е. единице (проверьте это непосредственно делением). Приведенные примеры никак не могут рассматриваться как доказательства теоремы Безу: они даны лишь для того, чтобы облегчить понимание самой формулировки теоремы Безу.

§ 2. ФОРМУЛИРОВКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БЕЗУ.

При делении многочлена n-й степени относительно x на двучлен x — a остаток равен значению делимого при x = a. (Буква a может обозначать любое действительное или мнимое число, т. е. любое комплексное число.)

Прежде чем доказывать теорему, сделаем два подготовительных пояснения.

1. Мы знаем, что существуют такие алгебраические выражения, которые теряют смысл при некоторых отдельных значениях входящих в него букв. Например, $\frac{1}{x}$ теряет смысл при $x=0$; выражение $\frac{1}{x^2-25}$ теряет смысл при $x=5$ и при $x=-5$.

Заметим, что многочлен любой целой положительной степени никогда не теряет смысла. При всяком значении переменной он принимает определенное значение.

2. Произведение двух множителей, из которых один обращается в нуль, а другой принимает определенное значение, всегда равно нулю. Если же один множитель обращается в нуль, а другой теряет смысл, то о таком произведении нельзя говорить, что оно равно нулю. О таком произведении ничего определенного сказать нельзя. В каждом отдельном случае необходимо особое исследование.

Рассмотрим, например, произведение $(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^2}$. При $x=1$ первый множитель обращается в нуль, а второй теряет смысл. Нельзя утверждать, что это произведение при $x=1$ равно нулю. Очевидно, что

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)\cdot\frac{1}{1-x^2}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}.$$

Итак, при $x=1$ само произведение $(1-x)\cdot\frac{1}{1-x}$ смысла не имеет. Но его предел имеет смысл, а именно равен $\frac{1}{2}$, а не нулю, как это ошибочно можно было предположить.

Доказательство теоремы Безу

Пусть $f(x)$ обозначает собой произвольный многочлен n-й степени относительно переменной x и пусть при его делении на двучлен $x-a$ получилось в частном $q(x)$, а в остатке R. Очевидно, что $q(x)$ будет некоторый многочлен $(n-1)$-й степени относительно x, а остаток R будет величиной постоянной, т. е. не зависящей от x.

Если бы остаток R был многочленом хотя бы первой степени относительно x, то это означало бы, что деление не выполнено. Итак, R от x не зависит.

По определению деления (делимое равно произведению делителя на частное плюс остаток) получим тождество

$$f(x)=(x-a)\,q(x)+R.$$

Это равенство справедливо при всяком значении x, значит, оно справедливо и при $x=a$.

Подставляя в левую и правую части этого равенства вместо переменной x число a, получим:

$$f(a)=(a-a)\,q(a)+R. \qquad (1)$$

Здесь символ $f(a)$ обозначает собой уже не $f(x)$, т. е. не многочлен относительно x, а значение этого многочлена при $x=a$. $q(a)$ обозначает значение $q(x)$ при $x=a$.

Остаток R остался таким, каким он был раньше, так как R от x не зависит.

Произведение $(a-a)\,q(a)$ равно нулю, так как множитель $(a-a)$ равен нулю, а множитель $q(a)$ есть определенное число. (Многочлен $q(x)$ ни при каком определенном значении x не теряет смысла.)

Поэтому из равенства (1) получим:

$$f(a)=R,$$

что и требовалось доказать.

Пример. При делении многочлена x^3+x^2+x+1 на $x-i$ остаток равен i^3+i^2+i+1, т. е. нулю.

Следствия из теоремы Безу

Следствие 1. *Если многочлен делится без остатка на $x-a$, то a будет корнем этого многочлена.*

Следствие 2. *Если a есть корень какого-либо многочлена, то это условие будет достаточным для делимости этого многочлена без остатка на $x-a$.*

Эти два следствия можно объединить и выразить следующим образом:

Для делимости многочлена на $x-a$ необходимо и достаточно, чтобы a было корнем этого многочлена.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ БЕЗУ

Поинтересуемся делимостью выражений вида $a^n \pm b^n$ на двучлены вида $a \pm b$ (здесь n — натуральное число).

В выражении $a^n \pm b^n$ примем a за независимую переменную, а b за постоянную. Тогда выражение $a^n \pm b^n$ будет многочленом n-й степени относительно переменной a, расположенным по убывающим степеням этой переменной.

а) При делении $a^n + b^n$ на $a + b$ остаток будет равен:

$$R = (-b)^n + b^n = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } n; \\ 2b^n & \text{при четном } n. \end{cases}$$

Значит, $a^n + b^n$ делится без остатка на $a + b$ лишь тогда, когда n — число нечетное.

б) При делении $a^n + b^n$ на $a - b$ имеем:

$$R = b^n + b^n = 2b^n \neq 0.$$

Значит, $a^n + b^n$ не делится на $a - b$.

в) При делении $a^n - b^n$ на $a + b$ имеем:

$$R = (-b)^n - b^n = \begin{cases} 0 & \text{при четном } n; \\ -2b^n & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Значит, $a^n - b^n$ делится на $a + b$ лишь тогда, когда n — число четное.

г) При делении $a^n - b^n$ на $a - b$ получаем:

$$R = b^n - b^n = 0.$$

Значит, $a^n - b^n$ всегда делится на $a - b$.

Другие важные применения теоремы Безу изложены в следующих главах.

Правило Горнера. Правило Горнера позволяет вычислять коэффициенты частного и остаток при делении многочлена на двучлен $x - a$ удобным способом.

При делении многочлена

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

на двучлен $x - a$ в частном получим многочлен степени $(n - 1)$:

$$B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}x + B_{n-1},$$

а в остатке — некоторое число R.

По свойству деления

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n =$$
$$= (x - a)(B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + \ldots + B_{n-2}x + B_{n-1}) + R.$$

Раскрыв скобки в правой части этого равенства и объединив члены с одинаковыми степенями x, получим тот же многочлен, что и в левой части.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем, что

$$\begin{aligned}
B_0 &= A_0,\\
B_1 - B_0 a &= A_1,\\
B_2 - B_1 a &= A_2,\\
&\dots\dots\\
B_{n-1} - B_{n-2} a &= A_{n-1},\\
R - B_{n-1} a &= A_n.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
B_0 &= A_0,\\
B_1 &= B_0 a + A_1,\\
B_2 &= B_1 a + A_2,\\
&\dots\dots\\
B_{n-1} &= B_{n-2} a + A_{n-1},\\
R &= B_{n-1} a + A_n.
\end{aligned}$$

Вычисления можно располагать так: коэффициенты делимого: $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{n-1},\ A_n$;

коэффициенты частного и остаток: $B_0 = A_0,\quad B_1 = B_0 a + A_1,$

$$B_2 = B_1 a + A_2,\ B_3 = B_2 a + A_3,\ \dots\ B_{n-1} = B_{n-2} a + A_{n-1},$$
$$B_{n-1} = B_{n-2} a + A_{n-1},\ R = B_{n-1} a + A_n.$$

Примеры.

1. С помощью правила Горнера найти частное и остаток при делении многочлена

$$3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1 \text{ на } x - 2.$$

Решение.

$$\begin{array}{lllll|l}
3, & -2, & 5, & -1, & 1 & \\
3; & 3\cdot 2+(-2)=4; & 4\cdot 2+5=13; & 13\cdot 2+(-1)=25; & 25\cdot 2+1=51 & a=2
\end{array}$$

Неполное частное: $3x^3 + 4x^2 + 13x + 25$. Остаток равен 51.

2. Разделить $x^5 + 2x^3 - x + 3$ на $x + 2$.

Решение.

$$\begin{array}{cccccc|l}
1, & 0, & 2, & 0, & -1 & 3 & \\
1, & -2, & 6, & -12, & 23 & -43 & a=-2.
\end{array}$$

Неполное частное: $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 12x + 23$. Остаток равен -43.

Пользуясь правилом Горнера, легко найти частное

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$$

от деления

$$a^n-b^n \text{ на } a-b.$$

Отсюда вытекает формула

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Аналогично можно получить и формулу

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)(a^{2k}-a^{2k-1}b+\ldots+a^2b^{2k-2}-ab^{2k-2}+b^{2k}).$$

УПРАЖНЕНИЯ

324. Показать, что $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})-n^2x^2$ делится на $x-1$.

325. Показать, что $x^3-3abx+a^3+b^3$ делится на $x+a+b$. Указание. Принять во внимание, что $x+a+b=$ $=x-(-a-b)$.

326. Какое числовое значение должен иметь коэффициент p, чтобы многочлен $x^3+px^2-5x-12$ делился без остатка на $x-2$?

Отв. $p=3{,}5$.

327. Какие числовые значения должны иметь коэффициенты a, b, c, чтобы многочлен x^3+ax^2+bx+c делился бы без остатка на $(x-1)$ и на $(x+2)$, а при делении на $(x+1)$ давал бы в остатке 10.

Отв. $a=-3$; $b=-6$; $c=8$.

328. При каких числовых значениях k и l дробь

$$\frac{k(x^2+x+1)+l(x^2-x-1)+1}{k(x^3+x+1)+2l(x^3-x-1)+2}$$

можно сократить на $(x+1)$?

Отв. $k=-4$; $l=3$.

Указание. Числитель и знаменатель должны обращаться в нули при

$$x=-1.$$

329. Доказать, что многочлен $(x^2+x-1)^{2n}+(x^2-x+1)^{2n}-2$ делится x^2-x.

Указание. $x^2-x=x(x-1)$. Сначала доказать делимость на $x-1$. Затем, чтобы доказать делимость на x, достаточно убедиться в том, что многочлен обращается в нуль при $x=0$.

330. Доказать, что многочлен $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ делится на $(x-1)^2$.

Указание. Заменив $(n+1)x^n$ через $nx+x^n$ и применив тождество

$$x^m-1=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1),$$

разложите данный многочлен на множители.

331. Пользуясь теоремой Безу, найти остаток при делении многочлена x^3+x^2+2 на $x-1-i$.

Отв. 0.

332. Доказать, что число $3^{105}+4^{105}$ делится на 13 и 181.

Указание. Воспользоваться тем, что

$$3^{105}+4^{105}=(3^3)^{35}+(4^3)^{35}=(3^5)^{21}+(4^5)^{21},$$

и тем, что выражение a^n+b^n делится на $a+b$, если n — нечетное число.

333. Доказать, что $(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ делится на $x(x+1)(2x+1)$.

334. Доказать, что $x^{2n}+x^n+1$ не делится на x^2+x+1, если натуральное число n кратно трем, и делится, когда n не кратно трем.

335. Разложить на действительные неприводимые множители выражение $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$.

336. Найти целое выражение, тождественно равное следующей сумме:

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^n}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^n}{(c-a)(c-b)},$$

где n — целое положительное число.

ГЛАВА XXXIII

ТЕОРЕМА ГАУССА И СВОЙСТВА ЦЕЛОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. ТЕОРЕМА ГАУССА *

Если бы мы не знали никаких других чисел, кроме натуральных, то сказали бы, что уравнение $2x-3=0$ не имеет ни одного корня, так как нет ни одного натурального числа, которое удовлетворяло бы этому уравнению.

Уравнение $2x+3=0$ не имеет ни одного корня в области положительных чисел.

Уравнение $x^2-2=0$ не имеет ни одного корня в области рациональных чисел.

Уравнение $x^2+1=0$ не имеет ни одного корня в области действительных чисел.

Выражение

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

в котором x есть независимая переменная, $A_0 \neq 0$, n — натуральное число и коэффициенты A_0, A_1, A_2, ... A_{n-1}, A_n — любые комплексные числа, называется целой рациональной функцией n-й степени.

Корнем данной целой рациональной функции называется такое значение (действительное или мнимое) переменной x, при котором эта целая рациональная функция обращается в нуль.

В области действительных чисел не всякая целая рациональная функция имеет корень. Например, целая рациональная функция

$$x^2-x+1$$

не имеет ни одного действительного корня.

В связи с этим возникает следующий важный вопрос. Можно ли утверждать, что среди комплексных чисел найдется хоть одно число, являющееся корнем целой рациональной функции

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n?$$

---

* См. «Краткие исторические сведения».

Этот вопрос на протяжении длительного исторического периода оставался неразрешенным. В 1799 году Гаусс в возрасте 22 лет дал первое строгое доказательство теоремы о существовании корня целой рациональной функции.

Теорема Гаусса гласит: ***Всякая целая рациональная функция с любыми комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень (действительный или мнимый).***

В настоящее время существует несколько различных доказательств этой фундаментальной теоремы алгебры, но все они сложны и не входят в курс элементарной алгебры.

Теорема Гаусса еще раз свидетельствует о той общности в решении различных вопросов, которую придает им введение в науку комплексных чисел.

§ 2. СВОЙСТВА ЦЕЛОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема Гаусса позволяет открыть и доказать другие важные свойства целой рациональной функции.

1. ***Всякую целую рациональную функцию n-й степени можно представить в виде произведения коэффициента высшего члена на n линейных множителей,*** т. е.

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = \\ = A_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n).$$

Эти линейные множители могут быть все действительными или все мнимыми и могут быть частью действительными и частью мнимыми.

Доказательство. Функцию

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

обозначим для краткости буквой M. По теореме Гаусса M имеет по крайней мере один корень x_1 (действительный или мнимый). Тогда по следствию из теоремы Безу многочлен M должен делиться без остатка на $x - x_1$.

Обозначив буквой Q_1 частное от этого деления, получим:

$$M = (x - x_1)Q_1.$$

Q_1 будет целой рациональной функцией $(n-1)$-й степени с коэффициентом при высшем члене, равном A_0.

По теореме Гаусса функция Q_1 также будет иметь по крайней мере один корень.

Обозначив этот корень буквой x_2, получим:

$$Q_1 = (x - x_2)Q_2.$$

Число x_2 может оказаться отличным от x_1, но может оказаться и равным ему. Для нас это безразлично.

Применяя такие же рассуждения к функции Q_2, получим:

$$Q_2 = (x - x_3)\, Q_3.$$

Степени функций Q_1, Q_2, $Q_3 \ldots$ будут соответственно

$$n - 1;\ n - 2;\ n - 3,\ \ldots .$$

Продолжая этот процесс, мы придем к равенству

$$Q_{n-2} = (x - x_{n-1})\, Q_{n-1},$$

где Q_{n-1} есть функция вида $A_0x + b$, где b — постоянная. Но

$$A_0x + b = A_0\left(x + \frac{b}{A_0}\right).$$

Обозначив корень функции $A_0x + b$, т. е. $-\frac{b}{A_0}$ буквой x_n, получим, что

$$Q_{n-1} = A_0\,(x - x_n).$$

Пользуясь полученными равенствами, найдем последовательно:

$$M = (x - x_1)\, Q_1;\quad M = (x - x_1)(x - x_2)\, Q_2;$$

$$M = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\, Q_3;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$M = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_{n-1})\, A_0\,(x - x_n), \text{ т. е.}$$

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = \\ = A_0\,(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \qquad \text{(I)}$$

что и требовалось доказать.

Из равенства (I) непосредственно видно, что числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются корнями данной целой рациональной функции.

Правая часть равенства (I) не может обратиться в нуль ни при каком значении переменной x, отличном от значений

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n.$$

Следовательно, целая рациональная функция n-й степени не может иметь более n корней.

Если все числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n окажутся различными, то функция будет иметь ровно n различных корней.

Если же среди чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n окажутся равные, то различных корней будет меньше чем n.

Пусть оказалось, что

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_{k-1} = x_k,$$

а остальные корни отличны от x_1. В этом случае говорят, что x_1 есть корень кратности k. Например, функция $x^3 - 7x^2 + 8x + 16$ разлагается на множители

$$(x + 1)(x - 4)(x - 4),$$

или

$$(x+1)(x-4)^2.$$

Значит, число -1 есть простой корень, а число 4 есть корень кратности 2 или двукратный корень.

2. ***Если целая рациональная функция с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+bi$, то она обязательно будет иметь и корень $a-bi$.***

Доказательство. Выражение

$$A_0(a+bi)^n+A_1(a+bi)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}(a+bi)+A_n,$$

в котором $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}, A_n$ — действительные числа, будет представлять собой некоторое комплексное число $P+Qi$, т. е.

$$A_0(a+bi)^n+A_1(a+bi)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}(a+bi)+A_n=P+Qi.$$

Заменив в последнем равенстве i числом $-i$, получим:

$$A_0(a-bi)^n+A_1(a-bi)^{n-1}+\ldots+A_{n-1}(a-bi)+A_n=P-Qi.$$

Теперь допустим, что $a+bi$ есть корень целой рациональной функции

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n; \qquad (1)$$

тогда окажется, что $P+Qi=0$. Отсюда следует, что $P=0$ и $Q=0$. Но в таком случае окажется равным нулю и выражение $P-Qi$, т. е. окажется корнем целой рациональной функции (1) и число $a-bi$, что и требовалось доказать.

3. ***Всякая целая рациональная функция с действительными коэффициентами степени выше 2-й разложима либо на действительные линейные множители, либо на действительные множители 2-й степени, либо на действительные множители, среди которых имеются и линейные и второй степени.*** (Доказательство этого свойства опускается).

§ 3. ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СТЕПЕНИ ВЫШЕ ВТОРОЙ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ МНОЖИТЕЛИ

1.
$$\begin{aligned}x^3+6x^2+11x+6&=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6=\\&=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)=\\&=(x+1)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+2)(x+3).\end{aligned}$$

Получилось разложение на действительные линейные множители.

2.
$$\begin{aligned}x^4+1&=x^4+2x^2+1-2x^2=\\&=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+1+x\sqrt{2})(x^2+1-x\sqrt{2})=\\&=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

Получилось разложение на действительные множители 2-й степени.

3. $$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

Получился один множитель линейный, а другой 2-й степени.

4. $$x^3-3abx+a^3+b^3=x^3+a^3+b^3-3abx=$$
$$=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3+b^3-3abx-3ax^2-3a^2x=$$
$$(x+a)^3+b^3-3ax(b+x+a)=$$
$$=(x+a+b)[(x+a)^2-(x+a)b+b^2]-3ax(x+a+b)=$$
$$=(x+a+b)(x^2+2ax+a^2-bx-ab+b^2-3ax)=$$
$$=(x+a+b)[x^2-(a+b)x+a^2-ab+b^2].$$

Получился один множитель линейный, а другой 2-й степени.

Теоретически доказано (как уже отмечалось), что всякая целая рациональная функция с действительными коэффициентами степени выше 2-й разложима на действительные множители 1-й и 2-й степени.

Однако осуществление этого разложения не всегда достигается легко. Например, попробуем разложить на множители

$$x^4-8x+63.$$

Решим эту задачу двумя способами.

1. $$x^4-8x+63=x^4+4x^3-4x^3+9x^2+7x^2-16x^2-36x+$$
$$+36x-8x+63=(x^4+4x^3+9x^2)-(4x^3+16x^2+36x)+$$
$$+(7x^2+28x+63)=x^2(x^2+4x+9)-4x(x^2+4x+9)+$$
$$+7(x^2+4x+9)=(x^2+4x+9)(x^2-4x+7).$$

(Полученные множители 2-й степени имеют мнимые корни, а потому неразложимы на действительные линейные множители.)

Изложенный способ носит слишком искусственный характер. Его трудно придумать.

Второй способ, изложенный ниже, будет менее искусственным.

2. Прежде всего исследуем характер корней многочлена $x^4-8x+63$, или, что то же самое, характер корней уравнения

$$x^4-8x+63=0.$$

Переписав это уравнение в виде

$$x^4=8x-63,$$

построим графики функций $y=x^4$ и $y=8x-63$ (рис. 196). Графики не пересекаются. Следовательно, корни уравнения

$$x^4-8x+63=0,$$

а значит, и многочлена

$$x^4-8x+63$$

будут все мнимыми. Поэтому среди действительных множителей, на которые разлагается этот многочлен не может быть ни одного линейного.

Итак, выяснено, что действительными множителями разложения многочлена $x^4-8x+63$ будут только многочлены 2-й степени. Таких множителей будет два, так как данный многочлен имеет 4-ю степень.

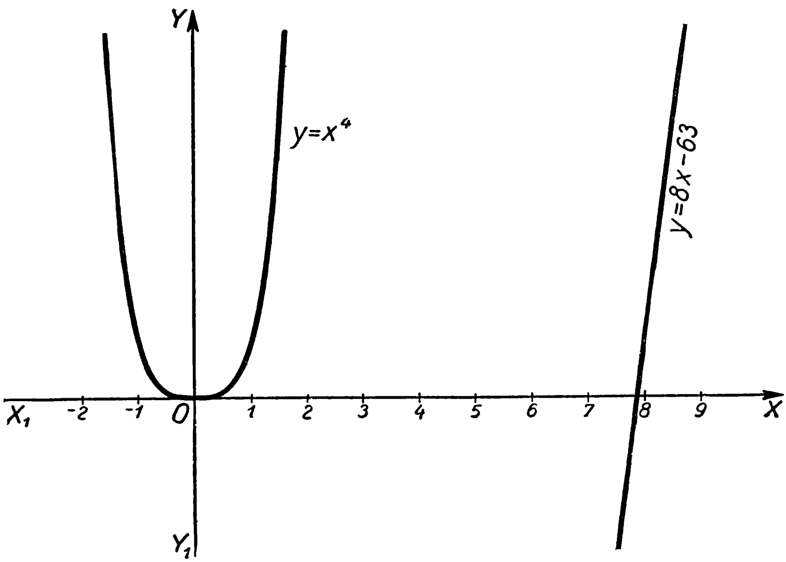


Рис. 196.

Таким образом, будем иметь, что

$$x^4-8x+63=(x^2+ax+b)(x^2+px+q).$$

Остается определить a, b, p и q.

Перемножив многочлены, стоящие в правой части последнего равенства, получим:

$$x^4-8x+63=x^4+(a+p)x^3+(ap+b+q)x^2+$$
$$+(aq+bp)x+bq.$$

Но поскольку нам необходимо, чтобы правая часть этого равенства превратилась в такой же многочлен, который стоит в левой части, потребуем выполнения следующих условий:

$$\begin{cases} a+p=0, \\ ap+b+q=0, \\ aq+bp=-8, \\ bq=63. \end{cases}$$

Получилась система четырех уравнений с четырьмя неизвестными

$$a, \ b, \ p, \ q.$$

Из первого уравнения

$$p = -a.$$

Подставив во второе и третье уравнение $-a$ вместо p, получим систему:

$$\begin{cases} b + q = a^2, \\ a(b - q) = 8, \\ \qquad bq = 63. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы

$$a = \frac{8}{b - q}.$$

Подставив это в первое уравнение, получим систему:

$$\begin{cases} b + q = \dfrac{64}{(b - q)^2}, \\ \qquad bq = 63, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (b + q)(b - q)^2 = 64, \\ \qquad bq = 63, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (b + q)[(b + q)^2 - 4bq] = 64, \\ \qquad bq = 63, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (b + q)[(b + q)^2 - 252] = 64, \\ \qquad bq = 63. \end{cases}$$

Обозначим $b + q$ буквой z. Тогда первое уравнение последней системы примет вид:

$$z(z^2 - 252) = 64,$$

или

$$z^3 - 252z - 64 = 0\,*.$$

Делителями числа 64 являются: ± 1; ± 2; ± 4;

$$\pm 8; \ \pm 16; \ \pm 32; \ \pm 64.$$

---

* Допустим, что уравнение $z^3 - 252z - 64 = 0$ имеет целый корень l. Тогда $l^3 - 252l = 64$, или $l^2 - 252 = \frac{64}{l}$. Но $l^2 - 252$ есть целое число, а потому целым числом должно быть и частное $\frac{64}{l}$, т. е. целый корень уравнения $z^3 - 252z - 64 = 0$ обязательно должен быть делителем числа 64.

Испытывая эти делители, обнаружим, что число 16 является корнем уравнения

$$z^3-252z-64=0.$$

Значит, мы можем взять $b+q=16$. Кроме того, $bq=63$. Отсюда примем $b=7$ и $q=9$.

Пользуясь равенством

$$a=\frac{8}{b-q},$$

получим, что $a=-4$. Наконец, из равенства $p=-a$ найдем, что

$$p=4.$$

Теперь задача решена полностью. Мы получили:

$$x^4-8x+63=(x^2-4x+7)(x^2+4x+9).$$

Имея это разложение, мы легко обнаруживаем все корни многочлена $x^4-8x+63$, или, что то же самое, все корни уравнения

$$x^4-8x+63=0.$$

Этими корнями будут комплексные числа

$$2\pm i\sqrt{3} \quad \text{и} \quad -2\pm i\sqrt{5}.$$

§ 4. ФОРМУЛЫ ВИЕТА

В § 2 было доказано, что целая рациональная функция разлагается на множители по формуле:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть корни целой рациональной функции.

Выполняя умножение в правой части этой формулы, получим:

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=a_0x^n-a_0(x_1+\ldots+x_n)x^{n-1}+$$
$$+a_0(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}-$$
$$-a_0(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)x^{n-3}+$$
$$+\ldots+(-1)^n a_0x_1x_2\ldots x_n.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях буквы x в левой и правой частях последнего равенства, получим формулы:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_{n-2}x_n = -\frac{a_3}{a_0};$$

. . . .

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Эти формулы носят название формул Виета, по имени открывшего их замечательного французского математика Франсуа Виета. Они связывают корни и коэффициенты целой рациональной функции. Например, для

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a^3$$

получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0};$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_2}{a_0};$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_3}{a_0}.$$

Для приведенного многочлена

$$x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n$$

формулы Виета принимают вид:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -p_1;$$

$$x_1x + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = p_2;$$

$$x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -p_3;$$

. . . .

$$x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n p_n.$$

Например, для

$$x^3 - 2x^2 - x - 1$$

получим:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2;$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -1;$$

$$x_1x_2x_3 = 1.$$

Примеры.

1. Не решая уравнения

$$8x^4+6x^3-x^2-5x+4=0,$$

найти сумму и произведение его корней.

Решение.

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{6}{8}=-\frac{3}{4};$$

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

2. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения

$$x^3-2x^2-x-1=0.$$

Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа:

$$y_1=x_2x_3; \quad y_2=x_1x_3; \quad y_3=x_1x_2.$$

Решение. Согласно формулам Виета.

$$x_1+x_2+x_3=2;$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1;$$
$$x_1x_2x_2=1.$$

Теперь найдем значения трех выражений:

$$1)\ y_1+y_2+y_3;\ 2)\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3;\ 3)\ y_1y_2y_3.$$

Легко видеть, что

$$y_1+y_2+y_3=x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2=-1,$$
$$y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=(x_2x_3)\ (x_1x_3)+(x_2x_3)\ (x_1x_2)+$$
$$+(x_1x_3)\ (x_1x_2)=x_1x_2x_3^2+x_1x_3x_2^2+x_2x_3x_1^2=$$
$$=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=1\cdot 2=2,$$
$$y_1y_2y_3=(x_2x_3)(x_1x_3)(x_1x_2)=(x_1x_2x_3)^3=1.$$

Искомым уравнением будет

$$y^3+y^2+2y-1=0.$$

3. Сторонами треугольника являются корни уравнения $x_3-42x^2+587x-2730=0$.

Не решая этого уравнения, найти площадь треугольника.

Решение. Обозначим корни данного уравнения через x_1, x_2, x_3. Тогда согласно формулам Виета $x_1+x_2+x_3=42$; x_1x_2+ $+x_1x_3+x_2x_3=587$; $x_1x_2x_3=2730$.

По формуле Герона

$$S=\sqrt{p(p-x_1)(p-x_2)(p-x_3)},$$

где

$$p = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

Следовательно,

$$(p - x_1)(p - x_2)(p - x_3) = (21 - x_1)(21 - x_2)(21 - x_3) =$$
$$= 441 \cdot 21 - 441 (x_1 + x_2 + x_3) + 21 (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 =$$
$$= 441 \cdot 21 - 441 \cdot 42 + 21 \cdot 587 - 2730 = 336.$$
$$S = \sqrt{21 \cdot 336} = \sqrt{21 \cdot 21 \cdot 16} = 84.$$

4. Не решая уравнения $x^3 - x + 1 = 0$.
Найти сумму пятых степеней его корней.

Решение. Обозначим корни данного уравнения символами x_1, x_2, x_3.
Тогда

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = x_1^3x_1^2 + x_2^3x_2^2 + x_3^3x_3^2.$$

Но из данного уравнения следует, что

$$x_1^3 = x_1 - 1, \; x_2^3 = x_2 - 1, \; x_3^3 = x_3 - 1.$$

Поэтому

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = (x_1 - 1)\, x_1^2 + (x_2 - 1)\, x_2^2 + (x_3 - 1)\, x_3^2 =$$
$$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = x_1 - 1 + x_2 - 1 + x_3 - 1 - [(x_1 +$$
$$+ x_2 + x_3)^2 - 2 (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)].$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ и } x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -1.$$

Следовательно,

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0 - 3 - [0 - 2 \cdot (-1)] = -5.$$

ГЛАВА XXXIV

УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

§ 1. БИКВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение вида

$$Ax^4+Bx^2+C=0,$$

где $A\neq 0$, ***называется биквадратным.***

Заменой $x^2=y$ биквадратное уравнение приводится к квадратному

$$Ay^2+By+C=0,$$

а потому четыре корня биквадратного уравнения определяются формулой

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}}.$$

Этот способ решения биквадратного уравнения удобно применять лишь тогда, когда $B^2-4AC\geqslant 0$.

В этом случае получится либо 4 действительных корня, либо 4 чисто мнимых, либо, наконец, два действительных и два чисто мнимых корня.

Если же $B^2-4AC<0$, то не целесообразно пользоваться заменой $x^2=y$. Поясним это на примере.

Пусть требуется решить уравнение

$$x^4-2x^2+9=0.$$

Здесь $B^2-4AC=2^2-4\cdot 1\cdot 9=-32<0$.

Если мы станем решать это уравнение заменой $x^2=y$, то получим:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{i+i\sqrt{8}}\quad\text{и}\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{1-i\sqrt{8}}.$$

Теперь мы обязаны еще извлечь квадратные корни из полученных мнимых комплексных чисел. В противном случае будет считаться, что решение уравнения не доведено до конца. Таким образом, этот способ решения уравнения оказывается не очень удобным. Более удобный способ решения получается путем следующего преобразования левой части уравнения:

$$x^4-2x^2+9=(x^4+9)-2x^2=$$
$$=(x^4+6x^2+9)-2x^2-6x^2=(x^2+3)^2-8x^2=$$
$$=(x^2+x\sqrt{8}+3)(x^2-x\sqrt{8}+3).$$

После этого придем к уравнению

$$(x^2+x\sqrt{8}+3)(x^2-x\sqrt{8}+9)=0.$$

Отсюда

$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{8}\pm\sqrt{-4}}{2}=-\sqrt{2}\pm i.$$

$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{8}\pm\sqrt{-4}}{2}=\sqrt{2}\pm i.$$

Применим этот способ к решению уравнения $x^4+px^2+q=0$, в котором $p^2-4q<0$.

Из условия $p^2-4q<0$ следует, что $p^2<4q$.

Отсюда ясно, что $q>0$ и $|p|<2\sqrt{q}$, а значит, и $p<2\sqrt{q}$. Поэтому можно сделать следующие преобразования:

$$x^4+px^2+q=(x^4+q)+px^2=$$
$$(x^4+2\sqrt{q}\,x^2+q)-2\sqrt{q}\,x^2+px^2=$$
$$=(x^2+\sqrt{q})^2-(2\sqrt{q}-p)\,x^2=$$
$$=\left(x^2+x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right)\left(x^2-x\sqrt{2\sqrt{q}-p}+\sqrt{q}\right).$$

После этих преобразований решение данного биквадратного уравнения сводится к решению двух квадратных уравнений с действительными коэффициентами.

Примечание. К виду $x^4+px^2+q=0$ приводится уравнение $Ax^4+Bx^2+C=0$ делением на коэффициент A.

УПРАЖНЕНИЯ

Решить уравнения:

337. $x^4-2x^2+10=0$.

338. $2x^4+2x^2+3=0$.

§ 2. ВОЗВРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ 4-й СТЕПЕНИ

Общий вид возвратного уравнения 4-й степени таков:

$$Ax^4+Bx^3+Cx^2+Bx+A=0; \qquad |A\neq 0|.$$

Нуль не является корнем этого уравнения, поэтому можно разделить все члены уравнения на x^2 и привести уравнение к виду:

$$Ax^2+\frac{A}{x^2}+Bx+\frac{B}{x}+C=0,$$

или

$$A\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+B\left(x+\frac{1}{x}\right)+C=0.$$

Введем новое неизвестное $x+\frac{1}{x}=y$.

Тогда

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=y^2,$$

откуда

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2,$$

что приведет нас к квадратному уравнению $A(y^2-2)+By+C=0$.

Найдя y_1 и y_2 и пользуясь уравнением

$$y=x+\frac{1}{x},$$

найдем 4 значения неизвестного x.

§ 3. ДВУЧЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Двучленное уравнение 3-й степени $Ax^3+B=0$.

а) Пусть из двух чисел A и B одно положительное, а другое отрицательное. Положим, что

$$x=y\sqrt[3]{-\frac{B}{A}},$$

где под выражением $\sqrt[3]{-\frac{B}{A}}$ будем подразумевать лишь его арифметическое значение. (Как известно, арифметическое значение корня легко вычисляется с помощью таблиц логарифмов.)

Подставляя в данное уравнение вместо x выражение $y\sqrt[3]{-\frac{B}{A}}$, получим:

$$y^3-1=0,$$

или

$$(y-1)(y^2+y+1)=0.$$

Отсюда

$$y_1=1;\quad y_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\quad y_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пользуясь формулой

$$x=y\sqrt[3]{-\frac{B}{A}},$$

найдем все три корня исходного уравнения:

$$x_1=\sqrt[3]{-\frac{B}{A}};\quad x_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{B}{A}}$$

и

$$x_3=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{B}{A}}.$$

б) Пусть A и B одновременно положительны или одновременно отрицательны. Положим, что

$$x=y\sqrt[3]{\frac{B}{A}},$$

где под выражением $\sqrt[3]{\frac{B}{A}}$ будем подразумевать опять лишь его арифметическое значение.

Из исходного уравнения получим:

$$y^3+1=0,$$

или

$$(y+1)(y^2-y+1)=0.$$

Отсюда

$$y_1=-1;\quad y_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2};\quad y_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пользуясь формулой

$$x=y\sqrt[3]{\frac{B}{A}},$$

найдем все три корня исходного уравнения:

$$x_1=-\sqrt[3]{\frac{B}{A}};\quad x_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{B}{A}}\quad \text{и}\quad x_3=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\sqrt[3]{\frac{B}{A}}.$$

2. Двучленное уравнение 4-й степени $Ax^4+B=0$.

а) Пусть из двух чисел A и B одно положительное, а другое отрицательное. Положим, что

$$x=y\sqrt[4]{-\frac{B}{A}},$$

где под выражением

$$\sqrt[4]{-\frac{B}{A}}$$

будем подразумевать лишь его арифметическое значение. Тогда из исходного уравнения получим:

$$-By^4+B=0,$$

или

$$y^4-1=0,$$

т. е. получим опять двучленное уравнение 4-й степени, но уже в его простейшей форме.

Решив уравнение $y^4-1=0$, найдем его четыре корня:

$$y_1=1;\quad y_2=-1;\quad y_3=i;\quad y_4=-i.$$

Пользуясь уравнением

$$x=y\sqrt[4]{-\frac{B}{A}},$$

найдем все 4 корня исходного уравнения:

$$x_1=\sqrt[4]{-\frac{B}{A}};\qquad x_2=-\sqrt[4]{-\frac{B}{A}};$$

$$x_3=i\sqrt[4]{-\frac{B}{A}};\quad x_4=-i\sqrt[4]{-\frac{B}{A}}.$$

б) Пусть оба числа A и B одновременно положительны либо одновременно отрицательны. Положим, что

$$x=y\sqrt[4]{\frac{B}{A}},$$

где под выражением $\sqrt[4]{\frac{B}{A}}$ будем опять подразумевать лишь его арифметическое значение. Тогда из исходного уравнения получим:

$$y^4+1=0,$$

т. е. опять двучленное уравнение, но уже в его простейшей форме.

Разложим левую часть последнего уравнения на множители:

$$y^4+1=y^4+2y^2+1-2y^2=(y^2+1)^2-2y^2=$$
$$=(y^2+1+\sqrt{2}y)(y^2+1-\sqrt{2}y).$$

Теперь легко обнаружить, что корнями уравнения

$$y^4+1=0$$

будут

$$y_1=\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2};\quad y_2=\frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2};$$

$$y_3=\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2};\qquad y_4=\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}.$$

Пользуясь уравнением

$$x=y\sqrt[4]{\frac{B}{A}},$$

найдем:

$$x_1=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{B}{A}};\quad x_2=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{B}{A}};$$

$$x_3=\frac{1+i}{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}};\qquad x_4=\frac{1-i}{2}\sqrt[4]{\frac{B}{A}}.$$

3. Двучленное уравнение 6-й степени $Ax^6+B=0$.

а) Пусть из двух чисел A и B одно положительное, а другое отрицательное. Положим, что

$$x=y\sqrt[6]{-\frac{B}{A}},$$

где под выражением

$$\sqrt[6]{-\frac{B}{A}}$$

будем, как и выше, подразумевать лишь его арифметическое значение. Тогда из исходного уравнения получим:

$$y^6-1=0.$$

Разложив левую часть этого уравнения на множители, получим:

$$(y^3-1)(y^3+1)=0,$$

или

$$(y-1)(y+1)(y^2+y+1)(y^2-y+1)=0.$$

Найдя 6 корней этого уравнения, определим и 6 корней исходного уравнения так же, как это мы делали в предыдущих случаях.

б) Пусть оба числа A и B либо одновременно положительны, либо одновременно отрицательны. Положим, что

$$x=y\sqrt[6]{\frac{B}{A}},$$

тогда получим:

$$y^6+1=0.$$

Разложив левую часть этого уравнения на множители, получим:

$$y^6+1=(y^2)^3+1=(y^2+1)(y^4-y^2+1)=(y^2+1)(y^4+2y^2+$$
$$+1-3y^2)=(y^2+1)[(y^2+1)^2-3y^2]=(y^2+1)(y^2+1+$$
$$+\sqrt{3}y)(y^2+1-\sqrt{3}y).$$

Таким образом, решение уравнения $y^6+1=0$ сводится к решению уравнения

$$(y^2+1)(y^2+\sqrt{3}y+1)(y^2-\sqrt{3}y+1)=0.$$

Отсюда

$$y_1=i;\quad y_2=-i;\quad y_3=\frac{-\sqrt{3}+i}{2};$$

$$y_4=\frac{-\sqrt{3}-i}{2};\quad y_5=\frac{\sqrt{3}+i}{2};\quad y_6=\frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

Пользуясь формулой $x=y\sqrt[6]{\frac{B}{A}}$, найдем шесть корней уравнения

$$Ax^6+B=0.$$

Второй способ решения двучленного уравнения

$$x^6+1=0.$$

Положим, что $x=iy$. Тогда задача сведется к решению уравнения

$$-y^6+1=0, \quad \text{или} \quad y^6-1=0.$$

Найдя все 6 корней последнего уравнения и пользуясь равенством $x=iy$, найдем все 6 корней уравнения

$$x^6+1=0.$$

4. Двучленное уравнение n-й степени $Ax^n+B=0$.

а) Пусть из двух чисел A и B одно положительное, а другое отрицательное. Положим, что

$$x=y\sqrt[n]{-\frac{B}{A}},$$

где под выражением $\sqrt[n]{-\frac{B}{A}}$ будем, как и раньше, подразумевать лишь его арифметическое значение. Тогда из исходного уравнения получим:

$$y^n-1=0,$$

или

$$y=\sqrt[n]{1}.$$

Найдя все n значений $\sqrt[n]{1}$ (см. стр. 568), получим n значений неизвестного y, а затем и все n корней исходного уравнения.

б) Пусть числа A и B одновременно положительны или одновременно отрицательны. Положим, что

$$x=y\sqrt[n]{\frac{B}{A}},$$

где под выражением $\sqrt[n]{\frac{B}{A}}$ будем опять-таки подразумевать лишь его арифметическое значение. Тогда получим:

$$y^n+1=0,$$

или

$$y=\sqrt[n]{-1}.$$

Найдя все n значений $\sqrt[n]{-1}$, получим n значений неизвестного y, а затем и все n корней исходного уравнения:

$$\sqrt[n]{-1}=\sqrt[n]{\cos\pi+i\sin\pi}=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n}$$

$$[n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ (n-1)].$$

Заметим, что двучленное уравнение

$$Ax^n + B = 0,$$

где $B \neq 0$, никогда не имеет кратных корней.

Уравнение

$$Ax^n = 0,$$

где $A \neq 0$, имеет один n-кратный корень, равный нулю.

Другими словами, все n корней этого уравнения одинаковы и каждый равен нулю, т. е.

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0.$$

§ 4. ТРЕХЧЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Общий вид трехчленного уравнения таков:

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = 0.$$

Решение трехчленного уравнения подстановкой $x^n = y$ сводится к квадратному уравнению

$$Ay^2 + By + C = 0$$

и далее к двучленному уравнению n-й степени.

Пример.
$$x^{10} - 3x^5 + 2 = 0;$$
$$y = x^5; \quad y^2 - 3y + 2 = 0;$$
$$y_1 = 1; \quad y_2 = 2.$$

1)
$$x^5 = 1.$$
$$x = \sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

2)
$$x^5 = 2.$$
$$x = \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2(\cos 0 + i \sin 0)} = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}\right)$$
$$(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

§ 5. ЦЕЛОЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение, в котором правая часть есть нуль, а левая — целая рациональная функция n-й степени, т. е.

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0, \quad \text{где } A_0 \neq 0, \qquad (1)$$

называется целым алгебраическим уравнением n-й степени с одним неизвестным.

При $n = 1$ и $n = 2$ (как известно) это уравнение решается легко.

Вопрос о решении этого уравнения в общем виде при $n=3$ и $n=4$ освещен в конце настоящей главы. Вопрос же о решении уравнения (I) в общем виде при $n>4$ изучается в специальных курсах современной алгебры. Корни уравнений степени выше 4-й не выражаются через коэффициенты уравнения посредством элементарных функций.

Наряду с этим обратная задача, т. е. задача составления уравнения n-й степени по данным его корням, решается легко.

В самом деле, пусть нам даны корни $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уравнения n-й степени. Тогда само уравнение может быть записано в виде

$$A_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0,$$

где A_0 — произвольное число, не равное нулю.

Раскрыв скобки и сгруппировав члены, содержащие одинаковые степени неизвестного, получим искомое уравнение в виде

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}\ldots A_{n-1}x+A_n=0,$$

где коэффициенты A_1, A_2 и A_n вполне определятся в зависимости от A_0 и от чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример. Составить уравнение 5-й степени по данным его корням:

$$1;\quad i;\quad -i;\quad 1+i;\quad 1-i.$$

Искомым уравнением будет:

$$A_0(x-1)(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i)=0,$$

или

$$A_0(x-1)(x^2+1)[(x-1)^2+1]=0,$$

или

$$A_0(x-1)(x^2+1)(x^2-2x+2)=0.$$

Положив $A_0=1$ и раскрыв скобки, получим искомое уравнение в виде

$$x^5-3x^4+5x^3-5x^2+4x-2=0.$$

§ 6. ОТЫСКАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ КОРНЕЙ ЦЕЛОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Приведенное уравнение *

Пусть в приведенном уравнении

$$x^n+k_1x^{n-1}+\ldots+k_{n-1}x+k_n=0 \qquad \text{(I)}$$

все коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — целые числа и $k_n \neq 0$. Докажем следующие две теоремы.

* Напомним, что уравнение называется приведенным, когда коэффициент высшего члена равен 1.

Теорема 1. ***Если уравнение (I) имеет целый корень, то он обязательно будет делителем свободного члена k_n.***

Доказательство. Допустим, что целое число l есть корень уравнения (I). Тогда получим:

$$l^n + k_1 l^{n-1} + \ldots + k_{n-1} l + k_n = 0,$$

или

$$l^{n-1} + k_1 l^{n-2} + \ldots + k_{n-1} + \frac{k_n}{l} = 0,$$

или

$$l^{n-1} + k_1 l^{n-2} + \ldots + k_{n-1} = -\frac{k_n}{l}.$$

В левой части уравнения мы имеем целое число. Следовательно, l должно быть делителем свободного члена k_n, что и требовалось доказать.

Следствие. ***Если ни один из делителей свободного члена не является корнем уравнения (I), то последнее не имеет ни одного целого корня.***

Теорема 2. ***Уравнение (I) не может иметь ни одного дробного корня.***

Доказательство. Применим метод доказательства от противного. Допустим, что уравнение (I) имеет дробный корень $\frac{p}{q}$, где p и q — целые взаимно простые числа. Тогда получим:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + k_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + k_{n-1} \cdot \frac{p}{q} + k_n = 0,$$

или

$$\frac{p^n}{q^n} + k_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + k_{n-1} \cdot \frac{p}{q} + k_n = 0.$$

Умножив на q^{n-1}, получим:

$$\frac{p^n}{q} + k_1 p^{n-1} + \ldots + k_{n-1} p q^{n-2} + k_n q^{n-1} = 0,$$

или

$$k_1 p^{n-1} + k_2 p^{n-2} q + \ldots + k_{n-1} p q^{n-2} + k_n q^{n-1} = -\frac{p^n}{q}.$$

Но последнее равенство невозможно, так как его левая часть есть число целое, а правая — дробное.

Следовательно, уравнение (I) не может иметь ни одного дробного корня.

Итак, уравнение (I) может иметь корни либо целые, либо иррациональные, либо мнимые.

Для нахождения целых корней уравнения (I) надо производить испытание делителей свободного члена. Если ни один делитель свободного члена не окажется корнем уравнения (I), то это будет означать (как это уже было доказано выше), что оно не имеет ни одного целого корня. В этом случае корнями уравнения (I) могут быть либо иррациональные, либо мнимые числа.

Примеры:

1. Найти целые корни уравнения:

$$x^3+x^2+x-2=0.$$

Делителями свободного члена являются лишь числа 1; -1; 2; -2. Ни один из этих делителей не является корнем данного уравнения. Следовательно, оно не имеет ни одного целого корня.

2. Найти целые корни уравнения:

$$x^3+x^2-3x-2=0.$$

Делители 1; -1; 2 не являются корнями этого уравнения. Делитель же -2 является корнем данного уравнения. Следовательно, данное уравнение имеет только один целый корень, равный -2.

Разделив многочлен x^3+x^2-3x-2 на $x+2$, получим в частном x^2-x-1. Поэтому данное уравнение может быть записано в виде

$$(x+2)(x^2-x-1)=0.$$

Отсюда получим и остальные два корня данного уравнения:

$$x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{и} \quad x_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Неприведенное уравнение

Пусть в неприведенном уравнении

$$s_0x^n+s_1x^{n-1}+\ldots+s_{n-1}x+s_n=0 \qquad \text{(II)}$$

все коэффициенты $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_n$ — целые числа и $s_0 \neq 1$ и $s_n \neq 0$. Поставим следующую задачу. Найти все рациональные корни уравнения (II).

Умножив обе части уравнения на s_0^{n-1}, получим:

$$s_0^{n-1}\cdot s_0x^n+s_0^{n-1}\cdot s_1x^{n-1}+s_0^{n-1}\cdot s_2x^{n-2}+\ldots+s_0^{n-1}\cdot s_{n-1}x+ \\ +s_0^{n-1}\cdot s_n=0,$$

или

$$s_0^nx^n+s_1\cdot s_0^{n-1}x^{n-1}+s_2s_0s_0^{n-2}x^{n-2}+\ldots+s_{n-1}s_0^{n-2}\cdot s_0x+s_0^{n-1}s_n=0,$$

или

$$(s_0x)^n+s_1(s_0x)^{n-1}+s_2s_0(s_0x)^{n-2}+\ldots+s_{n-1}s_0^{n-2}(s_0x)+s_ns_0^{n-1}=0.$$

Примем за новое неизвестное произведение s_0x.

Полагая $s_0x=y$, получим:

$$y^n+s_1y^{n-1}+s_2s_0y^{n-2}+\ldots+s_{n-1}s_0^{n-2}y+s_ns_0^{n-1}=0. \qquad \text{(III)}$$

Таким образом, мы пришли к уравнению относительно y, которое также имеет целые коэффициенты, но которое уже является приведенным. Это уравнение, как уже известно, дробных корней иметь не может. Но у него могут быть или не быть целые корни.

Если окажется, что уравнение (III) имеет целые корни, то каждому его целому корню y_i будет соответствовать (в силу равенства $s_0x=y$) рациональный корень $\frac{y_i}{s_0}$ уравнения (II).

Если окажется, что уравнение (III) не имеет ни одного целого корня, то это будет означать, что уравнение (II) не имеет ни одного рационального корня.

Примеры:

1. Найти рациональные корни уравнения

$$2x^3+x^2-x+1=0. \qquad (\alpha)$$

Умножив на 2^2, получим:

$$2^3x^3+2^2x^2-2^2x+2^2=0,$$

или

$$(2x)^3+(2x)^2-2\cdot(2x)+2^2=0.$$

Полагая $2x=y$, получим:

$$y^3+y^2-2y+4=0. \qquad (\beta)$$

Делители свободного члена:

$$1; \quad -1; \quad 2; \quad -2; \quad 4; \quad -4.$$

Ни один из этих делителей не является корнем уравнения (β), т. е. уравнение (β) не имеет ни одного целого корня. Следовательно, первоначальное уравнение (α) не имеет ни одного рационального корня.

2. Найти рациональные корни уравнения

$$6x^4-x^3+5x^2-x-1=0. \qquad (a)$$

Умножив на 6^3, получим:

$$6^4x^4-6^3x^3+5\cdot6^3x^2-6^3x-6^3=0,$$

или

$$(6x)^4-(6x)^3+30\,(6x)^2-36\,(6x)-216=0.$$

Полагая $6x=y$, получим:

$$y^4-y^3+30y^2-36y-216=0. \qquad (b)$$

Испытывая делители числа 216, найдем, что числа -2 и 3 являются корнями уравнения (b).

Найденным целым корням уравнения (b) будут соответствовать (в силу уравнения $6x=y$) дробные корни уравнения (a), а именно:

$$x_1=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3} \text{ и } x_2=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

Зная два корня уравнения (a) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$, разделим его левую часть на произведение: $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$. Для удобства деления предварительно умножим делимое и делитель на 6. Тогда получим:

$$
\begin{array}{r|l}
36x^4-6x^3+30x^2-6x-6 & 6x^2-x-1 \\
\cline{2-2}
\mp 36x^4 \pm 6x^3 \pm 6x^2 & 6x^2+6. \\
\cline{1-1}
36x^2-6x-6 & \\
\mp 36x^2 \pm 6x \pm 6 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Остальные корни уравнения (a) будут решениями уравнения

$$6x^2+6=0,$$

т. е. будут i и $-i$.

Итак, уравнение (a) имеет два рациональных корня $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{3}$ и два чисто мнимых корня i и $-i$.

§ 7. О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ 3-й И 4-й СТЕПЕНИ

Уравнение 3-й степени в общем виде таково:

$$A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3=0, \tag{I}$$

где

$$A_0 \neq 0.$$

Решение этого уравнения всегда можно свести к решению уравнения

$$y^3+py+q=0. \tag{II}$$

Действительно, разделив все члены уравнения (I) на A_0, получим уравнение в приведенной форме

$$x^3+B_1x^2+B_2x+B_3=0. \tag{III}$$

Применим к последнему уравнению преобразование

$$x=y+h, \tag{IV}$$

где y — новое неизвестное, а h — постоянное, значение которой мы в дальнейшем выберем так, как нам будет необходимо.

Подставив в уравнение (III) вместо x выражение $y+h$ и расположив результат по степеням y, получим:

$$y^3+(3h+B_1)\,y^2+(3h^2+2B_1h+B_2)\,y+(h^3+ \\ +B_1h^2+B_2h+B_3)=0. \tag{V}$$

Выберем постоянную h так, чтобы коэффициент при y^2 обратился в нуль, т. е. положим, что

$$3h + B_1 = 0,$$

откуда

$$h = -\frac{B_1}{3}.$$

Подставляя это значение h в уравнение (V), получим:

$$y^3 + py + q = 0, \qquad \text{(P)}$$

где

$$p = -\frac{B_1^2}{3} + B_2, \quad q = \frac{2B_1^3}{3} - \frac{B_1 B_2}{3} + B_3.$$

Теперь перейдем к решению уравнения

$$y^3 + py + q = 0.$$

Неизвестное y представим в виде суммы двух новых неизвестных, т. е. положим, что

$$y = u + v.$$

Тогда уравнение (P) примет вид:

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0,$$

или

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0. \qquad \text{(Q)}$$

Так как мы вместо одного неизвестного y ввели два неизвестных u и v, то одно из них может быть выбрано произвольно; иначе говоря, мы можем установить между u и v еще одну произвольную зависимость.

Пользуясь этим, потребуем, чтобы $3uv + p = 0$, т. е., чтобы $uv = -\frac{p}{3}$. Тогда уравнение (Q) примет вид:

$$u^3 + v^3 + q = 0.$$

Таким образом, мы пришли к системе уравнений:

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{3}; \\ u^3 + v^3 = -q, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}; \\ u^3 + v^3 = -q. \end{cases}$$

В этой системе за неизвестные примем u^3 и v^3. Тогда они определятся как корни квадратного уравнения

$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0.$$

Таким образом, можем принять

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

и

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

Определив отсюда u и v, найдем результат для неизвестного y:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Получили так называемую формулу Кардано для решения кубического уравнения.

Полные сведения о решении уравнения 3-й степени и о формуле Кардано излагаются в учебниках по высшей алгебре.

Решение уравнения 4-й степени путем преобразований сводится к решению уравнения 3-й степени.

УПРАЖНЕНИЯ

339. Решить уравнения:
а) $2x^3+3=0$; б) $2x^4+3=0$; в) $2x^6+3=0$.

340. Решить уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120.$$

341. Доказать, что уравнение $x^5+x=10$ имеет положительный корень и что этот корень является иррациональным.

342. П а р а д о к с. Извлекая корень n-й степени из обеих частей уравнения

$$(x+1)^n=(x-1)^n, \tag{1}$$

получим $x+1=x-1$, или

$$1=-1.$$

Это противоречие свидетельствует о том, что уравнение (1) корней не имеет.

Верно ли, что уравнение (1) не имеет никаких корней?

Где ошибка в наших рассуждениях?

ГЛАВА XXXV

НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ, РЕШАЕМЫЕ ИСКУССТВЕННЫМ ПУТЕМ

Примеры:

1.
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=a^2, \\ x+xy+y=b. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему к виду:

$$\begin{cases} (x+y)^2-xy=a^2, \\ (x+y)+xy=b. \end{cases}$$

Полагая $x+y=u$ и $xy=v$, получим:

$$\begin{cases} u^2-v=a^2, \\ u+v=b. \end{cases}$$

Найдя решения этой системы, придем к двум отдельным системам вида:

$$\begin{cases} x+y=A, \\ xy\quad\;\;=B. \end{cases}$$

Решения этой системы наиболее удобно находить с помощью квадратного уравнения:

$$z^2-Az+B=0$$

(см. стр. 338, пример 3).

2.
$$\begin{cases} x^2-(y-z)^2=a, \\ y^2-(z-x)^2=b, \\ z^2-(x-y)^2=c. \end{cases}$$

Разложим левые части уравнений на множители:

$$\begin{cases} (x+y-z)(x-y+z)=a, \\ (y+z-x)(y-z+x)=b, \\ (z+x-y)(z-x+y)=c. \end{cases}$$

Перемножая и извлекая квадратный корень, получим:

$$(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)=\pm\sqrt{abc}.$$

Сопоставляя это уравнение по очереди с каждым из предшествующих трех уравнений, получим:

$$y+z-x=\frac{\pm\sqrt{abc}}{a},$$
$$z+x-y=\frac{\pm\sqrt{abc}}{b},$$
$$x+y-z=\frac{\pm\sqrt{abc}}{c}.$$

Складывая попарно, найдем два решения системы:

$$x=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$
$$y=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right),$$
$$z=\pm\frac{\sqrt{abc}}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

3. $$\begin{cases} y+z+yz=a, \\ z+x+zx=b, \\ x+y+xy=c. \end{cases}$$

Прибавив к левой и правой частям каждого уравнения системы по единице, получим

$$\begin{cases} 1+y+z+yz=a+1, \\ 1+z+x+zx=b+1, \\ 1+x+y+xy=c+1. \end{cases}$$

Разложим левые части системы на множители:

$$\begin{cases} (1+y)(1+z)=a+1, \\ (1+z)(1+x)=b+1, \\ (1+x)(1+y)=c+1. \end{cases}$$

Перемножим левые и правые части уравнений системы и извлечем квадратный корень:

$$(1+x)(1+y)(1+z)=\pm\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}.$$

Пользуясь этим уравнением и каждым из трех предшествующих получим:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\pm\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{a+1}-1, \\ y=\dfrac{\pm\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{b+1}-1, \\ z=\dfrac{\pm\sqrt{(a+1)(b+1)(c+1)}}{c+1}-1. \end{cases}$$

Система имеет два решения.

4. Найти положительные решения системы n уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} \dfrac{x_2 \cdot x_3 \ldots x_n}{x_1} = a_1, \\ \dfrac{x_1 \cdot x_3 \ldots x_n}{x_2} = a_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dfrac{x_1 \cdot x_2 \ldots x_{n-1}}{x_n} = a_n, \end{cases} \quad *$$

где все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные.

Перемножив левые и правые части системы уравнений, получим:

$$\frac{(x_1 \cdot x_2 \ldots x_n)^{n-1}}{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} = a_1 a_2 \ldots a_n,$$

откуда

$$x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \qquad \text{(A)}$$

Из первого уравнения системы следует, что

$$x_2 \cdot x_3 \ldots x_n = a_1 x_1.$$

Пользуясь этим равенством и равенством (А), найдем, что

$$x_1 \cdot a_1 x_1 = \sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

откуда

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{a_1}}.$$

Аналогично находятся значения и остальных неизвестных.

Под появившимися корнями $(n-2)$-й степени и 2-й степени мы подразумеваем здесь лишь их арифметические значения.

Данная система имеет лишь одно такое решение, при котором значения всех n неизвестных одновременно положительны. Это решение можно записать кратко так:

$$x_k = \sqrt{\frac{\sqrt[n-2]{a_1 a_2 \ldots a_n}}{a_k}} \quad |k = 1, 2, 3, \ldots, n|.$$

5. Решить систему:

$$\begin{cases} x^5 + y^5 = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

---

* Эту систему можно было записать кратко так:

$$\frac{x_1 \cdot x_2 \ldots x_{k-1} \cdot x_{k+1} \ldots x_n}{x_k} = a_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)=a;$$
$$(x+y)[x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2-xy(x^2+y^2)]=a;$$
$$(x+y)\{(x^2+y^2)^2-x^2y^2-xy[(x+y)^2-2xy]\}=a;$$
$$(x+y)\{[(x+y)^2-2xy]^2-x^2y^2-xy[(x+y)^2-2xy]\}=a.$$

Так как $x+y=b$, то, заменив в последнем уравнении $x+y$ через b и обозначив xy через z, получим квадратное уравнение

$$b[(b^2-2z)^2-z^2-z(b^2-2z)]=a$$

с одним неизвестным z. Решив это квадратное уравнение, найдем два значения для z, т. е. для произведения xy.

Теперь задача сведется к решению двух отдельных систем вида:

$$\begin{cases} x+y=m, \\ xy=n. \end{cases}$$

ГЛАВА XXXVI

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

§ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дедукцией называется переход от общего утверждения к частному. Приведем пример.

Площадь всякого треугольника равна

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ^*;$$

это утверждение общее.

От этого общего утверждения можно сделать переход к частному утверждению, например такому:

площадь равностороннего треугольника равна

$$\sqrt{\frac{3a}{2}\cdot\left(\frac{3a}{2}-a\right)\cdot\left(\frac{3a}{2}-a\right)\left(\frac{3a}{2}-a\right)};$$

т. е. равна $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$, где a — длина стороны равностороннего треугольника.

Дедукция есть одна из форм умозаключения. (Дедукция происходит от латинского слова deductio — выведение.)

Индукцией называется переход от частного утверждения к общему. Индукция есть также одна из форм умозаключения, применяя которую от знания отдельного факта идут к обобщению, к общему положению. (Индукция происходит от латинского слова inductio — наведение, побуждение.)

Все формы умозаключения связаны между собой, а потому связаны между собой дедукция и индукция. Одна дедукция (или одна индукция) никогда не может обеспечить познания объективной действительности.

Легкомысленное применение индукции может привести к неправильным выводам. Приведем пример.

Рассмотрим выражение

$$n^2+n+41.$$

---

* Здесь a, b, c — стороны треугольника, p — полупериметр, т. е. $\frac{a+b+c}{2}$.

Подставив в это выражение вместо n нуль, получим простое число 41. Подставив вместо n единицу, получим 43, т. е. опять простое число. Продолжая подставлять вместо n последовательно 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11, получим соответственно 47, 53; 61; 71; 83; 97; 113; 131; 151; 173, т. е. опять же числа простые. Можем ли мы теперь быть уверенными в справедливости такого утверждения:

«Выражение n^2+n+41 принимает значение, равное простому числу при любом целом положительном значении буквы n»?

Быть уверенными в справедливости этого утверждения мы не можем, так как полученные выше результаты не являются достаточным основанием для такого утверждения. Они являются лишь основанием для предположения о верности этого утверждения. В действительности более полное исследование выражения n^2+n+41 показывает, что значение этого выражения не при всяком целом значении n является простым числом. Например, при $n=40$ получается число 1681, которое уже не является простым. (Число 1681 делится на 41.)

Этот пример показывает, что утверждение может быть верным при одних значениях натурального числа n и неверным при других.

Математическая индукция* есть весьма общий метод, позволяющий во многих случаях исследовать законность перехода от частного утверждения к утверждению общему.

Теорема о математической индукции

Пусть $S(n)$ — некоторое утверждение, в формулировку которого входит натуральное число n. Пусть, во-первых, утверждение $S(n_0)$ справедливо и пусть, во-вторых, из справедливости утверждения $S(k)$, где k есть тоже любое натуральное число, не меньшее n_0, следует справедливость утверждения $S(k+1)$. Тогда утверждение $S(n)$ справедливо при любом $n \geqslant n_0$.

Доказательство. Допустим, что утверждение $S(n)$ не справедливо при некотором $N > n_0$, т. е. что утверждение $S(N)$ ложно. Тогда должно быть ложным и утверждение $S(N-1)$, так как в противном случае из справедливости $S(N-1)$ по второму условию теоремы следовала бы справедливость и утверждения $S(N)$. Точно так же убеждаемся, что из ложности $S(N-1)$ следует ложность $S(N-2)$, а из этого ложность $S(N-3)$ и т. д.

Таким образом (каким бы большим ни было число N), мы рано или поздно, отнимая от этого числа по единице, дойдем до числа n_0 и получим, что утверждение $S(n_0)$ ложно, что противоречит первому условию теоремы. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

---

* Математическую индукцию называют также «полной индукцией» или «совершенной индукцией».

Приведенное доказательство теоремы о математической индукции может показаться некоторым читателям труднопонимаемым. Поэтому ниже приводится несколько упрощенная схема метода математической индукции.

Если в утверждении некоторой теоремы фигурирует целое положительное число n и если из справедливости этой теоремы для какого угодно частного значения $n=k$ следует справедливость ее для значения $k+1$, то, коль скоро это утверждение справедливо для $n=1$, оно будет справедливо для любого целого положительного числа n.

Здесь дело обстоит так. Сначала мы убеждаемся в том, что теорема верна при $n=1$. Затем, предполагая, что она верна для какого угодно частного значения $n=k$, доказываем ее справедливость для $n=k+1$.

После этого рассуждаем так: поскольку теорема верна для $n=1$, значит, она будет верной и для $n=1+1$, т. е. для $n=2$. Поскольку она верна для $n=2$, она будет верной и для $n=2+1$, т. е. для $n=3$ и т. д.

§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Примеры:

1. Доказать, что $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

Этой формулой утверждается следующее: для того чтобы найти сумму кубов нескольких первых натуральных чисел, достаточно сумму натуральных чисел от 1 до n включительно, т. е. $\frac{n(n+1)}{2}$ возвысить в квадрат.

Доказательство. 1) При $n=1$ утверждение справедливо, так как $1^3=\left[\frac{1(1+1)}{2}\right]^2$; $1=1$.

2) Допустим, что утверждение справедливо при $n=k$, т. е.

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2.$$

Тогда

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3=$$
$$=(k+1)^2\cdot\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=(k+1)^2\cdot\frac{(k+2)^2}{4}=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2.$$

Утверждение оказалось верным и для $n=k+1$. Следовательно, теорема верна при всяком целом положительном значении n.

2. Доказать, что

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{nx}{2}.$$

Доказательство. 1) При $n=1$ утверждение справедливо, так как $\sin x=\frac{\sin\frac{1+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{1\cdot x}{2}$, т. е. $\sin x=\sin x$.

2) Допустим, что утверждение справедливо при $n=k$, т. е.

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin kx=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}.$$

Тогда

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin kx+\sin(k+1)x=$$

$$=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+\sin(k+1)x=\frac{\sin\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{kx}{2}+$$

$$+2\sin\frac{k+1}{2}x\cos\frac{k+1}{2}x=$$

$$=\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\left(\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\cos\frac{k+1}{2}x\right)=$$

$$=\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{kx}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{k+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\sin\frac{k+1}{2}x\cdot\frac{\sin\frac{kx}{2}+\sin\frac{k+2}{2}x-\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{k+2}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\sin\frac{k+1}{2}x.$$

Утверждение оказалось верным и для $n=k+1$. Следовательно, формула верна при всяком целом положительном значении n.

3. Доказать, что при $n>1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}. \qquad \text{(A)}$$

Доказательство. 1) При $n=2$ утверждение справедливо. Действительно,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}+1-2}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}.$$

Итак, оказалось, что

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}.$$

Но $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}>0$, а потому $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}>\sqrt{2}$.
Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}.$$

2) Пусть

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}. \qquad \text{(I)}$$

Докажем, что тогда будет справедливым и неравенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

К обеим частям неравенства (I) прибавим по $\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Тогда получим:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\sqrt{k+1}-\sqrt{k}>\sqrt{k+1},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\sqrt{k+1},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\sqrt{k+1}.$$

Но $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Поэтому и подавно

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}.$$

Теперь мы видим, что утверждение (А) оказалось верным и для $n=k+1$. Следовательно, это утверждение справедливо при всяком целом положительном значении n, большем двух.

Существует очень много и других теорем, которые успешно доказываются с помощью метода математической индукции. Некоторые из таких теорем встретятся нам в последующих главах.

Дополнение к уже рассмотренному нами примеру 1.

В этом примере мы доказали с помощью полной индукции справедливость формулы

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

заданной в готовом виде.

Теперь покажем, как можно прийти к этой формуле с помощью неполной индукции.

Обозначим сумму $1^3+2^3+\ldots+n^3$ символом S_n и составим таблицу ее значений для нескольких последовательных значений n.

n	S_n
1	1^3 . . . . $=1$
2	1^3+2^3 . . . . $=9$
3	$1^3+2^3+3^3$ . . . . $=36$
4	$1^3+2^3+3^3+4^3$. . . . . $=100$
5	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3$. . . . . $=225$
...	. . . .

Если проявить наблюдательность, то нетрудно заметить, что в этой таблице значения S_n получаются так:

$$S_1=1,$$
$$S_2=(1+2)^2,$$
$$S_3=(1+2+3)^2,$$
$$S_4=(1+2+3+4)^2,$$
$$S_5=(1+2+3+4+5)^2.$$

Здесь почти невозможно удержаться, чтобы не сформулировать предположение, что

$$S_n=(1+2+3+\ldots+n)^2, \text{ т. е. что}$$
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

Разумеется, справедливость этого предположения должна быть доказанной, что и было сделано в первом примере.

УПРАЖНЕНИЕ

343. Пользуясь методом неполной индукции, обнаружить предположительно формулу для суммы квадратов натуральных чисел от 1 до n включительно и доказать ее справедливость с помощью полной индукции.

§ 3. НЕРАВЕНСТВО КОШИ

Нередко приходится применять метод математической индукции в несколько усложненной форме. Покажем это на доказательстве неравенства Коши

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \qquad (A)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. (Выражение $\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$ называется средним геометрическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а выражение $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ — их средним арифметическим).

Во-первых, покажем справедливость неравенства (А) при $n=2$. Очевидно, что

$$(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geqslant 0.$$

Отсюда

$$a_1-2\sqrt{a_1a_2}+a_2 \geqslant 0, \text{ или}$$

$$\sqrt{a_1a_2} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2}.$$

Значит, при $n=2$ неравенство (А) справедливо.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма. ***Если неравенство* (А) *верно при* $n=k$, *то оно будет верно при* $n=2k$.**

Доказательство. Пользуясь свойствами арифметических корней, получим:

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}}=\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_{2k}}}=$$
$$=\sqrt{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k}}}.$$

Но

$$\sqrt{\sqrt[k]{a_1\ldots a_k}\cdot\sqrt[k]{a_{k+1}\ldots a_{2k}}} \leqslant \frac{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k}}}{2}.$$

(Мы здесь воспользовались доказанным выше неравенством:

$$\sqrt{P\cdot Q} \leqslant \frac{P+Q}{2}.)$$

Следовательно,

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}} \leqslant \frac{\sqrt[k]{a_1a_2\ldots a_k}+\sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k}}}{2}. \quad \text{(B)}$$

Поскольку мы предположили неравенство (А) верным при $n=k$, постольку

$$\sqrt[k]{a_1\ldots a_k} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k} \quad \text{и} \quad \sqrt[k]{a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_{2k}} \leqslant \frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}.$$

Учитывая эти два последних неравенства и неравенство (В), получим:

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}} \leqslant \frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}+\frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}}{2},$$

или

$$\sqrt[2k]{a_1a_2\ldots a_{2k}} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}}{2k}.$$

Итак, предполагая, что неравенство (A) справедливо при $n=k$, мы доказали, что оно будет справедливым и при $n=2k$. Но ранее было доказано, что неравенство (A) справедливо при $n=2$. Следовательно, оно будет справедливым и при $n=4$, 8, 16, 32, ..., т. е. при $n=2^m$, где m — любое натуральное число.

Теперь перейдем к доказательству неравенства (A) для любого натурального числа n.

Пусть n есть любое натуральное число. Если окажется, что n есть целая степень числа 2, то для такого n, как это уже было доказано, неравенство (A) справедливо. Если же n не есть целая степень числа 2, то к n всегда можно прибавить такое число q, что $n+q$ станет целой степенью числа 2.

Итак, положим, что

$$n+q=2^l.$$

Тогда получим неравенство

$$\sqrt[n+q]{a_1a_2\ldots a_na_{n+1}\ldots a_{n+q}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+q}}{n+q},$$

справедливое при любых положительных a_i, где

$$i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n+q.$$

Это следует из того, что число $n+q$ есть целая степень числа 2.

Положим, что

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=a_{n+q}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Тогда получим последовательно:

$$\sqrt[n+q]{a_1a_2\ldots a_n\cdot\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^q}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}q}{n+q},$$

или

$$\sqrt[n+q]{a_1a_2\ldots a_n\cdot\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^q}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{(a_1+\ldots a_n)\,n+(a_1+\ldots+a_n)\,q}{n\,(n+q)},$$

$$\sqrt[n+q]{a_1a_2\ldots a_n\cdot\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^q}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

$$a_1a_2\ldots a_n\cdot\left(\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)^q\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{n+q},$$

$$a_1a_2\ldots a_n\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^n.$$

И, наконец,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

что и требовалось доказать.

Значит, неравенство (А) справедливо при всяком натуральном n.

Доказанное неравенство читается так:

Среднее арифметическое n положительных чисел больше или равно их среднему геометрическому.

Доказанное неравенство (А) полезно запомнить. С его помощью легко решаются многие интересные и трудные задачи. Покажем это на нескольких примерах.

1. Доказать, что при любом натуральном n

$$\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}.$$

Доказательство.

Применим теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом, положив $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, ..., $a_n = n$:

$$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n} > \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}. \qquad (1)$$

(Здесь знак равенства исключен, так как числа 1, 2, 3, ..., n различные.)

Из неравенства (1) следует:

$$\frac{\frac{(1+n)\,n}{2}}{n} > \sqrt{n!}$$

и окончательно

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{n+1}{2},$$

что и требовалось доказать.

2. Доказать, что при любом натуральном n

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

Доказательство.

Применим теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом к $(n+1)$-му числу, положив

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{и} \quad a_{n+1} = 1:$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right) + \left(1+\frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(1+\frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot 1}\,. \qquad (1)$$

(Здесь знак равенства исключается, так как имеется два различных числа: $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ и 1.)

Левая часть этого неравенства преобразовывается так:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)n+1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому имеем:

$$1+\frac{1}{n+1}>\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Возведя обе части последнего неравенства в $(n+1)$-ю степень, получим:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

что и требовалось доказать.

3. Требуется разбить положительное число c на n положительных слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых имело бы наибольшее значение.

Решение

Пусть искомыми положительными слагаемыми будут числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

По условию задачи

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=c.$$

Применив неравенство (A) к n числам $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1 x_2\ldots x_n},$$

или

$$\frac{c}{n}\geqslant\sqrt[n]{x_1 x_2\ldots x_n},$$

и, наконец,

$$x_1 x_2\ldots x_n\leqslant\left(\frac{c}{n}\right)^n.$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=$ $=\ldots=x_n$.)

Из последнего неравенства следует, что наибольшее значение произведения $x_1\, x_2\, \ldots\, x_n$ равно $\left(\frac{c}{n}\right)^n$. Это наибольшее значение достигается лишь при условии $x_1=x_2=\ldots=x_n$, т. е. лишь тогда, когда каждое слагаемое будет равно $\frac{c}{n}$.

УПРАЖНЕНИЯ

344. Доказать, что n прямых, расположенных в одной плоскости, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, рассекают плоскость на

$$1+\frac{n(n+1)}{2} \text{ частей.}$$

345. Доказать, что при всяком натуральном значении n справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1.$$

346. Доказать, что для любых чисел a, b, c, имеющих одинаковые знаки,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3.$$

347. Доказать неравенство

$$\frac{x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n}{n}-x_1 x_2 \ldots x_n\geqslant 0,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа.

348. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_n}{2}.$$

349. Доказать следующее предложение (теорему):
Если произведение n положительных чисел равно 1, то их сумма больше или равна n.

350. Разбить положительное число c на n положительных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих слагаемых имела бы наименьшее значение.

351. Известно, что модуль суммы двух комплексных чисел меньше или равен сумме модулей слагаемых. Пользуясь методом полной индукции, обобщите эту теорему для любого числа слагаемых, т. е. докажите, что

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|, \qquad (A)$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — любые комплексные числа.

Отсюда выведите неравенство

$$\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Покажите также, что неравенство

$$|a+b+c|\leqslant|a|+|b|+|c|,$$

где a, b, c — действительные числа, вытекает из неравенства (A).

352. Какого наибольшего объема ящик можно сделать, если сумма длин его 12 ребер должна быть равной l?

ГЛАВА XXXVII

СОЕДИНЕНИЯ (КОМБИНАТОРИКА*)

Группы, составленные из каких-либо предметов (безразлично какой природы, например букв, чисел, геометрических фигур, цветных флажков и т. п.), ***называются соединениями.***

Сами предметы, из которых составляются соединения, называются элементами.

Различают три основных типа соединений: размещения, перестановки и сочетания.

§ 1. РАЗМЕЩЕНИЯ

Пусть имеется n каких-либо различных элементов. Ради краткости обозначим их различными буквами:

$$a;\ b;\ c;\ \ldots;\ h;\ k;\ l.$$

Определение. ***Размещениями из n элементов по p в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит p элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга либо самими элементами (хотя бы одним), либо лишь порядком их расположения.***

Примеры.

Из одного элемента a можно составить лишь одно размещение.

Из двух элементов a и b можно составить два размещения по одному элементу и два размещения по два элемента ab, ba.

Из трех элементов a, b, c можно составить три размещения по одному элементу; шесть размещений по два элемента ab, ac, ba, bc, ca, cb; шесть размещений по три элемента

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Из четырех элементов a, b, c, d можно составить 4 размещения по одному элементу:

$$a,\ b,\ c,\ d;$$

---

* «Комбинаторика» происходит от латинского слова «Combinatio» — соединение.

12 размещений по два элемента:

$$ab,\ ac,\ ad,\quad ca,\ cb,\ cd,$$
$$ba,\ bc,\ bd,\quad da,\ db,\ dc;$$

24 размещения по три элемента:

$$abc,\ abd,\ acb,\ acd,\ adb,\ adc,\ bac,\ bad,$$
$$bca,\ bcd,\ bda,\ bdc,\ cab,\ cad,\ cba,\ cbd,$$
$$cda,\ cdb,\ dca,\ dcb,\ dba,\ dbc,\ dca,\ dcb;$$

24 размещения по четыре элемента:

$$abcd,\ abdc,\ acbd,\ acdb,\ adbc,\ adcb,\ bacd,\ babc,$$
$$bcad,\ bcda,\ bdac,\ bdca,\ cabd,\ cadb,\ cbad,\ cbda,$$
$$cdab,\ cdba,\ dcab,\ dcba,\ dbac,\ dbca,\ dcab,\ dcba.$$

По поводу размещений могут быть поставлены две основные задачи.

1. Имеется n элементов. Составить из них всевозможные размещения по p в каждом.

2. Имеется n элементов. Не составляя из них всевозможных размещений по p в каждом, определить, сколько таких различных размещений существует.

Начиная изложение теории размещений, мы не можем решить вторую задачу вне связи с первой. Но в дальнейшем, когда вторая задача будет решена в общем виде, мы уже не будем нуждаться в составлении самих размещений, а будем прямо подсчитывать число размещений в любом случае с помощью выведенного правила.

Число размещений из n элементов по p в каждом обозначается символом A_n^p.

Вывод формулы числа размещений

Пусть имеется n элементов $a, b, c, \ldots, h, k, l$. Очевидно, что размещений из n элементов по одному будет n.
Следовательно,

$$A_n^1 = n. \tag{1}$$

Чтобы определить число размещений из n элементов по два, сначала составим все такие размещения.

Воспользуемся уже имеющимися размещениями по одному:

$$a;\ b;\ c;\ \ldots;\ h;\ k;\ l.$$

Возьмем из этих размещений только первое, т. е. элемент a, и станем присоединять к нему по очереди каждый из остальных элементов. Тогда получим первую строчку размещений по два:

$$ab;\ ac;\ \ldots;\ ah;\ ak;\ al.$$

Поступая также с каждым из остальных размещений по одному, получим записанную ниже колонку всех размещений из n элементов по два:

$$\begin{array}{l} ab;\ ac;\ \ldots;\ ah;\ ak;\ al; \\ ba;\ bc;\ \ldots;\ bh;\ bk;\ bl; \\ ca;\ cb;\ \ldots;\ ch;\ ck;\ cl; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ la;\ lb;\ \ldots;\ lh;\ lk. \end{array}$$

Число размещений в каждой строке равно $n-1$, а всех строк n. Следовательно,

$$A_n^2 = n(n-1). \qquad (2)$$

Чтобы найти число размещений по три, воспользуемся уже имеющимися размещениями по два.

Возьмем из предыдущей колонки первое размещение по два и станем присоединять к нему по очереди каждый из $(n-2)$ оставшихся элементов. Тогда получим первую строчку размещений по три:

$$abc,\ \ldots,\ abh,\ abk,\ abl.$$

Поступая также с каждым из остальных размещений по два, получим записанную ниже колонку всех размещений из n элементов по три:

$$\begin{array}{l} abc;\ \ldots;\ abh;\ abk;\ abl; \\ acb;\ \ldots;\ ach;\ ack;\ acl; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ lka;\ lkb;\ \ldots;\ lkh. \end{array}$$

В каждой строке $(n-2)$ размещения, а всех строк $n(n-1)$. Следовательно,

$$A_n^3 = n(n-1)(n-2). \qquad (3)$$

Пользуясь методом математической индукции, можно доказать, что закономерность, наблюдаемая в формулах (1), (2) и (3), обладает общностью, т. е. доказать справедливость формулы

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(p-1)], \text{ где } p \leqslant n. \qquad (A)$$

Допустим, что формула (A) справедлива при $p=k$, т. е. предположим справедливым следующее равенство:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)].$$

Докажем, что в таком случае будет справедливым и равенство

$$A_n^{k+1} = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)](n-k).$$

Мы допустили, что число всех размещений из n элементов по k элементов равно произведению

$$n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)].$$

Возьмем одно из этих размещений k-го порядка* и станем присоединять к нему по очереди каждый из оставшихся $(n-k)$ элементов, не вошедших во взятое нами размещение. Тогда мы получим $(n-k)$ размещений $(k+1)$-го порядка.

Таким способом из каждого размещения k-го порядка можно образовать $(n-k)$ размещений $(k+1)$-го порядка.

Но число всех размещений k-го порядка по нашему предположению равно произведению

$$n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)].$$

Следовательно, из всех размещений k-го порядка можно составить указанным выше способом столько размещений $(k+1)$-го порядка, сколько единиц окажется в произведении

$$n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)]\cdot(n-k).$$

Легко понять, что изложенным способом мы получим все размещения $(k+1)$-го порядка, взятые только по одному разу. Поэтому окажется, что

$$A_n^{k+1}=n(n-1)(n-2)\dots[n-(k-1)](n-k).$$

Таким образом, из предположения, что формула (A) верна для $p=k$, мы пришли к тому, что эта формула оказалась верной и при $p=k+1$. Но поскольку формула (A) верна, как это мы видели при $p=1$, то, значит, она верна всегда, т. е. при любом натуральном значении p, меньшем или равном n.

Число множителей в правой части формулы (A) равно p. Эту формулу можно записывать и так:

$$A_n^p=n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1).$$

Примеры:

$$\begin{aligned}
A_{10}^3 &= 10\cdot9\cdot8=720;\\
A_8^5 &= 8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=6720;\\
A_n^{p+1} &= n(n-1)\dots[n-(p-1)](n-p);\\
A_n^{n-1} &= n(n-1)(n-2)\dots4\cdot3\cdot2;\\
A_n^n &= n(n-1)(n-2)\dots4\cdot3\cdot2\cdot1.
\end{aligned}$$

Из последних двух формул следует, что

$$A_n^{n-1}=A_n^n.$$

---

* Размещениями k-го порядка мы называем размещения по k элементов.

Задача. Сколькими способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Отв. $A_{10}^{3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

§ 2. ПЕРЕСТАНОВКИ

Определение. ***Перестановками из n элементов называются такие соединения, из которых каждое содержит все n элементов и которые отличаются друг от друга лишь порядком расположения элементов.*** Число перестановок из одного элемента равно единице. Число перестановок из двух элементов a, b равно двум:

$$ab;\ ba.$$

Число перестановок из трех элементов a, b, c равно шести: abc; acb; bac; bca; cab; cba.

Число перестановок из n элементов обозначается символом P_n.

Число перестановок из n элементов — это то же самое, что число размещений из n элементов по n в каждом. Поэтому

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

или

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n.$$

Число всех перестановок из n элементов равно произведению последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно. Из формулы $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n$ следует, что $P_n = P_{n-1} \cdot n$.

Примеры:

1. $P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

2. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 10 человек?

Отв. $P_{10} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3628800.$

Понятие факториала

Произведение n натуральных чисел от 1 до n обозначается сокращенно $n!$, т. е.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n = n! \qquad \text{(читается } n \text{ факториал).}$$

Например,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Выражение 5! читается: пять факториал.

$$2! = 2;\ 1! = 1.$$

Формулу числа перестановок теперь можно записать так:

$$P_n = n!$$

Умножив и разделив произведение

$$n(n-1)\ldots[n-(p-1)]$$

на $(n-p)!$, получим:

$$A_n^p = \frac{P_n}{P_{n-p}}.$$

§ 3. СОЧЕТАНИЯ

Определение. ***Сочетаниями из n элементов по p в каждом называются такие соединения, из которых каждое содержит p элементов, взятых из числа данных n элементов, и которые отличаются друг от друга по крайней мере одним элементом.***

Примеры:

Из одного элемента можно составить лишь одно сочетание.

Из двух элементов a и b можно составить два сочетания по одному элементу a, b и лишь одно сочетание по два элемента ab.

Из трех элементов a, b, c можно составить:
3 сочетания по одному элементу:

$$a;\ b;\ c;$$

3 сочетания по два элемента:

$$ab;\ ac;\ bc;$$

одно сочетание по три элемента:

$$abc.$$

Из четырех элементов a, b, c, d можно составить: 4 сочетания по одному элементу:

$$a;\ b;\ c;\ d;$$

6 сочетаний по два элемента:

$$ab;\ ac;\ ad;\ bc;\ bd;\ cd;$$

4 сочетания по три элемента:

$$abc;\ abd;\ acd;\ bcd;$$

одно сочетание по 4 элемента:

$$abcd.$$

Соединение abc и соединение cab представляют собой одно и то же сочетание. Если же взять abc и abd или bcd, то это будут различные сочетания.

Число сочетаний из n элементов по p в каждом обозначается символом C_n^p.

Вывод формулы числа сочетаний

Если в каждом сочетании из n элементов по p сделать всевозможные перестановки, то образуются всевозможные размещения из n элементов по p. Поэтому

$$C_n^p \cdot P_p = A_n^p.$$

Отсюда

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{P_p}$$

или

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots[n-(p-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\dots p}.$$

Заметим, что в выражении $n(n-1)(n-2)\dots$ каждый последующий множитель на единицу меньше предыдущего.

Так, например,

$$C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120,$$

$$C_{n+1}^{p+1} = \frac{(n+1)\,n\,(n-1)\dots(n+1-p)}{1\cdot 2\cdot 3\dots p\cdot(p+1)}.$$

Задача. Сколькими способами можно выбрать три лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов.

Отв. $C_{10}^3 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$

Другой вид формулы числа сочетаний

Умножим числитель и знаменатель правой части формулы

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots[n-(p-2)]\,[n-(p-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\dots p}$$

на произведение

$$(n-p)(n-p-1)\dots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$$

Тогда получим:

$$C_n^p = \frac{n(n-1)\dots[n-(p-1)]\,(n-p)(n-p-1)\dots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\dots p\cdot(n-p)(n-p-1)\dots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1},$$

или

$$C_n^p = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\,\dots\,(n-1)\,n}{1\cdot 2\cdot 3\,\dots\,p\cdot 1\cdot 2\cdot 3\,\dots\,(n-p)},$$

или

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!},$$

или

$$C_n^p = \frac{P_n}{P_p \cdot P_{n-p}}.$$

Например,

$$C_{10}^3 = \frac{P_{10}}{P_3 \cdot P_7}.$$

Два основных свойства числа сочетаний

Первое свойство: $C_n^p = C_n^{n-p}$.

Доказательство.

$$C_n^p = \frac{P_n}{P_p \cdot P_{n-p}} \text{ и } C_n^{n-p} = \frac{P_n}{P_{n-p} \cdot P_{n-(n-p)}} = \frac{P_n}{P_{n-p} P_p}.$$

Отсюда

$$C_n^p = C_n^{n-p},$$

что и требовалось доказать.

Пример.

$$C_{100}^{98} = C_{100}^{100-98} = C_{100}^2 = \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} = 4950.$$

Второе свойство: $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$.

Доказательство.

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n(n-1)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} + \frac{n(n-1)\dots[n-(p-1)](n-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p \cdot (p+1)} =$$

$$= \frac{n(n-1)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p}\left(1 + \frac{n-p}{p+1}\right) = \frac{n(n-1)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \times$$

$$\times \frac{n+1}{p+1} = \frac{(n+1)n(n-1)\dots[n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p(p+1)}.$$

Но последнее выражение как раз и представляет собой C_{n+1}^{p+1}. Поэтому

$$C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1},$$

что и требовалось доказать.

Если воспользоваться формулой $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, то доказательство второго свойства можно изложить так:

$$C_n^p + C_n^{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} =$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p-1)!}\left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1}\right) = \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-p)(p+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} = C_{n+1}^{p+1}.$$

Так, например,

$$C_7^2 + C_7^3 = C_8^3.$$

Символ C_n^0 не имеет смысла. Но в целях единообразной формы записи, с которой нам придется встречаться, мы примем по определению

$$C_n^0 = 1.$$

При наличии этого определения мы можем формулу

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

применять и тогда, когда $p = n$, т. е. писать

$$C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0.$$

Эта запись будет правильной, так как

$$C_n^n = 1 \quad \text{и} \quad C_n^0 = 1.$$

Аналогично этому принимают по определению

$$0! = 1,$$

хотя символ 0! сам по себе смысла не имеет.

§ 4. СОЕДИНЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Перестановки с повторениями

Пусть мы имеем 5 элементов, среди которых имеется три одинаковых элемента:

$$a, \ a, \ a, \ b, \ c.$$

Перестановками из этих 5 элементов будут такие соединения, из которых каждое содержит все эти 5 элементов и которые будут отличаться друг от друга, следовательно, лишь порядком расположения этих пяти элементов.

Отсюда понятно, что элемент a будет входить в каждое соединение три раза.

Всевозможными перестановками из этих пяти элементов будут следующие:

aaabc	*aacba*	*acaba*	*bcaaa*
aaacb	*abaac*	*acbaa*	*caaab*
aabac	*abaca*	*baaac*	*caaba*
aabca	*abcaa*	*baaca*	*cabaa*
aacab	*acaab*	*bacaa*	*cbaaa*

Эти перестановки будут перестановками с повторениями потому, что в каждое соединение один и тот же элемент a входит три раза, т. е. столько раз, сколько раз он имелся среди данных пяти элементов.

Из написанной выше таблицы видно, что число перестановок из 5 элементов

$$a,\ a,\ a,\ b,\ c,$$

т. е. перестановок с повторениями, равно 20.

Если же все 5 элементов были бы различными, то, как нам уже известно, число перестановок равнялось бы не 20, а числу 5!, т. е. 120.

Пусть мы не знаем число перестановок с повторениями из 5 элементов

$$a,\ a,\ a,\ b,\ c.$$

Обозначим это неизвестное число буквой x. Теперь вообразим, что в группе a, a, a, b, c вместо трех одинаковых элементов a, a, a мы взяли три различных элемента a_1, a_2, a_3. Тогда имеющееся число перестановок x увеличится в 3! раза *. Но при этом число всех перестановок окажется равным числу перестановок из 5 различных элементов, т. е будет равно числу 5!.

Таким образом,

$$x\cdot(3!)=5!.$$

Отсюда

$$x=\frac{5!}{3!}.$$

Формула числа перестановок с повторениями

Пусть имеется n элементов, среди которых имеется n_1 одинаковых элементов.

$$\overbrace{\underbrace{a,\ a,\ \ldots,\ a,}_{n_1\text{ одинаковых элементов}}\ b,\ c,\ \ldots,\ s,\ t}^{\text{всего } n \text{ элементов}}$$

Число перестановок с повторениями из этих n элементов обозначим буквой x.

Теперь вообразим, что в группе $a, a, \ldots, a, b, c, \ldots, s, t$ вместо n_1 одинаковых элементов $a, a, \ldots, a$ мы взяли n_1 различных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$. Тогда имеющееся число перестановок x увеличится во столько раз, сколько перестановок можно сделать из n_1 элементов, т. е. увеличится в $n_1!$ раз. Но тогда число всех перестановок окажется равным числу перестановок из n различных элементов, т. е. будет равно числу $n!$. Поэтому

$$x\cdot(n_1!)=n!.$$

* То есть во столько раз, сколько можно сделать перестановок из трех различных элементов.

Отсюда

$$x=\frac{n!}{n_1!} \text{ и т. д.}$$

Если теперь рассматривать как одинаковые еще n_2 элемента ($n_1+n_2\leqslant n$), то число различных перестановок с повторениями из таких n элементов будет

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2!}.$$

Примеры:

1. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Отв. $\frac{6!}{3!\,3!}=20$.

2. Различных перестановок букв можно сделать в слове:

замок — $5!=120$, ротор — $\frac{5!}{2!\,2!}=30$,

топор — $\frac{5!}{2!}=60$, колокол — $\frac{7!}{2!\,2!\,3!}=210$.

3. Я помню, что нужный мне телефонный адрес начинается с буквы К и содержит три «четверки» и две «пятерки». Однако расположение этих пяти цифр я позабыл. Спрашивается, сколько надо сделать проб, чтобы с гарантией связаться с нужным мне абонентом. (Предполагается, что на каждый телефонный вызов каждый вызываемый абонент будет отвечать при первом же его вызове.)

Из теории, изложенной выше, видно, что таких проб достаточно сделать

$$\frac{5!}{3!\,2!}=10.$$

Размещения с повторениями

Сначала поясним на примере, какие соединения называются размещениями с повторениями.

Пусть имеется 4 различных элемента a, b, c, d в достаточном количестве комплектов и пусть требуется составить из этих 4-х элементов размещения с повторениями по два элемента.

Поскольку здесь речь идет о размещениях по два элемента, то, значит, каждое соединение, которое мы будем составлять, должно содержать по два элемента.

Если бы мы составляли размещения без повторений, то все элементы, входящие в любое размещение, обязательно должны были бы быть различными.

Например, размещениями без повторений из 4-х элементов a, b, c, d по два элемента были бы следующие:

$$ab;\ ac;\ ad; \qquad ca;\ cb;\ cd;$$

$$ba;\ bc;\ bd; \qquad da;\ db;\ dc.$$

Размещениями же с повторениями из этих 4-х элементов по два элемента будут следующие:

$$aa;\ ab;\ ac;\ ad; \qquad ca;\ cb;\ cc;\ cd;$$

$$ba;\ bb;\ bc;\ bd; \qquad da;\ db;\ dc;\ dd.$$

Размещение с повторениями из m элементов по $p\,(p \leqslant m)$ элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до p включительно либо не содержать его вовсе.

Другими словами, каждое размещение с повторениями из m элементов по p элементов может состоять не только из p различных элементов, но из p каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Соединения, отличающиеся друг от друга хотя бы порядком расположения элементов, считаются различными размещениями.

Число размещений с повторениями из m элементов по p элементов будем обозначать символом

$$(A_m^p)_{\text{с повт.}}$$

Формула для числа размещений с повторениями

Пусть мы имеем сколько угодно комплектов m различных элементов:

1-й комплект: $a,\ b,\ c,\ \ldots,\ s,\ t;$
2-й комплект: $a,\ b,\ c,\ \ldots,\ s,\ t;$
3-й комплект: $a,\ b,\ c,\ \ldots,\ s,\ t;$
. . . .
. . . .
. . . .

Пусть теперь требуется узнать, сколько можно составить всевозможных размещений по p элементов с повторениями из различных элементов, если каждый из этих различных элементов имеется в нашем распоряжении в достаточном количестве.

Возьмем p комплектов данных m различных элементов:

1) $a,\ b,\ \ldots,\ t;$
2) $a,\ b,\ \ldots,\ t;$
. . . . . .
. . . . . .
p) $a,\ b,\ \ldots,\ t.$

Поставим на первое место какой-либо элемент 1-й строки, на второе место, независимо от этого, какой-либо элемент 2-й строки и т. д. и, наконец, на p-е место какой-либо элемент p-й строки. Соединяя каждый элемент 1-й строки с каждым элементом 2-й строки, получим m^2 соединений по два, т. е. $(A_m^2)_{\text{с повт}} = m^2$.

Присоединяя к каждому из этих m^2 соединений каждый элемент 3-й строки, получим m^3 соединений по 3 и т. д.

Присоединяя к каждому из m^{p-1} соединений по $(p-1)$ каждый элемент p-й строки, получим m^p соединений по p.

Эти m^p соединений по p как раз и будут представлять всевозможные размещения по p элементов с повторениями из m различных элементов.

Следовательно, ***число размещений по p элементов с повторениями из m различных элементов равно m^p,*** т. е. $(A_m^p)_{\text{с повт.}} = m^p$.

Примеры:

1. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 можно составить $5^3 = 125$ трехзначных чисел, если в одном и том же числе могут попадаться и одинаковые цифры.

2. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 можно составить $10^5 = 100\,000$ телефонных номеров, если в одном и том же номере могут попадаться и одинаковые цифры.

Отсюда видно, что на каждую из 10 букв — А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л — приходится телефонных номеров 100 000. Следовательно, центральная телефонная станция г. Москвы может обслуживать непосредственно не более одного миллиона абонентов.

Сочетания с повторениями

Сначала поясним на примере, какие соединения называются сочетаниями с повторениями.

Пусть имеется 5 различных элементов a, b, c, d, e в достаточном количестве комплектов и пусть требуется составить из этих 5 элементов сочетания по 3 элемента с повторениями.

Поскольку здесь речь идет о сочетаниях по три элемента, то, значит, каждое соединение, которое мы будем составлять, должно содержать по три элемента и одно от другого должно отличаться по крайней мере одним элементом.

Если бы мы составляли сочетания без повторений, то все элементы, входящие в любое сочетание, обязательно должны были бы быть различными.

Например, сочетания без повторений из 5 элементов a, b, c, d, e по три элемента были бы следующие:

$$\begin{gathered} abc;\ abd;\ abe; \\ acd;\ ace;\ ade; \\ bcd;\ bce;\ bde; \\ cde. \end{gathered}$$

Сочетания же с повторениями из этих 5 элементов по три элемента будут следующими:

aaa; *aab*; *aac*; *aad*; *aae*;	*bbb*; *bbc*; *bbd*; *bbe*;	*ccc*; *ccd*; *cce*;
abb; *abc*; *abd*; *abe*;	*bcc*; *bcd*; *bce*;	*cdd*; *cde*; *cee*;
acc; *acd*; *ace*;	*bdd*; *bde*;	*ddd*; *dde*;
add; *ade*;	*bee*;	*dee*;
aee;		*eee*.

Сочетание с повторениями из m элементов по $p\,(p \leqslant m)$ элементов может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до p включительно либо не содержать его вовсе.

Другими словами, каждое сочетание с повторениями из m элементов по p элементов может состоять не только из p различных элементов, но из p каких угодно и как угодно повторяющихся элементов.

Во всех случаях два соединения по p элементов не считаются различными сочетаниями, если они отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Число сочетаний с повторениями из m элементов по p элементов будем обозначать символом

$$(C_m^p)_{\text{с повт}}.$$

Формула числа сочетаний с повторениями

Чтобы составить всевозможные сочетания с повторениями из m различных элементов по p элементов, воспользуемся следующей таблицей:

$$\begin{array}{l} 1)\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m; \\ 2)\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m; \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p)\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m. \end{array} \tag{I}$$

Из первой строки возьмем какой-либо произвольный элемент; из второй строки возьмем элемент, расположенный либо непосредственно над взятым элементом из первой строки, либо справа от него; из третьей строки возьмем элемент, расположенный либо непосредственно над взятым элементом из второй строки, либо справа от него и т. д.

Совершив этот процесс с каждым элементом первой строки, мы получим всевозможные сочетания с повторениями из m различных элементов по p элементов.

Число всевозможных соединений, которые мы составили указанным выше способом, пользуясь таблицей (I), будет таким же, как если бы мы тем же способом стали бы составлять соединения, пользуясь следующей таблицей:

$$\begin{array}{l}
1)\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_m;\\
2)\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ \ldots,\ b_{m+1};\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
p)\ b_p,\ b_{p+1},\ \ldots,\ b_{m+p-1}.
\end{array}$$

Но эти последние соединения представляли бы собой всевозможные сочетания без повторений из $(m+p-1)$ различных элементов по p элементов.

Следовательно, число сочетаний с повторениями из m различных элементов по p элементов равно числу сочетаний без повторений из $(m+p-1)$ различных элементов по p элементов, т. е.

$$(C_m^p)_{\text{с повт.}}=C_{m+p-1}^p.$$

Примеры:

1. Найти число сочетаний с повторениями из четырех элементов a, b, c, d по 3 элемента.

Искомое число будет $C_{4+3-1}^3=C_6^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}=20$.

1) aaa;	6) abc;	11) bbb;	16) bdd;
2) aab;	7) abd;	12) bbc;	17) ccc;
3) aac;	8) acc;	13) bbd;	18) ccd;
4) aad;	9) acd;	14) bcc;	19) cdd;
5) abb;	10) abd;	15) bcd;	20) ddd.

Число же различных сочетаний из 4-х элементов a, b, c, d по 3 элемента без повторений равно $C_4^3=C_4^1=4$.

1) abc;	3) acd;
2) abd;	4) bcd.

2. Найти число неподобных между собой членов разложения

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^p,$$

получающихся после возведения в степень.

Так как

$$(x_1+x_2+\ldots+x_m)^p=(x_1+x_2+\ldots+x_m)\times$$
$$\times(x_1+x_2+\ldots+x_m)\ \ldots\ (x_1+x_2+\ldots+x_m),$$

то искомое число будет равно числу сочетаний с повторениями из m различных элементов x_1, x_2, ..., x_m по p элементов, т. е. равно

$$C_{m+p-1}^p.$$

В частности, в разложении

$$(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_m)^3$$

будет неподобных членов

$$C_{m+2}^3=\frac{(m+2)(m+1)m}{1\cdot2\cdot3}.$$

В разложении $(x_1+x_2+x_3)^3$ неподобных членов будет

$$C_{3+3-1}^3=C_5^3=C_5^2=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}=10.$$

(Последний результат проверьте непосредственным возведением в куб многочлена $x_1+x_2+x_3$.)

УПРАЖНЕНИЯ

353. Найти n, если

$$\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}+\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=242.$$

Отв. 5.

354. Решить уравнение

$$\frac{A_x^4\cdot P_{x-4}}{P_{x-2}}=42.$$

Отв. $x=7$.

355. Решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{A_x^{y-3}}{A_x^{y-2}}=\dfrac{1}{8};\\[2ex]\dfrac{C_x^{y-3}}{C_x^{y-2}}=\dfrac{5}{8}.\end{cases}$$

Отв. $\begin{cases}x=12;\\y=7.\end{cases}$

356. Сколькими различными способами можно составить разведывательную группу из 3-х солдат и одного командира, если имеется 12 солдат и 3 командира?

Отв. 660.

357. Сколькими различными способами можно разместить в 9 клетках следующие 9 букв: *а*, *а*, *а*, *б*, *б*, *б*, *в*, *в*, *в*?

Отв. 1680.

358. Надо рассадить на одной скамейке 5 мальчиков и 5 девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Отв. 28 800.

359. Надо поместить в 8 клетках 4 гласные буквы и 4 согласные так, чтобы рядом не было двух гласных или двух согласных. Сколькими способами это можно сделать?

Отв. 1152.

360. Найти число неподобных между собой членов разложения

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^4,$$

получающихся после возведения в степень.

Отв. 35.

361. На плоскости дано n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Найти число прямых, которые можно получить, соединяя точки попарно.

362. Доказать, что отношение

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\,\ldots\,k_i!}$$

есть целое число, если $k_1+k_2+\ldots+k_i\leqslant n$.

363. Сколькими различными способами можно распределить 12 различных предметов между 3 лицами так, чтобы каждый получил по 4 предмета?

364. Сколько нулей имеет на конце число 50! ?

365. Доказать тождество

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1.$$

366. Определить показатель степени, с которым входит простое число 7 в произведение натуральных чисел от 1 до 500.

367. Сколькими нулями оканчивается число 500! ?

368. В сейфе хранятся документы, над которыми работает комиссия в составе 5 членов. Сколько замков, по меньшей мере, должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена комиссии, чтобы доступ к документам был возможен только тогда, когда собираются любые три члена комиссии и не меньше?

ГЛАВА XXXVIII

БИНОМ НЬЮТОНА*

§ 1. ВЫВОД ФОРМУЛЫ БИНОМА НЬЮТОНА

Очевидно, что

$$1+x=C_1^0+C_1^1x, \text{ ведь } C_1^0=1,\ C_1^1=1.$$

$$(1+x)^2=C_2^0+C_2^1x+C_2^2x^2, \text{ ведь } C_2^0=1;\ C_2^1=2;\ C_2^2=1.$$

$$(1+x)^3=C_3^0+C_3^1x+C_3^2x^2+C_3^3x^3, \text{ ведь } C_3^0=1;\ C_3^1=3;\ C_3^2=3;\ C_3^3=1.$$

Возникает вопрос, будет ли закономерность, наблюдаемая в этих формулах, обладать общностью, т. е. будет ли справедливой формула

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^nx^n$$

при всяком натуральном значении n?

Воспользуемся методом полной индукции.

Допустим, что формула верна для произвольно взятого натурального числа p, т. е. предположим справедливым следующее равенство:

$$(1+x)^p=C_p^0+C_p^1x+C_p^2x^2+C_p^3x^3+\ldots+C_p^{p-1}x^{p-1}+C_p^px^p.$$

Умножим обе части этого предполагаемого равенства на $(1+x)$. Тогда получим:

$$(1+x)^{p+1}=\{C_p^0+C_p^1x+C_p^2x^2+C_p^3x^3+\ldots+C_p^{p-1}x^{p-1}+$$
$$+C_p^px^p\}(1+x)=C_p^0+C_p^1x+C_p^2x^2+C_p^3x^3+\ldots+C_p^{p-1}x^{p-1}+C_p^px^p+$$
$$+C_p^0x+C_p^1x^2+C_p^2x^3+\ldots+C_p^{p-2}x^{p-1}+C_p^{p-1}x^p+C_p^px^{p+1},$$

т. е.

$$(1+x)^{p+1}=C_p^0+(C_p^0+C_p^1)x+(C_p^1+C_p^2)x^2+(C_p^2+C_p^3)x^3+$$
$$+\ldots+(C_p^{p-2}+C_p^{p-1})x^{p-1}+(C_p^{p-1}+C_p^p)x^p+C_p^px^{p+1}.$$

---

* См. «Краткие исторические сведения».

Пользуясь формулой

$$C_p^{k-1} + C_p^k = C_{p+1}^k$$

и приняв во внимание, что

$$C_p^0 = C_{p+1}^0 \text{ и } C_p^p = C_{p+1}^{p+1},$$

получим окончательно:

$$(1+x)^{p+1} = C_{p+1}^0 + C_{p+1}^1 x + C_{p+1}^2 x^2 + C_{p+1}^3 x^3 + \\ + \ldots + C_{p+1}^p x^p + C_{p+1}^{p+1} x^{p+1}.$$

Из предположения, что формула верна при $n=p$, мы пришли к тому, что формула оказалась верной и при $n=p+1$. Но поскольку, кроме того, формула верна при $n=1$, то она должна быть верна и при любом натуральном значении n.

Теперь легко получить разложение и для $(a+b)^n$.

Действительно,

$$(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n = a^n\left[C_n^0 + C_n^1\frac{b}{a} + C_n^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots + C_n^n\left(\frac{b}{a}\right)^n\right],$$

или

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Последняя формула и называется формулой бинома Ньютона. Ее правая часть называется разложением степени бинома.

Числа C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^k, ..., C_n^n называются **биномиальными коэффициентами**.

§ 2. СВОЙСТВА РАЗЛОЖЕНИЯ БИНОМА

В разложении бинома содержится членов на один больше, чем показатель степени бинома.

Все члены разложения имеют относительно букв a и b одно и то же измерение, равное показателю степени бинома. (Измерением одночлена относительно букв a и b называется сумма показателей степеней этих букв, входящих в этот одночлен.)

Поскольку все члены разложения имеют одинаковое измерение относительно букв a и b, то это разложение является однородным многочленом относительно букв a и b (см. стр. 428).

В разложении показатель степени буквы a последовательно понижается на единицу, начиная с показателя n, а показатель степени буквы b последовательно повышается на единицу, начиная с показателя, равного нулю.

Член разложения $C_n^k a^{n-k} b^k$ является $(k+1)$-м членом разложения и обозначается символом T_{k+1}.

Формула

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

называется формулой общего члена разложения, так как, давая букве k целые значения от 0 до n, мы можем получить из нее любой член разложения.

Теперь напишем разложение для выражения $(a-b)^n$.

$$(a-b)^n=[a+(-b)]^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}(-b)+C_n^2a^{n-2}(-b)^2+\\+\ldots+C_n^ka^{n-k}(-b)^k+\ldots+C_n^n(-b)^n=\\=C_n^0a^n-C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2-\ldots+(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+\\+(-1)^nC_n^nb^n.$$

Здесь

$$T_{k+1}=(-1)^kC_n^ka^{n-k}b^k.$$

§ 3. СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1. ***Биномиальные коэффициенты, равноудаленные от начала и конца разложения, равны между собой.*** Действительно, по первому свойству числа сочетаний имеем:

$$C_n^0=C_n^n;\ C_n^1=C_n^{n-1};\ C_2^n=C_n^{n-2};\ \ldots;\ C_n^k=C_n^{n-k}.$$

2. ***Сумма биномиальных коэффициентов равна числу 2, возведенному в степень, равную показателю степени бинома.***

Доказательство. Положим, в формуле бинома

$$a=b=1.$$

Тогда получим:

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n,$$

или

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^k+\ldots+C_n^n=2^n.$$

3. ***Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.***

Доказательство. Полагая в тождестве

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+C_n^3a^{n-3}b^3+C_n^4a^{n-4}b^4+\\+\ldots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n$$

$$a=1 \text{ и } b=-1,$$

получим:

$$0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+C_n^4-C_n^5+C_n^6-C_n^7+\ldots+\\+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^nC_n^n.$$

Перенеся все отрицательные члены в левую часть, получим:

$$C_n^1+C_n^3+C_n^5+\ldots+C_n^{2l+1}=C_n^0+C_n^2+C_n^4+\ldots+C_n^{2l},$$

что и требовалось доказать.

Если вместо биномиальных коэффициентов C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^k, ..., C_n^n подставить их значения, то формула бинома Ньютона примет вид:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+$$
$$+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k+\ldots+b^n.$$

Формулу бинома Ньютона принято записывать ради краткости в следующем символическом виде:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k,$$

или

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}a^{n-k}b^k.$$

Читателю может показаться непонятным, почему столь элементарная формула

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3+\ldots+b^n,$$

где n — целое положительное число, носит имя великого ученого Ньютона, тем более что эта формула была известна до Ньютона. Например, ее знал Аль-Каши (XV век) и она встречается в трудах Паскаля. Объясняется это тем, что именно Ньютоном была обобщена эта формула для любого действительного показателя.

Ньютон впервые показал, что выражение

$$(1+x)^\alpha,$$

где $|x|<1$ и α — любое действительное число, равняется сумме следующего сходящегося ряда:

$$1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(k-1)]}{k!}x^k+\ldots$$

Например, если $|x|<1$, то

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\ldots;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\ldots$$

§ 4. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК, ИЛИ ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

Написанная ниже таблица

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1 \\
\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots
\end{array}
$$

называется треугольником Паскаля *.

По боковым сторонам этой таблицы стоят единицы, внутри же стоят числа, получающиеся сложением двух соответствующих чисел предыдущей строки. Например, число 21 в 8-й строке получается сложением стоящих над ним чисел 6 и 15.

$(n+1)$-я строка этой таблицы дает биномиальные коэффициенты разложения n-й степени бинома. Например:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + \\ + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

и так далее.

Треугольник Паскаля получается из следующей таблицы:

$$
\begin{array}{ccccccc}
&&&C_0^0&&& \\
&&C_1^0&&C_2^1&& \\
&C_2^0&&C_2^1&&C_2^2& \\
C_3^0&&C_3^1&&C_3^2&&C_3^3 \\
\cdots&&\cdots&&\cdots&&\cdots
\end{array}
$$

в силу того, что

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

(см. стр. 653).

Треугольник Паскаля приведен в книге Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике», изданной после его смерти в 1665 году.

---

* См. «Краткие исторические сведения».

§ 5. ПРИМЕРЫ НА БИНОМ НЬЮТОНА

1. В разложении $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{x^4}\right)^n$ коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго члена. Найти свободный член, т. е. член разложения, не зависящий от x (членом, не зависящим от x, будет тот, который содержит x в нулевой степени).

Решение.

$$C_n^2=C_n^1+44. \quad \text{Отсюда } n=11.$$

$$T_{k+1}=C_{11}^k(x\sqrt{x})^{11-k}\left(\frac{1}{x^4}\right)^k=C_{11}^k x^{\frac{3}{2}(11-k)-4k}.$$

Приравняв показатель степени буквы x к нулю, получим:

$$\frac{3}{2}(11-k)-4k=0. \quad \text{Отсюда } k=3.$$

Искомым свободным членом будет четвертый, и он будет равен $C_{11}^3x^0$, т. е. 165.

2. Сколько рациональных членов содержится в разложении

$$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}?$$

Решение.

$$T_{k+1}=C_{100}^k(\sqrt{2})^{100-k}\cdot(\sqrt[4]{3})^k.$$

Для рациональности члена разложения необходимо, чтобы число k было кратно четырем. Но тогда $100-k$ будет числом четным и T_{k+1} будет числом рациональным.

Число k может принимать целые значения 0, 1, 2, ..., 100. Среди этих чисел кратными четырем будут

$$0;\ 4;\ 8;\ 12;\ \ldots;\ 96;\ 100.$$

Пользуясь формулой $l=a+d(k-1)$, получим: $100=0+4\times\times(n-1)$, или $n=26$. Следовательно, в разложении $(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3})^{100}$ рациональных членов будет 26.

3. Доказать, что значение выражения

$$4^n+15n-1,$$

где n — натуральное число, делится на 9.

Доказательство.

$$4^n+15n-1=(1+3)^n+15n-1=1+C_n^1\cdot 3+C_n^2\cdot 3^2+\ldots+$$
$$+C_n^n3^n+15n-1=15n+n\cdot 3+C_n^2 3^2+\ldots+C_n^n3^n=$$
$$=18n+C_n^2 3^2+\ldots+C_n^n 3^n.$$

Каждое слагаемое последней суммы делится на 9, следовательно, и вся эта сумма, т. е. значение выражения $4^n+15n-1$, делится на 9, что и требовалось доказать.

УПРАЖНЕНИЯ

369. Найти номер того члена разложения

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21},$$

который содержит a и b в одинаковых степенях. Отв. 10.

370. Найти тот член разложения

$$\left(\sqrt{\frac{x}{\sqrt{39}}}-\sqrt[3]{\frac{13}{x^2}}\right)^{m},$$

который не зависит от x, если сумма биномиальных коэффициентов равна 128.

Отв. $-11\frac{2}{3}$.

371. Отношение коэффициента пятого члена к коэффициенту третьего члена разложения

$$(\sqrt[3]{a-1}+\sqrt{a+1})^m$$

равно 2,5. Найти третий член разложения.

Отв. $28(a+1)(a-1)^2$.

372. Доказать тождество

$$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+4C_n^3+\ldots+(n+1)C_n^n=(n+2)\,2^{n-1},$$

где C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^n — биномиальные коэффициенты.

373. Доказать, что сумма квадратов биномиальных коэффициентов разложения $(a+b)^n$ равна C_{2n}^n, т. е. доказать тождество

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

374. Доказать, что многочлен

$$x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1,$$

где n — целое число, большее единицы, делится на $(x-1)^3$.

ГЛАВА XXXIX

НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Наблюдаемые нами явления (события) можно подразделить на следующие виды: достоверные, невозможные и случайные.

Достоверным называют событие, которое при определенных условиях обязательно произойдет. Например, событие «вода в сосуде находится в жидком состоянии» достоверно при условии, что атмосферное давление нормальное и температура воды равна 20°.

Невозможным называют событие, которое при определенных условиях заведомо не произойдет. Например, событие «вода в сосуде находится в твердом состоянии» при условиях предыдущего примера — невозможное.

Случайным называют событие, которое при определенных условиях может или произойти или не произойти. Например, если брошена монета, то она может упасть так, что сверху будет либо герб, либо надпись.

Теория вероятностей изучает массовые однородные случайные события, т. е. такие, которые могут многократно наблюдаться при одних и тех же условиях. Теория вероятностей изучает также случайные величины и случайные функции.

В настоящей главе мы рассмотрим лишь начальные сведения о случайных событиях и случайных величинах.

Современная теория вероятностей представляет собой обширную математическую науку. Она имеет многочисленные применения в промышленности, сельском хозяйстве, строительстве, военном деле и экономике.

Теорией вероятностей пользуются при техническом контроле пригодности массовых изделий фабрик и заводов, при сооружении и реконструкции телефонных сетей, при организации страхового дела, в теории стрельбы и многих других областях народного хозяйства.

§ 1. ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

Чтобы сделать изложение доступным, рассмотрим несколько простых примеров.

Пусть в урне лежит 23 белых и 2 черных шара. Наудачу вынимается один шар. Разумеется, что этот шар может оказаться либо белым, либо черным. Но правдоподобнее, что он окажется белым. В самом деле, из 25 равновозможных случаев 23 случая благоприятствуют появлению белого шара и лишь 2 случая благоприятствуют появлению черного шара. Поэтому в данном случае говорят, что вероятность появления белого шара равна $\frac{23}{25}$, а черного $\frac{2}{25}$.

Игральная кость представляет собой однородный кубик, на гранях которого обозначены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 по одному на каждой грани. При бросании такой кости равновозможно выпадение любого из этих шести очков. При этом все эти шесть случаев (или исходов) являются единственно возможными и несовместными. Поэтому мы и здесь скажем, что вероятность выпадения, например, грани с 5-ю очками равна $\frac{1}{6}$.

Пусть имеется две игральные кости. Мы будем их различать, считая одну из них первой, а другую второй: можно вообразить, что на костях поставлены номера (№ 1 и № 2) или что кости различаются по цвету.

Тогда при одновременном бросании этих двух костей на каждой кости может выпасть любое число очков от 1 до 6, и все 36 различных возможных случаев могут быть выписаны в виде таблицы:

(1; 1),	(1; 2),	(1; 3),	(1; 4),	(1; 5),	(1; 6),
(2; 1),	(2; 2),	(2; 3),	(2; 4),	(2; 5),	(2; 6),
(3; 1),	(3; 2),	(3; 3),	(3; 4),	(3; 5),	(3; 6),
(4; 1),	(4; 2),	(4; 3),	(4; 4),	(4; 5),	(4; 6),
(5; 1),	(5; 2),	(5; 3),	(5; 4),	(5; 5),	(5; 6),
(6; 1),	(6; 2),	(6; 3),	(6; 4),	(6; 5),	(6; 6).

Здесь, например, случай (2; 5) означает, что на первой кости выпало число очков 2, а на второй 5.

Эти 36 случаев (исходов) единственно возможны, равновозможны и несовместны.

Поэтому мы скажем, что вероятность появления события, например, (2; 5) равна $\frac{1}{36}$. Вероятность появления события (5; 2) также равна $\frac{1}{36}$.

Также $\frac{1}{36}$ равна вероятность появления любого другого из этих 36 событий.

Теперь посмотрим, какова вероятность того, что при бросании двух костей сумма выпавших очков окажется равной 6.

Среди всех 36 случаев, которые могут оказаться при одновременном бросании двух костей, имеется только пять случаев (исходов), благоприятствующих появлению суммы 6. Поэтому мы скажем, что вероятность появления суммы очков, равной 6, равна $\frac{5}{36}$.

Вероятности появления каждой из всех возможных сумм очков приведены в следующей таблице:

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность выпадения	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Рассмотренные примеры делают естественным следующее определение понятия вероятности:

Если некоторое событие A имеет место при m случаях (исходах) из общего числа n равновозможных, единственно возможных и несовместных случаев, то вероятностью этого события называется отношение $\frac{m}{n}$.

(Это определение понятия вероятности называется классическим.)

Если $0 < m < n$, то вероятность P события A является числом, удовлетворяющим неравенствам $0 < P < 1$.

Если $m = 0$, т. е. нет ни одного случая, благоприятствующего появлению события A, то вероятность P этого события будет равна нулю.

Если же $m = n$, т. е. все случаи благоприятствуют появлению события A, то вероятность P этого события будет равна 1.

Если иметь в виду классическое определение понятия вероятности, то будут справедливыми и следующие утверждения:

1) Если событие невозможно, то вероятность его появления равна нулю.

2) Если появление события абсолютно достоверно, то его вероятность равна 1.

3) Если же некоторое событие возможно, но его появление не абсолютно достоверно, то вероятностью его появления будет число, заключенное между 0 и 1.

Вынуть белый шар из урны, в которой находятся черные шары, — событие невозможное; вынуть же черный шар из той же урны — событие достоверное. Вероятность первого из этих двух событий равна нулю, а вероятность второго равна 1.

УПРАЖНЕНИЯ

375. Какова вероятность того, что вынутая из колоды карта окажется трефовой масти? (В колоде 52 карты, а карт трефовой масти 13.)

376. Какова вероятность того, что вынутая из колоды карта будет черной масти? (В колоде две черные масти: пиковая и трефовая. Число карт каждой масти в колоде равно 13.)

377. Какова вероятность, что при бросании монеты выпадет герб?

378. В урне m белых и n черных шаров. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар окажется белым?

379. Двое знакомых приобрели независимо друг от друга билеты на один и тот же поезд. Какова вероятность того, что их места окажутся в одном и том же вагоне, если в поезде 12 пассажирских вагонов?

380. В урне находится 3 белых и 4 черных шара. Какова вероятность того, что вынутые из нее наудачу два шара окажутся белыми?

381. В урне имеется 5 белых и 20 черных шаров. Какова вероятность того, что вынутые из нее наудачу два шара окажутся белыми?

382. Подбросили три монеты. Какова вероятность того, что все монеты упадут надписью вверх?

383. Подбросили три монеты. Какова вероятность того, что только две из них упадут гербом вверх?

384. Вычислить вероятность того, что при бросании трех игральных костей получится сумма очков 7?

385. В урне лежат два шара: белый и черный. Вынимают из нее наудачу один шар и подбрасывают монету. Какова вероятность того, что либо вынутый шар будет белым, либо монета упадет гербом вверх?

386. В урне m белых и n черных шаров. Какова вероятность того, что вынутые наудачу два шара окажутся белыми?

387. В урне 2 белых, 3 красных и 16 черных шаров. Какова вероятность того, что из вынутых из нее наудачу двух шаров один окажется белым, а другой красным?

388. В урне l белых, m красных и n черных шаров. Какова вероятность того, что из вынутых из нее двух шаров один окажется белым, а другой красным?

389. В лотерее имеется 4 выигрышных билета и 96 пустых. Какова вероятность того, что из купленных наудачу двух билетов хотя бы один окажется выигрышным?

§ 2. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ

Два события называют *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании (опыте). Например, «выпадение герба» и «выпадение надписи» при бросании монеты — несовместные события.

Суммой $A+B$ двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A или события B или обоих вместе. В частности, если события A и B несовместные, то $A+B$ — событие, состоящее в появлении одного из этих событий, безразлично какого.

Аналогично определяется сумма нескольких событий.

Пусть события A и B несовместные. Обозначим вероятность появления события A через $P(A)$ и вероятность появления события B через $P(B)$. Как найти вероятность $P(A+B)$ того, что наступит либо событие A, либо событие B? Ответ на этот вопрос дает теорема сложения.

Теорема сложения. ***Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:***

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Введем обозначения:

n — общее число возможных исходов испытания,

m_1 — число исходов, благоприятствующих событию A,

m_2 — число исходов, благоприятствующих событию B.

Предполагается, что исходы равновозможны, единственно возможны и несовместны.

Так как события A и B несовместны, то число исходов, благоприятствующих наступлению либо события A, либо события B, равно m_1+m_2.

Следовательно,

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B).$$

С помощью метода математической индукции можно доказать справедливость теоремы сложения для любого числа попарно несовместных событий, т. е. можно доказать справедливость равенства:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

Пример. Вероятность извлечь из колоды карт туза равна $\frac{4}{52}$; вероятность извлечь короля также равна $\frac{4}{52}$. Следовательно, вероятность извлечь или туза или короля равна $\frac{4}{52}+\frac{4}{52}$, т. е. $\frac{8}{52}$.

УПРАЖНЕНИЯ

390. Мишень состоит из трех концентрических кругов, образующих три зоны: круг (I) и два кольца (II и III) (рис. 197). Стрелок целится в зону I. Вероятность того, что попадание будет в зонах I, II и III, равна соответственно 0,45; 0,30; 0,15. Какова вероятность того, что пуля попадет в мишень?

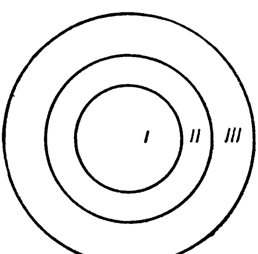


Рис. 197.

391. В данном пункте имеют остановку трамваи шести маршрутов № 7, 12, 16, 24, 31, 49. Пассажир ждет трамвай либо № 12, либо № 16. Какова вероятность того, что первым подойдет к остановке трамвай нужного пассажиру маршрута?

392. Подбросили две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма выпавших очков окажется больше пяти?

Следствие из теоремы сложения. *Если события A_1, A_2, ..., A_n единственно возможны и любые два из них несовместны, то сумма их вероятностей равна единице.*

В самом деле, раз данные события попарно несовместны, то по теореме сложения

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n). \qquad (1)$$

Так как далее наши события единственно возможны, то событие, заключающееся в том, что произойдет либо A_1, либо A_2 ... ... либо A_n, достоверно, а поэтому вероятность его равна единице.

Значит, левая, а следовательно, и правая часть равенства (1) равна единице.

Следствие доказано.

Взаимно противоположные события. *Два события называются взаимно противоположными, если они несовместны и единственно возможны.*

Например, при бросании монеты двумя взаимно противоположными событиями будут появление герба и появление надписи.

Если одно из взаимно противоположных событий обозначено через A, то другое обычно обозначают через $\bar{A}$.

Так как события A и $\bar{A}$ несовместны и единственно возможны, то по предыдущему следствию

$$P(A)+P(A)=1.$$

Значит, чтобы найти вероятность какого-либо данного события, достаточно вычесть из единицы вероятность события, противоположного данному.

Применять это правило полезно, когда вероятность данного события вычислить трудно, а вероятность события, противоположного данному, вычислить легко.

Пример. Вероятности попасть одним выстрелом в зоны I, II и III (см. задачу 390, рис. 197) равны соответственно 0,45; 0,30 и 0,15. Какова вероятность того, что выстрел не поразит мишень?

События «выстрел поразил мишень» и «выстрел не поразил мишень» взаимно противоположны.

Поэтому вероятность того, что выстрел не поразит мишень, равна единице минус вероятность того, что выстрел поразит мишень. Но последняя вероятность равна $\frac{9}{10}$ (см. задачу 390).

Следовательно, вероятность того, что выстрел не поразит мишень, равна $1-\frac{9}{10}$, т. е. равна $\frac{1}{10}$.

УПРАЖНЕНИЯ

393. Подбросили три монеты. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них упадет гербом вверх?

394. В лотерее 4 выигрышных билета и 96 пустых. Какова вероятность, что на 10 купленных билетов выпадет хотя бы один выигрыш?

§ 3. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Два события называют независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Например, появление герба при бросании монеты не зависит от появления или непоявления того или иного числа очков при бросании игральной кости.

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении (совмещении) этих событий. Например, если в ящике содержатся детали, изготовленные заводами № 1 и № 2, и A — появление стандартной детали, B — деталь изготовлена заводом № 1, то AB — появление стандартной детали завода № 1.

Пусть события A и B независимые, причем вероятности этих событий $P(A)$ и $P(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения событий A и B? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения.

Теорема умножения вероятностей независимых событий. ***Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:***

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Поясним содержание этой теоремы.

Пусть мы бросили монету и игральную кость. Какова вероятность того, что монета упадет гербом вверх и вместе с тем на кости выпадет пятерка. Все возможные исходы такого бросания можно записать в виде следующей таблицы:

Г; 1,	Г; 2,	Г; 3,	Г; 4,	Г; 5,	Г; 6	(Г — герб),
Н; 1,	Н; 2,	Н; 3,	Н; 4,	Н; 5,	Н; 6	(Н — надпись).

Число всех равновозможных и несовместных случаев равно $2 \cdot 6 = 12$. Следовательно, вероятность совмещения двух событий «появление герба» и «появление 5 очков» равна $\frac{1}{12}$, т. е. равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$. Но $\frac{1}{2}$ есть вероятность появления герба и $\frac{1}{6}$ есть вероятность появления на кости пяти очков. Таким образом, вероятность совмещения этих двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

Теорема умножения вероятностей распространяется на случай числа событий, большего двух.

Пример. Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадает 10 раз?

Выпадение герба или надписи при каждом бросании не зависит от результатов предыдущих бросаний. Поэтому здесь идет речь о совмещении 10 независимых событий.

Вероятность появления герба при однократном бросании монеты равна $\frac{1}{2}$. Поэтому искомая вероятность равна

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}, \text{ т. е. равна } \frac{1}{1024}.$$

Здесь вероятность получилась очень маленькая. Это означает, что почти невозможно ожидать, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз.

УПРАЖНЕНИЯ

395. Работают три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует остановки по техническим причинам, равна 0,85 для первого станка, для второго 0,90 и для третьего 0,95. Найти вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребуется останавливать.

396. Вероятность сбить самолет противника выстрелом из винтовки равна 0,004. Найти вероятность уничтожения неприятельского самолета при одновременной стрельбе из 250 винтовок.

397. Вероятность попасть в цель при стрельбе равна 0,8. Какова вероятность того, что из 5 выстрелов будет хотя бы один промах?

398. Вынимают 100 раз карту из колоды и каждый раз возвращают ее обратно. Какова вероятность того, что ни разу не появится червонный валет?

399. Вынимают 100 раз карту из колоды и каждый раз возвращают ее обратно. Какова вероятность того, что червонный валет появится хотя бы один раз?

§ 4. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ

Два события называют зависимыми, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого. Поясним это определение на примере.

Пусть в урне содержится 3 белых и 10 черных шаров. Пусть из урны наудачу извлечен один шар, а затем извлечен другой шар. Обозначим через A событие: «при первом извлечении появился белый шар». Обозначим через B событие: «при втором извлечении появился белый шар». Если событие A произошло, то в урне из 12 оставшихся шаров есть 2 белых шара и, следовательно, $P(B)=\frac{2}{12}$; если событие A не произошло (т. е. при первом извлечении появился черный шар), то $P(B)=\frac{3}{12}$. Таким образом, вероятность события B зависит от появления или непоявления события A. Из этого примера становится ясным, что целесообразно ввести специальное обозначение для вероятности события B, если она вычислена при условии, что событие A уже произошло.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Пусть события A и B зависимые, причем вероятности $P(A)$ и $P_A(B)$ известны. Как найти вероятность совмещения этих событий? Ответ на этот вопрос дает теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\boldsymbol{P(AB)=P(A)\cdot P_A(B).}$$

Эта теорема распространяется и на случай числа зависимых событий, большего двух. Например, для трех зависимых событий $P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot A_{AB}(C)$.

Здесь символ $P_{AB}(C)$ означает вероятность события C, вычисленную в предположении, что события A и B уже произошли.

УПРАЖНЕНИЯ

400. Какова вероятность вытащить короля из колоды карт два раза подряд, если после первого извлечения карты ее не возвращают обратно?

401. Какова вероятность вытащить короля из колоды карт два раза подряд, если после первого извлечения ее возвращают обратно?

402. Вероятность того, что взятое наугад изделие фабрики является пригодным, равна $\frac{92}{100}$; вероятность того, что взятое наугад годное изделие является изделием первого сорта, равна

$\frac{72}{100}$. Какова вероятность того, что взятое наугад изделие фабрики является изделием первого сорта?

403. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Вынимают последовательно два шара, не возвращая их обратно. Какова вероятность того, что первый шар будет белым, а второй черным?

404. На пяти карточках написаны буквы *а, г, и, к, н*. Вынимают наудачу одну карточку за другой и кладут в том порядке, в каком карточки были вынуты. Какова вероятность того, что получится слово «книга»?

405. На семи карточках написаны буквы *к, к, л, л, о, о, о*. Вынимают наудачу одну карточку за другой и кладут в том порядке, в каком карточки были вынуты. Какова вероятность того, что получится слово «колокол»?

§ 5. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОВТОРЕНИЯ СОБЫТИЯ

Пусть в результате некоторого опыта может произойти или не произойти событие A. Опыт должен быть произведен n раз. Известно, что в каждом опыте вероятность появления события A равна P $(0<P<1)$. При этих условиях поставим задачу вычислить вероятность того, что в n опытах событие A произойдет ровно m раз.

Условимся выписывать по порядку символы A и $\bar{A}$, смотря по тому, появляется или не появляется событие A в ряде последовательных опытов. Например, комбинация

$$A\ A\ \bar{A}\ A\ \bar{A}$$

обозначает, что было произведено 5 опытов, причем событие A появилось в первом, втором и четвертом опытах и не появилось в третьем и пятом.

Условимся называть «благоприятными» те комбинации, в которых символ A входит m раз, а символ $\bar{A}$ входит $n-m$ раз. Вычислим сначала вероятность того, что в результате n произведенных опытов получится одна из благоприятных комбинаций.

Для определенности рассмотрим ту благоприятную комбинацию, при которой событие A сначала происходит m раз подряд, потом $n-m$ раз не происходит, т. е. комбинацию

$$\underbrace{AA\ \ldots\ A}_{m \text{ раз}}\ \underbrace{\bar{A}\bar{A}\ \ldots\ \bar{A}}_{n-m \text{ раз}}.$$

Вероятность появления этой комбинации равна

$$\underbrace{P\cdot P\ \ldots\ P}_{m \text{ раз}}\cdot\underbrace{(1-P)(1-P)\ \ldots\ (1-P)}_{n-m \text{ раз}}=P^m(1-P)^{n-m},$$

как вероятность совмещения n независимых событий (события A и $\bar{A}$ противоположные; поэтому вероятность события A равна $1 - P$).

По такой же причине вероятность любой из подобных благоприятных комбинаций также равна $P^m (1 - P)^{n-m}$.

Итак, любая благоприятная комбинация имеет вероятность

$$P^m (1 - P)^{n-m}.$$

Чтобы вычислить вероятность появления какой бы то ни было благоприятной комбинации, достаточно, по теореме сложения, сложить вероятности всех благоприятных комбинаций. Но так как каждая из этих благоприятных комбинаций имеет одну и ту же вероятность, равную $P^m (1 - P)^{n-m}$, то достаточно умножить эту вероятность на число всех благоприятных комбинаций. Число же всех благоприятных комбинаций равно числу сочетаний из n элементов по m.

Следовательно, *вероятность того, что при n опытах событие A появится ровно m раз, равна* $C_n^m P^m (1 - P)^m$.

Если эту вероятность обозначить символом $P_n(m)$, получим формулу

$$\boldsymbol{P_n(m) = C_n^m P^m (1 - P)^m}.$$

Эту формулу называют ф о р м у л о й Б е р н у л л и.

П р и м е р 1. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что шестерка появится нуль раз (т. е. не появится ни разу), 1 раз, 2 раза и т. д., 10 раз?

Так как вероятность появления шестерки в каждом опыте равна $\frac{1}{6}$, то

$$P_{10}(0) = C_{10}^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10},$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9},$$

$$P_{10}(2) = C_{10}^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8},$$

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{7},$$

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6},$$

$$P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5},$$

$$P_{10}(6) = C_{10}^6 \left(\frac{1}{6}\right)^6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{4},$$

$$P_{10}(7) = C_{10}^7 \left(\frac{1}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{3},$$

$$P_{10}(8) = C_{10}^8 \left(\frac{1}{6}\right)^8 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{2},$$

$$P_{10}(9) = C_{10}^9 \left(\frac{1}{6}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{1},$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{0}.$$

П р и м е р 2. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что герб появится нуль раз (т. е. не появится ни разу), 1 раз, 2 раза и т. д., 10 раз?

Так как вероятность появления герба в каждом опыте равна $\frac{1}{2}$, то

$$P_{10}(0) = C_{10}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024},$$

$$P_{10}(1) = C_{10}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{9} = \frac{10}{1024},$$

$$P_{10}(2) = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024},$$

$$P_{10}(3) = C_{10}^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{120}{1024},$$

$$P_{10}(4) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{210}{1024},$$

$$\boxed{P_{10}(5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{252}{1024}},$$

$$P_{10}(6) = C_{10}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{210}{1024},$$

$$P_{10}(7) = C_{10}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{120}{1024},$$

$$P_{10}(8) = C_{10}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{45}{1024},$$

$$P_{10}(9) = C_{10}^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10}{1024},$$

$$P_{10}(10) = C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

Из полученных результатов видно, что наибольшую вероятность имеет число появлений герба, равное 5.

Таким образом, при десятикратном бросании монеты наиболее вероятно ожидать, что герб выпадет 5 раз.

Пусть мы бросили монету 1000 раз. При этом герб может выпасть нуль раз, т. е. ни одного раза, может выпасть 1 раз, или 2 раза, или 3 раза и т. д., или 1000 раз. Но вероятности каждого из этих возможных случаев различны. Вычисления показали бы, что наибольшую вероятность появления герба будет иметь число появлений, равное 500.

Допустим, что мы выполнили в действительности тысячекратное бросание монеты, и допустим, что при этом герб появился 479 раз. Тогда условились говорить, что *статистическая вероятность* появления герба при 1000-кратном бросании монеты оказалась равной $\frac{479}{1000}$.

Если бы при нашем опыте герб появился 507 раз, то мы сказали бы, что статистическая вероятность оказалась равной $\frac{507}{1000}$.

Вероятность же появления герба при одном бросании в отличие от статистической называют *математической вероятностью*. Различие между статистической и математической вероятностями состоит в том, что первую вычисляют после опыта, а вторую — до опыта.

Статистическую вероятность называют также *относительной частотой*.

Теперь мы можем сформулировать знаменитую теорему Бернулли.

Теорема Бернулли. ***С вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом числе опытов статистическая вероятность наблюдаемого события как угодно мало отличается от его математической вероятности.***

Теорема Бернулли была доказана в начале XVIII века; она представляет один из важнейших законов теории вероятностей.

Для иллюстрации теоремы Бернулли приведем результаты нескольких серий опытов бросания монеты:

Число бросаний	Число появлений герба	Статистическая вероятность, или относительная частота
4040	2048	0,5063
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Из этой таблицы видно, что статистическая вероятность оказалась тем более близкой к числу 0,5 (т. е. к вероятности появления герба при одном испытании), чем больше испытаний было сделано.

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В определении вероятности, которое изложено выше (это определение называют классическим), прёдполагают, что число возможных исходов испытания конечно. Однако часто это требование не выполняется, и, следовательно, в таких случаях классическое определение вероятности неприменимо. Например, пусть на плоскости имеется фигура G, внутри которой содержится другая фигура g. Представим себе, что на фигуру G наудачу брошена точка. Как определить вероятность того, что брошенная точка попадет в фигуру g? Естественно считать, что вероятность попадания точки в фигуру g пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от расположения и формы этой фигуры. Отсюда следует, что целесообразно принять следующее определение: ***вероятность попадания в фигуру g, брошенной наудачу в фигуру G точки, равна отношению площади фигуры g к площади фигуры G:***

$$P=\frac{\text{пл. } g}{\text{пл. } G}.$$

Например, если в «большом круге» радиуса R содержится «малый круг» радиуса r, то вероятность того, что точка, брошенная наудачу в «большой круг», попадет в «малый круг», равна:

$$P=\frac{\text{«пл. малого круга»}}{\text{«пл. большого круга»}}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{r^2}{R^2}.$$

Аналогично можно определить вероятность попадания точки на отрезок длиной l, который составляет часть отрезка длиной L:

$$P=\frac{l}{L}.$$

На первый взгляд может показаться, что приведенные здесь определения вероятности вряд ли полезны. В действительности же это не так. Многие задачи, в том числе и выдвигаемые практикой, в конечном счете сводятся к отысканию вероятности попадания точки в некоторую фигуру. В качестве первого примера рассмотрим задачу, предложенную известным французским естествоиспытателем Бюффоном в 1777 г.

Задача Бюффона. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длиной $2l$ ($l<a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

Введем обозначения:

x — угол, составленный иглой с параллелью,

y — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели (рис. 198).

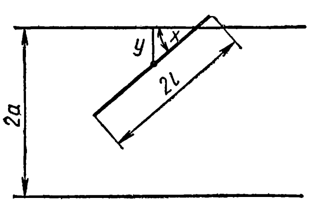


Рис. 198.

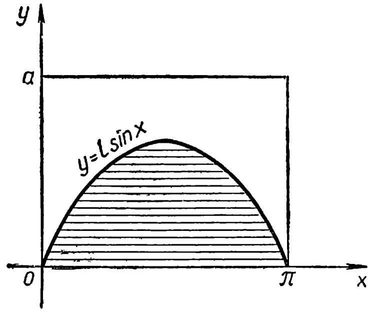


Рис. 199.

Заданием определенных значений x и y положение иглы определяется полностью, причем x может принимать значения от 0 до π; y может принимать значения от 0 до a.

Поскольку любой парой значений x и y, удовлетворяющих неравенствам

$$0\leqslant x\leqslant\pi \quad \text{и} \quad 0\leqslant y\leqslant a, \tag{1}$$

определяется положение иглы, то этой же парой значений определяется и положение середины иглы.

Но если положение середины иглы определяется парой значений x и y, удовлетворяющих неравенствам (1), то это означает, что середина иглы может попасть в любую из точек фигуры прямоугольника со сторонами π и a (рис. 199).

Площадь фигуры G равна πa. При этих положениях середины иглы игла может пересекать и может не пересекать ближайшую параллель.

Найдем теперь такую фигуру g, каждая точка которой может служить серединой такого положения иглы, при котором игла пересекает ближайшую к ней параллель.

Как видно из рисунка 198, игла пересечет ближайшую к ней параллель при условии

$$y \leqslant l \sin x,$$

т. е. игла пересечет параллель, если середина хорды попадет в любую из точек заштрихованной на рисунке 199 фигуры. Эта заштрихованная фигура и есть интересующая нас фигура g, причем площадь фигуры g равна $2l$ (вычисление этой площади требует использования понятия интеграла, которое в этой книге изложено только в главе XLII. Там показано, что площадь фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = l \sin x$ и осью X_1X, т. е. площадь фигуры g, равна $2l$ (см. стр. 746, пример 8).

Искомая вероятность того, что игла пересечет прямую, равна:

$$P = \frac{\text{пл. } g}{\text{пл. } G} = \frac{2l}{\pi a}.$$

Полученная формула оказывается полезной при решении многих задач. В качестве примера покажем, как, пользуясь этой формулой, можно приближенно вычислить число π.

Из формулы $P = \frac{2l}{\pi a}$ следует, что

$$\pi = \frac{2l}{Pa}.$$

Пусть игла брошена n раз и пересекла прямую m раз. В силу теоремы Бернулли (см. стр. 682), при достаточно большом числе бросаний иглы n, практически достоверно, что статистическая вероятность $\frac{m}{n}$ как угодно мало отличается от вероятности P. Заменив P через $\frac{m}{n}$, получим:

$$\pi = \frac{2ln}{ma}.$$

При помощи этой формулы Бюффон вычислил приближенно число π. Цюрихский астроном Вольф бросил иглу 5000 раз, причем игла пересекла ближайшую параллель 2532 раза. Длина иглы в опытах Вольфа была равна 36 *мм*, а ширина между параллельными прямыми 45 *мм*. Подставив $2l = 36$, $n = 5000$, $m = 2532$, $a = \frac{45}{2} = 22{,}5$ в формулу $\pi = \frac{2ln}{ma}$, Вольф получил:

$$\pi = \frac{36 \cdot 5000}{22{,}5 \cdot 2532} \approx 3{,}159.$$

З а д а ч а о т р е у г о л ь н и к е. На отрезке OA длиной l числовой оси OX поставлены наудачу две точки $B(x)$ и $C(y)$ (координата точки C обозначена через y для удобства дальнейшего изложения). Найти вероятность того, что из трех получившихся отрезков можно построить треугольник.

Для того чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, каждый из отрезков должен быть меньше суммы двух других. Так как сумма всех трех отрезков равна l, то каждый из отрезков должен быть меньше $\frac{l}{2}$. Действительно, если допустить, что одна из сторон будет больше или равна $\frac{l}{2}$, то периметр треугольника окажется больше, чем l.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат XOY. Координаты любых двух точек B и C должны удовлетворять неравенствам:

$$0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant y \leqslant l.$$

Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OlDl$ (рис. 200). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать в качестве фигуры G, координаты точек которой представляют все возможные значения координат точек B и C.

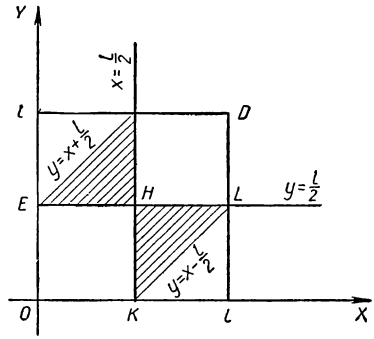


Рис. 200.

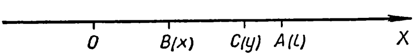


Рис. 201.

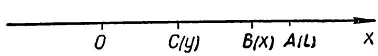


Рис. 202.

Пусть точка C расположена правее точки B (рис. 201). Как указано выше, длины отрезков OB, BC, CA должны быть меньше $\frac{l}{2}$, т. е. должны иметь место неравенства:

$$x < \frac{l}{2}, \quad y - x < \frac{l}{2}, \quad l - y < \frac{l}{2},$$

или, что то же:

$$x < \frac{l}{2}, \quad y < x + \frac{l}{2}, \quad y > \frac{l}{2}. \tag{1}$$

Пусть точка C расположена левее точки B (рис. 202). Тогда должны иметь место неравенства:

$$y < \frac{l}{2}, \quad x - y < \frac{l}{2}, \quad l - x < \frac{l}{2},$$

или, что то же:

$$y<\frac{l}{2},\quad y>x-\frac{l}{2},\quad x>\frac{l}{2}. \tag{2}$$

Как видно из рисунка 200, неравенства (1) выполняются для координат точек треугольника EFH, а неравенства (2) — для точек треугольника KHL.

Таким образом, заштрихованные треугольники можно рассматривать в качестве фигуры g, координаты точек которой являются благоприятствующими интересующему нас событию (из трех отрезков можно построить треугольник).

Искомая вероятность равна:

$$P=\frac{\text{пл. } g}{\text{пл. } G}=\frac{\frac{l^2}{8}+\frac{l^2}{8}}{l^2}=\frac{1}{4}.$$

З а д а ч а о в с т р е ч е. В заключение рассмотрим еще одну задачу, которую принято называть «задачей о встрече».

З а д а ч а о в с т р е ч е. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение $\frac{1}{4}$ часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выберет момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

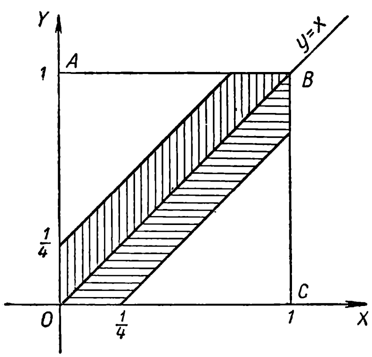


Рис. 203

Обозначим моменты прихода первого и второго студентов соответственно через x и y. В силу условия студенты должны явиться в условленное место на протяжении одного часа, т. е. должны выполняться неравенства:

$$0\leqslant x\leqslant 1,$$
$$0\leqslant y\leqslant 1.$$

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат XOY. В этой системе указанным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, принадлежащей квадрату $OABC$ (рис. 203). Таким образом, этот квадрат можно рассматривать в качестве фигуры G, координаты точек которой x и y представляют все возможные моменты прихода студентов.

Встреча состоится, если

$$y-x<\frac{1}{4} \text{ при } y>x$$

и

$$x-y<\frac{1}{4} \text{ при } x>y,$$

или, что то же:

$$y<x+\frac{1}{4} \text{ при } y>x \tag{1}$$

и

$$y>x-\frac{1}{4} \text{ при } y<x. \tag{2}$$

Неравенства (1) выполняются для тех точек фигуры G, которые лежат выше прямой $y=x$ и ниже прямой $y=x+\frac{1}{4}$; неравенства (2) имеют место для точек, расположенных ниже прямой $y=x$ и выше прямой $y=x-\frac{1}{4}$.

Как видно из рисунка 203, все точки, координаты которых удовлетворяют неравенствам (1) и (2), принадлежат заштрихованному шестиугольнику. Таким образом, этот шестиугольник можно рассматривать в качестве фигуры g, координаты точек которой благоприятствуют встрече.

Очевидно, площадь фигуры G (квадрата со стороной 1) равна 1. Площадь фигуры g (заштрихованного шестиугольника) равна $\frac{7}{16}$ $\left(\text{из площади квадрата следует вычесть сумму площадей двух прямоугольных треугольников с катетами, равными } 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\right)$.

Искомая вероятность того, что встреча состоится, равна:

$$P=\frac{\text{пл. } g}{\text{пл. } G}=\frac{\frac{7}{16}}{1}=\frac{7}{16}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

406. На отрезке AB длиной L помещен меньший отрезок CD длиной l. Найти вероятность того, что точка, наудачу взятая на отрезке AB, попадет также и на отрезок CD. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

407. В круге радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

408. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

409. На плоскости нанесена сетка квадратов со стороной a. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < \frac{a}{2}$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки на плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

410. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 6 *см*. На плоскость наудачу брошен круг радиуса 1 *см*. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

411. На плоскости начерчены две концентрические окружности радиусов 5 *см* и 10 *см*. Найти вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в некоторую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

412. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг: а) квадрата, б) правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.

413. Быстро вращающийся диск разделен на четное число равных секторов, попеременно окрашенных в белый и черный цвет. В диск произведен выстрел. Найти вероятность того, что пуля попадет в один из белых секторов. Предполагается, что вероятность попадания точки в фигуру пропорциональна площади этой фигуры.

414. В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равновозможно в любой момент промежутка времени T. Сигнализатор срабатывает, если разность между моментами поступления сигналов меньше t $(t < T)$. Найти вероятность того, что сигнализатор сработает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Указание. Использовать метод решения задачи о встрече.

415. На отрезке OA длиной l числовой оси OX поставлены две точки $B(x)$ и $C(y)$. Найти вероятность того, что длина отрезка BC окажется меньше $\frac{l}{2}$.

Указание. Используйте тот же метод, что и в предыдущей задаче.

§ 7. ПОНЯТИЕ О СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

Теорема Бернулли, о которой шла речь в параграфе 5, принадлежит к группе теорем, которые носят общее название — «закона больших чисел». Эта теорема представляет собой частный случай более общей теоремы, доказанной великим русским математиком П. Л. Чебышевым. Понимание теоремы Чебышева требует предварительного знакомства с понятием случайной величины.

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены. Например, число очков, которые появятся при бросании игральной кости, — случайная величина; возможные значения этой величины таковы: 1, 2, 3, 4, 5 и 6. В этом примере возможные значения случайной величины представляют собой отдельные изолированные числа. Такую случайную величину называют дискретной (прерывной). Если же возможные значения случайной величины сплошь заполняют некоторый промежуток, то такую случайную величину называют непрерывной. Например, расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, — непрерывная случайная величина. (Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле из орудия, зависит не только от установки прицела, но и от многих других причин, которые не могут быть полностью учтены.)

Как уже было указано, нельзя заранее предсказать, какое из возможных значений примет случайная величина в результате испытания. Казалось бы, что поскольку о каждой случайной величине мы располагаем в этом смысле весьма скромными сведениями, то вряд ли можно установить закономерности поведения и среднего арифметического случайных величин. На самом деле это не так. Оказывается, что при некоторых сравнительно широких условиях поведение среднего арифметического достаточно большого числа случайных величин утрачивает случайный характер и становится закономерным. Эти условия и указаны в теореме Чебышева. Для практики очень важно знать эти условия, так как это дает возможность предвидеть ход явлений; при их выполнении можно уверенно предсказать, какое значение в результате испытания примет среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин. Этим объясняется, почему теорема Чебышева широко применяется при решении практических задач.

На теореме Чебышева и ряде других теорем основан широко применяемый в статистике выборочный метод, сущность которого состоит в том, что по сравнительно небольшой случайной выборке (ее называют выборочной совокупностью) судят о всей совокупности исследуемых объектов (ее называют генеральной совокупностью). Например, о качестве кипы хлопка судят по небольшому пучку хлопка, состоящего из волокон, наудачу отобранных из разных мест кипы. О влажности большого количества зерна заключают по влажности небольшой пробы зерна. Заметим, что число волокон или число зерен пробы должно быть достаточно велико (по отношению же к общему числу волокон или зерен оно, конечно, весьма мало).

Современная теория вероятностей является обширной математической наукой, продолжающей необычайно быстро развиваться в очень многих различных направлениях. Вместе с этим также быстро продолжают расширяться и углубляться и ее приложения в жизни.

Читателю, желающему продолжить изучение вопросов теории вероятностей, можно порекомендовать на первых порах книги:

1. Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин. Элементарное введение в теорию вероятностей. М., Физматгиз, 1961.

2. В. Е. Гмурман. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. М., Изд-во «Высшая школа», 1966.

ГЛАВА XL

ЧИСЛО e И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЧИСЛА e

Рассмотрим выражение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

в котором n — натуральное число.

Изучение этого выражения необходимо для решения очень многих крайне важных задач.

Если мы станем натуральное число n неограниченно увеличивать, то величина выражения

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

станет величиной переменной. Эта переменная не стремится к единице, как это может показаться на первый взгляд. Действительно, мы сейчас убедимся в том, что при возрастании натурального числа n значение выражения

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

будет монотонно* возрастать, начиная со значения, равного двум. Например,

при $n=1$ получим 2

при $n=2$ » 2,25

при $n=3$ » $2\frac{10}{27}\approx 2{,}37$

при $n=4$ » $2\frac{113}{256}\approx 2{,}44$

и т. д.

Чтобы доказать, что переменная

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

---

* Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ называется возрастающей, если $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$; неубывающей, если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots$; убывающей, если $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$; невозрастающей, если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots$. Все такие последовательности называются монотонными.

монотонно возрастает при возрастании n, применим формулу бинома Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = C_n^0 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot\frac{1}{n^2} + C_n^3\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + C_n^k\frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^{n-1}\cdot\frac{1}{n^{n-1}} + C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Перепишем эту формулу в следующем виде:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-2)]}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n^{n-1}} +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}\cdot\frac{1}{n^n},$$

или так:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{\frac{n(n-1)}{n^2}}{2!} + \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}{3!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{n^k}}{k!} + \ldots \tag{A}$$
$$\ldots + \frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-2)]}{n^{n-1}}}{(n-1)!} +$$
$$+ \frac{\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n^n}}{n!},$$

наконец, так:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} +$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{4!} + \ldots +$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} + \ldots \tag{B}$$
$$\ldots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)}{(n-1)!} +$$
$$+ \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}.$$

Все слагаемые в правой части этого равенства положительны.

При возрастании числа n правая часть этого равенства будет монотонно возрастать, так как будет возрастать число слагаемых и каждое слагаемое, начиная со второго.

Значит, доказано, что переменная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет монотонно возрастать при возрастании числа n.

Теперь докажем, что, несмотря на то что переменная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, тем не менее она будет оставаться всегда меньшей, чем число 2,75.

Из формулы (B) видно, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ldots n}.$$

Тем более будет верным неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3}+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 3^{n-3}},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-3}}\right].$$

К сумме, написанной в квадратных скобках, применим формулу суммы членов конечной геометрической прогрессии. Тогда получим:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^{n-3}}\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}},$$

или

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^{n-3}}\right),$$

и тем более будет верным неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{4}=2,75.$$

Кроме этого, из формулы (A) видно, что всегда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2.$$

Теперь перейдем к самому важному выводу.

Мы доказали, что переменная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает при возрастании n и при этом всегда остается меньше, чем 2,75.

По признаку Вейерштрасса (см. стр. 389) эта переменная имеет предел. Этим пределом будет определенное число, большее двух и не большее 2,75. Это число является иррациональным и обозначается, как это принято во всей математической литературе, буквой e. Значит, $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Иррациональность числа e доказывается в курсах высшей математики.

Число e выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Первые цифры этой дроби идут в таком порядке:

$$e=2{,}718281828459045\ \ldots.$$

Напомним, что логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются символом $\ln N$, так что $\log_e N=\ln N$.

§ 2. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛА e

Исходя из полученного равенства

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

можно доказать, что

$$\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}=e,$$

где γ — любая бесконечно малая величина, могущая принимать и положительные и отрицательные значения.

Последнее равенство можно сформулировать так:

Степень, основанием которой служит единица плюс бесконечно малое слагаемое γ, а показателем величина, обратная этому слагаемому, стремится к числу e, как к своему пределу (доказательство опускается).

Обратим внимание на то, что основание этой степени стремится к единице, но, несмотря на это, сама степень не стремится к единице.

Рассмотрим пределы степеней, в которых основанием служит единица плюс бесконечно малое слагаемое, а показатель есть величина бесконечно большая.

Примеры.

1. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n$.

Решение. Полагая $\frac{b}{n}=\gamma$, получим $n=\frac{b}{\gamma}$. При $n\to\infty$ $\gamma\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n=\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{\frac{b}{\gamma}}=$$

$$=\lim_{\gamma\to 0}\left[(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^b=\left[\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^b=e^b.$$

2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

Полагая $-\frac{1}{n}=\gamma$, получим $n=-\frac{1}{\gamma}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{-\frac{1}{\gamma}}=\lim_{\gamma\to 0}\frac{1}{(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}=\frac{1}{\lim\limits_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}}=\frac{1}{e}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

Полагая $\frac{1}{x^2}=\gamma$, получим $x=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}=$$

$$=\lim_{\gamma\to 0}\left[(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\gamma\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}=\left[\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\lim\sqrt{\gamma}}=e^0=1.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(\sin a\neq 0)$.

Представим $\frac{\sin x}{\sin a}$ в виде суммы, у которой первое слагаемое было бы единицей, а второе — величиной бесконечно малой. Это легко сделать.

Действительно,

$$\frac{\sin x}{\sin a}=1+\left(\frac{\sin x}{\sin a}-1\right).$$

Здесь первое слагаемое есть единица, а второе, стоящее в скобках, есть величина бесконечно малая при $x\to a$.

Таким образом, получим:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}}.$$

В квадратных скобках мы имеем степень, основанием которой является единица плюс бесконечно малое слагаемое, а показатель степени есть величина, обратная этому бесконечно малому слагаемому. Предел такой степени, как мы знаем, равен числу e.

Теперь найдем предел показателя степени, в который возводится выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\cdot\sin a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{(x-a)\cdot\sin a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x+a}{2}}{\sin a}\right)=1\cdot\frac{\cos a}{\sin a}=\operatorname{ctg} a.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=e^{\operatorname{ctg} a}.$$

Задачи.

1. Пусть банк принял вклад в a руб. и обязался присоединять процентные деньги к вкладу через каждую $\frac{1}{n}$ часть года из расчета p годовых процентов. Спрашивается, в какую сумму обратится первоначальный вклад через t лет?

Одну n-ю часть года назовем установленным промежутком времени. Тогда один год будет содержать n, а t лет nt таких промежутков.

К концу первого промежутка времени вклад обратится в $a\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)$ руб.

Действительно, за первый промежуток времени процентные деньги, подлежащие присоединению к вкладу, будут равны $\frac{ap}{100n}$. Следовательно, вклад окажется равным $a+\frac{ap}{100\,n}$, т. е.

$$a\left(1+\frac{p}{100\,n}\right) \text{ руб.}$$

Обратим внимание на то, что для получения возросшей суммы за один промежуток времени достаточно вклад, имевшийся в начале промежутка, умножить на $\left(1+\frac{p}{100\,n}\right)$. Этот множитель называется множителем процентного наращения за промежуток времени, равный $\frac{1}{n}$ части года.

Значит, чтобы получить возросшую сумму к концу второго промежутка времени, достаточно вклад, образовавшийся к началу второго промежутка времени, умножить на множитель процентного наращения и т. д.

Таким образом,

к концу 2-го промежутка времени

вклад обратится в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^2$ руб.;

к концу 3-го промежутка времени

вклад обратится в $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^3$ руб.;

. . . .

к концу n-го промежутка времени $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^n$ руб.;

. . . .

к концу nt-го промежутка времени ... $a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$ руб.

Итак, первоначальный вклад в a руб. обратится через t лет в

$$a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt} \text{ руб.}$$

Теперь вообразим, что $n \to \infty$, т. е. что рост вклада происходит, как выражаются, органически. Тогда вклад в a руб. обратится через t лет в сумму A, определяемую равенством

$$A=\lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}.$$

Полагая $\frac{p}{100n}=\gamma$, найдем, что $n=\frac{p}{100\gamma}$.
Отсюда

$$A=\lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}=\lim_{\gamma\to 0} a(1+\gamma)^{\frac{p}{100\gamma}t}=$$
$$=\lim_{\gamma\to 0} a\left[(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\frac{pt}{100}}=ae^{\frac{pt}{100}}.$$

Итак, для органического роста вклада получилась следующая формула:

$$A=ae^{\frac{pt}{100}}.$$

Например, при $a=1$, $p=5$ и $t=100$

$$A=e^5\approx 2{,}7^5\approx 143,$$

т. е. один рубль превращается через 100 лет приблизительно в 143 руб., если органический рост происходит по 5 годовых процентов.

2. Лесная делянка содержит в данный момент a *куб. м* древесины. Сколько окажется на этой делянке древесины через t лет, если органический рост древесины происходит по p годовых процентов.

Отв. $ae^{\frac{pt}{100}}$ *куб. м.*

3. Численность населения города увеличивается ежегодно на $p^0/_0$ (по отношению к началу года). Через сколько лет численность населения удвоится?

Отв. $\dfrac{\lg 2}{\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)}$

§ 3. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА $e^{bi}=\cos b+i\sin b$

В заключение этой главы приведем еще одно важное соотношение, найденное гениальным Эйлером*, устанавливающее связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией.

Было доказано, что

$$e^b=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n \qquad \text{(см. стр. 694),}$$

где b — любое действительное число.

Обобщая этот результат, примем по определению, что

$$e^{bi}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{bi}{n}\right)^n,$$

где b — любое действительное число, а i — мнимая единица. Теперь вычислим предел правой части последнего равенства.

Комплексное число $1+\frac{bi}{n}$ представим в тригонометрической форме. Как известно (см. стр. 558—559),

$$\left|1+\frac{bi}{n}\right|=\sqrt{1+\frac{b^2}{n^2}} \text{ и } \arg\left(1+\frac{bi}{n}\right)=\operatorname{arctg}\frac{b}{n}.$$

Поэтому

$$\left(1+\frac{bi}{n}\right)^n=\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{n^2}}\right)^n\left(\cos\operatorname{arctg}\frac{b}{n}+i\sin\operatorname{arctg}\frac{b}{n}\right)^n.$$

Пользуясь формулой Муавра, найдем, что

$$\left(1+\frac{bi}{n}\right)^n=\left(\sqrt{1+\frac{b^2}{n^2}}\right)^n\left(\cos n\operatorname{arctg}\frac{b}{n}+i\sin n\operatorname{arctg}\frac{b}{n}\right).$$

Теперь имеем:

$$e^{bi}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left[\cos\left(n\operatorname{arctg}\frac{b}{n}\right)+i\sin\left(n\operatorname{arctg}\frac{b}{n}\right)\right].$$

Вычислим каждый из пределов, входящих в правую часть последней формулы. Обозначив $\frac{b^2}{n^2}=\gamma$, получим, что $n=\frac{|b|}{\sqrt{\gamma}}$ и что

* См. «Краткие исторические сведения».

при $n \to \infty$ будет $\gamma \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{\gamma\to 0}(1+\gamma)^{\frac{|b|}{2\sqrt{\gamma}}}=\lim_{\gamma\to 0}\left[(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}\right]^{\frac{\gamma\cdot|b|}{2\sqrt{\gamma}}}=e^0=1.$$

Далее, обозначим $\frac{b}{n}=x$; тогда $n=\frac{b}{x}$ и при $n\to\infty$ будет $x\to 0$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\operatorname{arctg}\frac{b}{n}\right)=\lim_{x\to 0}\left(b\cdot\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)=b\cdot 1=b \text{ (см. стр. 398).}$$

Теперь имеем:

$$e^{bi}=\cos b+i\sin b.$$

Эта формула и носит название формулы Эйлера.

§ 4. СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

1. Полагая в формуле Эйлера вместо b число 2π, получим, что $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi$ или $e^{2\pi i}=1$, т. е. установим связь между действительными числами e и π и мнимой единицей i.

2. Полагая в формуле Эйлера вместо b число $-b$, получим, что $e^{-bi}=\cos b-i\sin b$.

Из системы

$$\begin{cases}\cos b+i\sin b=e^{bi},\\ \cos b-i\sin b=e^{-bi}\end{cases}$$

находим, что

$$\cos b=\frac{e^{bi}+e^{-bi}}{2};\qquad \sin b=\frac{e^{bi}-e^{-bi}}{2i}.$$

3. Пользуясь формулой Эйлера, можно представить любое комплексное число еще в одной новой форме.

Действительно, обозначим модуль комплексного числа $x+iy$ буквой r, а главное значение аргумента буквой φ, получим:

$$x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Но по формуле Эйлера

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{\varphi i}.$$

Поэтому получим:

$$x+iy=re^{\varphi i}.$$

Выражение $re^{\varphi i}$ называется **показательной формой** комплексного числа.

Справедливой будет и следующая запись:

$$x+iy=re^{(2k\pi+\varphi)i}.$$

В самом деле,

$$e^{(2k\pi+\varphi)i}=e^{2k\pi i}\cdot e^{\varphi i}=1\cdot e^{\varphi i}=e^{\varphi i}.$$

4. Исходя из формулы Эйлера, мы можем находить тригонометрические функции от комплексного числа*.

Действительно, обобщая формулу $\cos b = \frac{e^{bi}+e^{-bi}}{2}$, примем по определению, что

$$\cos(x+iy) = \frac{e^{(x+iy)i}+e^{-(x+iy)i}}{2}.$$

Полагая в последней формуле, например, $x=0$ и $y=1$, получим:

$$\cos i = \frac{e^{-1}+e}{2},$$

т. е. получим, что косинус мнимой единицы представляет собой действительное число.

5. Опираясь на формулу Эйлера, можно показать, что логарифм любого действительного или мнимого числа имеет в области комплексных чисел бесконечное множество различных значений. Представим комплексное число $x+iy$ в показательной форме $re^{(2k\pi+\varphi)i}$.

Тогда получим:

$$\ln(x+iy) = \ln re^{(2k\pi+\varphi)i} = \ln r + (2k\pi+\varphi)i,$$

где k — любое целое число.

Под выражением $\ln r$ здесь понимается лишь действительное значение логарифма положительного числа r, которое легко вычисляется по таблицам логарифмов.

Примеры.

1. Модуль числа -1 равен 1, а главное значение аргумента равно π. Поэтому

$$\ln(-1) = \ln 1 + (2k\pi+\pi)i = (2k+1)\pi i.$$

2. Модуль числа 1 есть 1, а главное значение аргумента 0. Поэтому

$$\ln 1 = \ln 1 + (2k\pi+0)i = 2k\pi i.$$

Под выражением $\ln 1$, написанным в левой части последнего равенства, подразумеваются все возможные комплексные значения логарифма единицы.

Под таким же выражением $\ln 1$, написанным в правой части, подразумевается лишь одно действительное значение логарифма единицы, т. е. нуль.

---

* Мы остановились здесь на тригонометрических функциях комплексных и чисто мнимых чисел лишь в общеобразовательных целях. Мы хотим, чтобы читатель хорошо понял тот факт, что в области комплексных чисел выполнимы все математические действия без исключения. Читателю известно, что столь благополучного положения не существует в области действительных чисел, где выполнимы не все математические действия.

Числа e и π являются мировыми постоянными (константы * природы).

С помощью этих чисел выражаются многие законы, по которым происходят процессы в природе. Числа e и π, как мы уже видели, играют необычайно важную роль как в математике, так и в ее разнообразных приложениях.

УПРАЖНЕНИЯ

416. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. Отв. $\sqrt{e}$.

417. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$. Отв. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

418. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$. Отв. $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

419. Найти в области комплексных чисел:

а) $\ln 10$. Отв. $\ln 10+2k\pi i$.

б) $\ln(-10)$. Отв. $\ln 10+(2k+1)\pi i$.

в) $\ln i$. Отв. $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)i$.

г) $\ln(-i)$. Отв. $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)i$.

д) $\ln(1+i)$. Отв. $\frac{1}{2}\ln 2+\left(2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)i$.

420. Доказать, что $\sqrt[n]{n}$, где n — натуральное число, имеет наибольшее значение при $n=3$.

421. Парадокс. С одной стороны, $\log_e(i^4)=\log_e 1=0$, так как $i^4=1$. С другой стороны, $\log_e(i^4)=4\log_e i$. Отсюда следует, что $4\log_e i=0$.

Но $4\neq 0$ и $\log_e i\neq 0$.

Получилось, что произведение двух чисел 4 и $\log_e i$, отличных от нуля, оказалось равным нулю.

Объясните, где ошибка в наших рассуждениях.

---

* Константа происходит от латинского слова constans, что обозначает «постоянный, неизменный».

ГЛАВА XLI

ПРОИЗВОДНАЯ, ЕЕ ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕНЕНИЯ И ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

§ 1. ПРОИЗВОДНАЯ

Возьмем какую-нибудь функцию, например x^2 (x^2 есть функция аргумента x, так как каждому значению x соответствует определенное значение выражения x^2).

Дадим аргументу x некоторое произвольное приращение h (положительное или отрицательное). Тогда вместо выражения x^2 появится выражение $(x+h)^2$.

Выражение $(x+h)^2$ называется н а р а щ е н н ы м з н а ч е н и е м ф у н к ц и и x^2.

Разность же $(x+h)^2-x^2$ называется п р и р а щ е н и е м ф у н к ц и и x^2.

Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента, т. е. дробь

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}. \tag{A}$$

Величина этой дроби зависит и от величины x, и от величины h. Например, при $x=2$ и $h=0,1$ значение дроби равно 4,1; при $x=3$ и $h=0,01$ величина этой дроби равна 6,01 и т. д.

Если теперь мы станем приближать величину h неограниченно к нулю, то числитель и знаменатель дроби (A) станут одновременно приближаться неограниченно также к нулю. При этом величина самой дроби будет как-то изменяться.

Характер этого изменения трудно обнаружить, если ограничиться рассмотрением отношения (A) лишь в том виде, как оно написано.

Если же сделаем следующие преобразования

$$\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=2x+h,$$

то увидим, что при $h \to 0$ выражение $2x+h$, а следовательно, и дробь $\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ неограниченно приближаются к выражению $2x$.

Таким образом,

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=2x.$$

Выражение $2x$ представляет собой новую функцию, которая получилась из исходной функции x^2 с помощью определенного процесса. Этот процесс заключался в вычислении предела отношения приращения функции x^2 к приращению аргумента x при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Полученная с помощью такого процесса функция $2x$ называется производной от функции x^2.

Процесс нахождения производной является новым математическим действием. Это действие обозначается поставленным над данной функцией знаком штрих (′).

Например, чтобы указать, что $2x$ есть производная функции x^2, пишут так:

$$(x^2)'=2x.$$

Производной от данной функции называется предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Примеры.

1. Найти производную функции $\sqrt{x}$.

Решение.

$$(\sqrt{x})'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\,(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Значит,

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Найти производную функции $\frac{1}{x}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx\,(x+h)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\,(x+h)}=-\frac{1}{x^2}.$$

Значит, $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$.

3. Найти производную функции x^n, где n — целое положительное число.

Решение.

$$(x^n)' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}.$$

Значит, $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Примем к сведению без доказательства, что формула $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ верна при любом действительном значении α и при $x > 0$. Например,

$$(x^{-5})' = -5x^{-6}; \qquad (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}.$$

4. Найти производную функции $\ln x$.

Решение.

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\ln \frac{x+h}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Примечание. $\lim\limits_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$, так как $\frac{h}{x}$ есть величина бесконечно малая, а $\frac{x}{h}$ есть величина, обратная этой бесконечно малой.

5. Найти производную функции $\sin x$.

Решение.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Значит, $(\sin x)' = \cos x$.

(То, что $\lim\limits_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$ равен $\cos x$, мы здесь доказывать не стали.)

Подобным же образом можно вывести производные и других функций. Не останавливаясь на этих выводах, приведем таблицу производных основных функций.

Таблица производных

1. $(x^a)' = ax^{a-1}$; $\left[(x^3)' = 3x^2\right]$; $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

$(x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$; $(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$;

$(x)' = 1 \cdot x^0 = 1]$;

2. $(a^x)' = a^x \ln a$; $[(2^x)' = 2^x \ln 2]$; $(e^x)' = e^x$;

3. $(\lg_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$; $\left[(\lg_{10} x)' = \frac{1}{x \ln 10}\right]$;

4. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

5. $(\sin x)' = \cos x$;

6. $(\cos x)' = -\sin x$;

7. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;

12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Заметим, что производными обратных тригонометрических функций служат функции алгебраические, а производными тригонометрических функций — функции тригонометрические.

Производная от какой угодно функции $y = f(x)$ обозначается y' или $f'(x)$.

Следовательно,

$$y' = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Здесь h есть приращение аргумента x, а разность $f(x+h) - f(x)$ есть соответствующее приращение функции $f(x)$.

Если $y = F(x)$, то $y' = F'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$; если же $y = \varphi(x)$, то $y' = \varphi'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$ и т. д.

Операция нахождения производной от функции $f(x)$ называется дифференцированием этой функции.

Если h произвольным образом стремится к нулю и если при этом отношение

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

стремится к конечному пределу, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ дифференцируема.

В противном случае функция $f(x)$ называется не дифференцируемой в точке $x=x_0$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке промежутка (a, b), то говорят, что она дифференцируема на промежутке (a, b).

Если $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\infty$,

то говорят, что производная функции $f(x)$ в точке $x=x_0$ обращается в бесконечность.

Если функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ не дифференцируема и не обращается в бесконечность, то говорят, что функция $f(x)$ в точке $x=x_0$ не имеет производную.

Находить всякий раз производную путем вычисления предела не очень удобно.

Мы увидим ниже, что, пользуясь таблицей производных и общими правилами дифференцирования, можно составлять производные очень просто.

§ 2. ОБЩИЕ ПРАВИЛА СОСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

1. ***Производная суммы* равна сумме производных.***

Доказательство.

$$[\varphi(x)+\psi(x)-\omega(x)]'=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{[\varphi(x+h)+\psi(x+h)-\omega(x+h)]-[\varphi(x)+\psi(x)-\omega(x)]}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}-\frac{\omega(x+h)-\omega(x)}{h}\right]=$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\lim_{n\to 0}\frac{\psi(x+h)-\psi(x)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\omega(x+h)-\omega(x)}{h}=$$
$$=\varphi'(x)+\psi'(x)-\omega'(x).$$

Пример.

$$(x^2+\sqrt{x}+\sin x)'=(x^2)'+(\sqrt{x})'+(\sin x)'=2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\cos x.$$

2. ***Постоянный множитель можно выносить за знак производной.***

Доказательство.

$$[A\cdot f(x)]'=\lim_{h\to 0}\frac{Af(x+h)-Af(x)}{h}=$$
$$A\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=Af'(x).$$

* Имеется в виду алгебраическая сумма.

Примеры:

$$(19x^3)' = 19 \cdot (x^3)' = 19 \cdot 3x^2 = 57x^2.$$
$$(5 \sin x)' = 5 \cdot (\sin x)' = 5 \cos x.$$

3. ***Производная произведения двух функций равна первой функции, умноженной на производную второй, плюс вторая функция, умноженная на производную первой.***

Доказательство.

$$[f(x) \cdot \varphi(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x+h) + f(x)\varphi(x+h) - f(x)\varphi(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \varphi(x+h) + \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} f(x) =$$
$$= f'(x)\varphi(x) + \varphi'(x) f(x).$$

Пример.

$$(x^2 \cdot \sin x)' = x^2 \cdot (\sin x)' + (\sin x) \cdot (x^2)' = x^2 \cos x + (\sin x) \cdot 2x =$$
$$= x^2 \cos x + 2x \sin x.$$

4. ***Производная дроби равна произведению знаменателя на производную числителя, минус произведение числителя на производную знаменателя, все разделенное на квадрат знаменателя.***

Доказательство.

$$\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]' = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h)}{\varphi(x+h)} - \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\varphi(x) - \varphi(x+h) f(x)}{h\varphi(x+h)\varphi(x)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)\varphi(x) - f(x)\varphi(x) + f(x)\varphi(x) - \varphi(x+h) f(x)}{h\varphi(x+h)\varphi(x)} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}\varphi(x) - \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} f(x)}{\varphi(x+h)\varphi(x)} =$$
$$= \frac{f'(x)\varphi(x) - \varphi'(x) f(x)}{[\varphi(x)]^2}.$$

Примеры:

1. $$\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)' = \frac{x^2 \cdot (\sin x)' - (x^2)' \sin x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4}; \quad (x \neq 0).$$

2. $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. $$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} =$$
$$= \frac{(-\sin x)\sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. ***Производная постоянной величины равна нулю.***

Постоянную величину всегда можно рассматривать как функцию любого аргумента, но лишь такую, которая сохраняет одно и то же значение при любых значениях аргумента. Например, функция $y = 17\frac{1}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$ сохраняет неизменное значение $17\frac{1}{2}$ при всех значениях аргумента x. (Те значения аргумента x, при которых $\operatorname{tg} x$ или $\operatorname{ctg} x$ обращаются в бесконечность, здесь исключаются.)

Пользуясь уже известными нам правилами, найдем производную от этой функции:

$$y' = \left(17\frac{1}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x\right)' = 17\frac{1}{2} (\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x)' =$$
$$= 17\frac{1}{2} [\operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{ctg} x)' + \operatorname{ctg} x \cdot (\operatorname{tg} x)'] =$$
$$= 17\frac{1}{2} \left(\operatorname{tg} x \frac{-1}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$
$$= 17\frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\sin x \cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 17\frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Итак, производная от функции $y = 17\frac{1}{2} \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$, сохраняющей неизменное значение, равна нулю.

Функция, сохраняющая неизменное значение, является постоянной величиной. Поэтому для краткости употребляется термин «производная постоянной величины».

Тот факт, что производная постоянной величины равна нулю, легко доказать в общем виде. Действительно, если функция сохраняет неизменное значение при всех значениях аргумента, то ее приращение всегда будет равно нулю. Но

$$\frac{0}{h} = 0. \text{ Поэтому и } \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

6. ***Производная аргумента.***

Если $y = x$, то $y' = 1$.

Действительно,

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{k \to 0} 1 = 1.$$

Для краткости принято . говорить, что ***производная от аргумента равна 1.*** Записывается это так:

$$(x)' = 1.$$

П р и м е р ы:

$$(3x^2+x)'=6x+1; \quad (5)'=0; \quad (\sqrt{3})'=0;$$

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)'=(1)'=0;$$

$$(5x^3-7x^2+19x+3)'=(5x^3)'-(7x^2)'+(19x)'+(3)'=$$
$$=5(x^3)'-7(x^2)'+19(x)'+(3)'=$$
$$=5\cdot 3x^2-7\cdot 2x+19\cdot 1+0=15x^2-14x+19;$$

$$(1+x)'=(1)'+(x)'=0+1=1;$$

$$(ax^2+bx+c)'=2ax+b;$$

$$(\sqrt[5]{x})=(x^{\frac{1}{5}})'=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}};$$

$$\left(\frac{x^3}{5}\right)'=\left(\frac{1}{5}x^3\right)'=\frac{1}{5}(x^3)'=\frac{3x^2}{5};$$

$$(x\sqrt{x})'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}};$$

$$\left(\frac{1}{x\sqrt{2x}}\right)'=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}};$$

$$(\sin x\cos x)'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x.$$

$$\left(\frac{x+1}{x+2}\right)'=\frac{(x+1)'(x+2)-(x+2)'(x+1)}{(x+2)^2}=$$
$$=\frac{x+2-x-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{(x+2)^2}.$$

Во всех предыдущих примерах мы обозначали аргумент буквой x. Но это вовсе не обязательно. Аргумент можно обозначать и любой другой буквой. Например,

$$(u^3)'=3u^2; \qquad (\sin v)'=\cos v.$$

В том случае, когда функция обозначена какой-нибудь буквой, например буквой z, ее производная обозначается символом z'. Например, если $z=\frac{1}{4}x^2$, то $z'=\left(\frac{1}{4}x^2\right)'=\frac{1}{2}x$.

Если $S=\frac{1}{2}gt^2$, то $S'=\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt$. Если $v=u^3$, то $v'=3u^2$.

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ И ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Пусть $y=u^3$ и $u=\sin x$.

Если рассматривать отдельно равенство $y=u^3$, то можно считать аргументом u, а функцией y. В этом случае производная от величины y по аргументу u выразится так: $y'_u=3u^2$.

Мы здесь вместо обычного обозначения y' применили обозначение y'_u. Это мы сделали для того, чтобы в дальнейшем не перепутать между собой эту производную с другой производной, которая у нас еще появится.

Если рассматривать отдельно равенство $u=\sin x$, то можно считать аргументом x, а функцией u.

В этом случае производная от величины u и по аргументу x выразится так: $u'_x=\cos x$.

Теперь станем рассматривать равенства $y=u^3$ и $u=\sin x$ в их связи друг с другом. Очевидно, что каждому значению аргумента x будет соответствовать определенное значение u, а полученному значению u будет соответствовать определенное значение y. Следовательно, мы можем рассматривать величину y не только как функцию величины u, но и как функцию аргумента x.

Функцию y от x, заданную таким образом, называют **сложной функцией** от x, а величину u называют **промежуточной переменной**.

При такой постановке вопроса возникает задача — найти производную от величины y по аргументу x.

Придадим аргументу x приращение h, тогда величина u получит некоторое приращение h_1, а после этого и величина y получит некоторое свое приращение h_2.

По определению производной $y'_x=\lim\limits_{h\to 0}\frac{h_2}{h}$.

Но

$$\frac{h_2}{h}=\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h}.$$

Поэтому

$$y'_x=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h}\right)=\lim_{h_1\to 0}\frac{h_2}{h_1}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h_1}{h}.$$

(Мы имеем в виду такой класс функций, для которых при $h\to 0$ будет и $h_1\to 0$.)

Но

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{h_2}{h_1}=y'_u \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0}\frac{h_1}{h}=u'_x.$$

Поэтому

$$y'_x=y'_h\cdot u'_x.$$

Значит,

$$y'_x=3u^2\cdot\cos x=3\sin^2 x\cos x.$$

Таким образом, ***производная сложной функции по независимой переменной равна ее производной по промежуточной переменной, умноженной на производную промежуточной переменной по независимой.***

Теперь мы можем находить производные очень просто.

Примеры:

1. Пусть $y=\sin u$, а $u=\sqrt{x}$.

Тогда

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\cos u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. Если $y=\ln u$, $u=\operatorname{tg} x$, то

$$y'_x=\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\,\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

3. Если $y=u^5$, $u=\frac{\sin x}{x}$, то

$$y'_x=5\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

В рассмотренных примерах промежуточная переменная была указана с самого начала. В следующих примерах мы ее будем вводить сами.

4. Пусть $y=2^{\sin x}$.
Положим $u=\sin x$.
Тогда $y=2^u$ и $y'_x=2^u\ln 2\cdot u'_x=2^{\sin x}\ln 2\cdot\cos x$.
5. Пусть $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$.
Положим $u=ax^2+bx+c$.
Тогда $y=\sqrt{u}$ и $y'_x=\frac{1}{2\sqrt{ax^2+bx+c}}\cdot(2ax+b)$.

В следующих примерах введение промежуточной переменной будем делать в уме.

6. Пусть $y=\sin(2x+1)$.
Тогда $y'=\cos(2x+1)\cdot 2$.
7. $y=\ln\sin x$, $y'=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x=\operatorname{ctg} x$.
8. $y=\sin^3 x$, $y'=3\sin^2 x\cdot\cos x$.

До сих пор мы рассматривали случаи, когда величина y зависела от x через посредство одной промежуточной переменной. Однако встречаются сложные функции с большим числом промежуточных переменных. Пусть, например,

$$y=2^{\sqrt{\sin x}}.$$

Если положить $u=\sqrt{\sin x}$, то окажется $y=2^u$ и $y'_x=$ $=2^u\ln 2\cdot u'_x$.

Но

$$u'_x=\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cdot\cos x.$$

Следовательно,

$$y'_x=2^{\sqrt{\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

На практике введение промежуточных переменных делается в уме.

Если $y=\sin^3\sqrt{x}$, то

$$y'=3\sin^2\sqrt{x}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Сделаем пояснения. В выражении $\sin^3\sqrt{x}$ последним действием является возведение в третью степень. Поэтому мы взяли производную от степени.

Если отбросить это действие возведение в третью степень, то останется выражение $\sin\sqrt{x}$. Здесь последним действием является нахождение синуса. Поэтому мы берем производную от синуса.

Если отбросить и действие нахождение синуса, то останется выражение $\sqrt{x}$. Поэтому берем производную от $\sqrt{x}$.

Если $y=2^{\operatorname{tg}^3 5x}$, то

$$y'=2^{\operatorname{tg}^3 5x}\ln 2\cdot 3\operatorname{tg}^2 5x\cdot\frac{1}{\cos^2 5x}\cdot 5.$$

Если $y=e^{\operatorname{arctg}^3 5x}$, то

$$y'=e^{\operatorname{arctg}^3 5x}\cdot 3\operatorname{arctg}^2 5x\cdot\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot 5.$$

Если $y=x^2e^{-x^2}$, то

$$y'=(x^2)'\cdot e^{-x^2}+x^2(e^{-x^2})'=2xe^{-x^2}+x^2\cdot e^{-x^2}\cdot -2x=$$
$$=2xe^{-x^2}(1-x^2).$$

УПРАЖНЕНИЯ

422. Найти производные следующих функций:

а) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$; б) $y=\frac{x}{x+1}$;

в) $y=(1+x^2)^{100}$; г) $y=\sin^3 x$;

д) $y=3^{\sin x}$; е) $y=e^{x^2}$;

ж) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; з) $y=xe^x$;

и) $y=\ln\cos x$; к) $y=\arcsin\sqrt{x}$.

§ 4. МЕХАНИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Известно, что функция

$$\frac{1}{2}gt^2$$

выражает путь, пройденный при свободном падении (см. стр. 380). Придадим аргументу t приращение h. Тогда приращение функции окажется равным

$$\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2.$$

Отношение $\dfrac{\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2}{h}$ есть средняя скорость на промежутке времени от момента t до момента $t+h$. Скоростью же в момент t мы называем тот предел, к которому стремится эта дробь при $h\to 0$. Но этот предел по определению, данному выше, как раз есть производная функции

$$\frac{1}{2}gt^2.$$

Таким образом, оказывается, что производная от функции, выражающей пройденный путь при прямолинейном ***движении, выражает скорость этого движения.*** В этом и заключается механический смысл производной.

Вычислив

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2-\frac{1}{2}gt^2}{h}$$

(см. стр. 383), найдем формулу скорости движения

$$v=gt,$$

где gt есть как раз производная функции

$$\frac{1}{2}gt^2.$$

Эту производную можно было получить и так:

$$\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=\frac{1}{2}g\cdot(t^2)'=\frac{1}{2}g\cdot 2t=gt.$$

Кратко говорят: ***Производная от пути по времени есть скорость.***

Примеры.

1. При равномерно ускоренном прямолинейном движении пройденный путь в зависимости от времени t выражается функцией

$$v_0t+\frac{1}{2}at^2,$$

где v_0 и a — величины постоянные и $a>0$. Найти скорость v этого движения.

Решение.

$$v_0=\left(v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)'=(v_0t)'+\left(\frac{1}{2}at^2\right)'=$$
$$=v_0\cdot(t)'+\frac{1}{2}a\cdot(t^2)'=v_0\cdot 1+\frac{1}{2}a\cdot 2t=v_0+at.$$

Итак,

$$v=v_0+at.$$

2. Пройденный путь в зависимости от времени t выражается функцией $\frac{a}{t}+bt^2$, где a и b — постоянные. Найти скорость движения.

Решение.

$$v=\left(\frac{a}{t}+bt^2\right)'=\left(\frac{a}{t}\right)'+(bt^2)'=a\cdot\left(\frac{1}{t}\right)'+b\,(t^2)'=$$
$$=a\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)+b\cdot 2t=-\frac{a}{t^2}+2bt.$$

Итак,

$$v=2bt-\frac{a}{t^2}.$$

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

К кривой PQ проведена секущая AB через две ее точки M и M_1 (рис. 204).

Оставляя точку M неподвижной, вообразим, что точка M_1 движется по кривой, неограниченно приближаясь к M. Тогда секу-

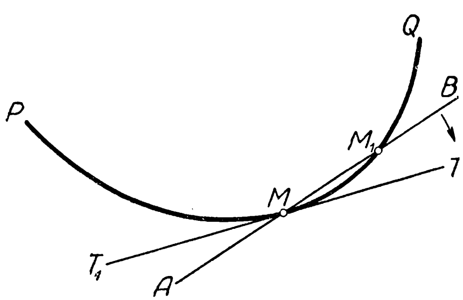


Рис. 204.

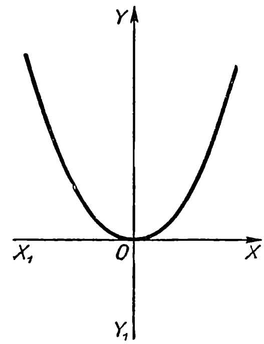


Рис. 205.

щая AB станет поворачиваться вокруг неподвижной точки M, стремясь к предельному положению T_1T. Это предельное положение секущей называется касательной к кривой в точке M.

Определение. ***Касательной к данной кривой в данной на ней точке M называется предельное положение***

секущей, проходящей через данную точку M и через другую точку M_1 кривой, при условии, что точка M_1 приближается по кривой неограниченно к неподвижной точке M*.

Кратко можно говорить так: ***касательной называется предельное положение секущей.***

Условимся называть тангенс угла между осью X_1X и касательной к кривой угловым коэффициентом касательной.

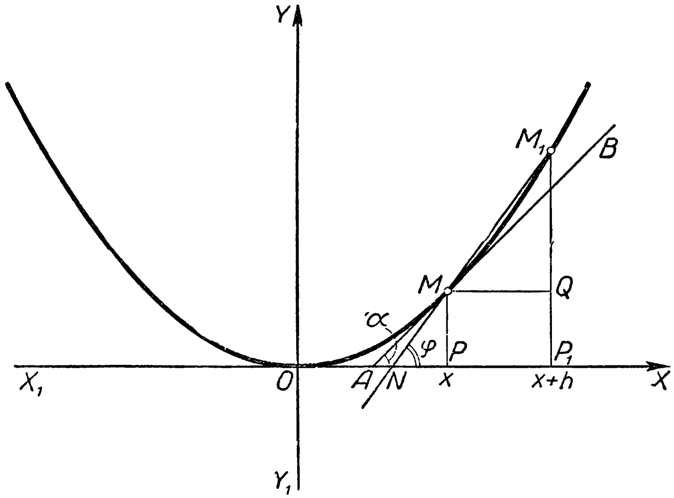


Рис. 206.

Задача. Найти угловой коэффициент касательной к кривой

$$y = \frac{1}{4} x^2$$

в произвольно взятой на ней точке $M\left(x;\ \frac{1}{4} x^2\right)$ (рис. 206).

Возьмем на кривой точку $M_1\left[x+h;\ \frac{1}{4}(x+h)^2\right]$ и проведем $MQ \parallel OX$. Тогда

$$MQ = h;\ M_1P_1 = \frac{1}{4}(x+h)^2;$$

$$QP_1 = MP = \frac{1}{4} x^2$$

и

$$M_1Q = \frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4} x^2.$$

---

* Было бы неправильно определять касательную лишь как прямую, имеющую с кривой одну общую точку. Например, ось Y_1Y имеет с параболой $y = x^2$ одну общую точку, но касательной не является (рис. 205).

Проведем секущую MM_1 и обозначим буквой φ угол между осью OX и этой секущей. Очевидно, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{M_1Q}{MQ} = \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{h}.$$

Если теперь мы станем приближать точку M_1 по кривой к точке M, то секущая MM_1 станет поворачиваться вокруг неподвижной точки M, стремясь к положению касательной AB. При этом h будет стремиться к нулю, а величина φ к величине α (α есть угол между касательной и осью X_1X). Значит,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - \frac{1}{4}x^2}{h}.$$

Но последний предел есть производная функции $\frac{1}{4}x^2$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \left(\frac{1}{4}x^2\right)' = \frac{1}{4}(x^2)' = \frac{1}{4}\cdot 2x = \frac{1}{2}x,$$

т. е. угловой коэффициент касательной равен производной функции $\frac{1}{4}x^2$, которой определяется данная кривая.

Эти рассуждения применимы и ко всякой другой кривой. Например, угловой коэффициент касательной к кривой $y = x^3$ равен:

$$\operatorname{tg}\alpha = (x^3)' = 3x^2.$$

Угловой коэффициент в точке $x = \frac{1}{4}$ будет равен $3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2$, т. е. $\frac{3}{16}$.

Угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ будет:

$$\operatorname{tg}\alpha = (\sin x)' = \cos x.$$

При $x = \frac{\pi}{3}$ этот угловой коэффициент равен $\cos\frac{\pi}{3}$, т. е. $\frac{1}{2}$.

Итак, числовое значение производной при $x = a$ равно угловому коэффициенту касательной, проведенной в той точке кривой, абсцисса которой равна a.

Если в точке $x = x_0$ производная функции обращается в бесконечность, то касательная к графику этой функции в точке $x = x_0$ располагается параллельно оси Y_1Y.

Если функция в точке $x = x_0$ не имеет ни конечной, ни бесконечной производной, то в этой точке графика касательной не существует.

Задача о нахождении скорости неравномерного движения и задача о проведении касательной к кривой как раз и были теми задачами, решение которых и привело исторически к возникновению понятия производной.

Приведем еще несколько примеров, разъясняющих смысл производной.

1. При неравномерном прямолинейном движении скорость есть функция времени. Обозначим приращение времени буквой h, а приращение скорости буквой h_1. Тогда $\frac{h_1}{h}$ будет среднее ускорение, а $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h_1}{h}$ будет ускорение.

Таким образом, производная от скорости по времени есть ускорение.

2. Количество электричества, протекшее через поперечное сечение цепи, есть функция времени. Обозначим приращение времени буквой h, а приращение количества протекшего электричества буквой h_1. Тогда $\frac{h_1}{h}$ будет средней силой тока, а $\lim\limits_{h \to 0} \frac{h_1}{h}$ будет силой тока.

Таким образом, производная от количества протекшего электричества по времени есть сила тока.

С помощью производной решаются многочисленные разнообразные задачи.

С помощью производной осуществляется исследование характера изменения функции, строятся графики функций с учетом всех особеннсстей получаемых кривых линий.

С помощью производной изучается характер кривизны любой кривой.

С помощью производной произвольные функции изображаются степенными рядами. Например,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots .$$

Производная дает общий метод решения задач о наибольших и наименьших значениях величин и т. д. и т. д.

Все такие применения производной излагаются в учебниках по дифференциальному исчислению. Нахождение производной называется дифференцированием.

§ 6. О ВЫРАЖЕНИЯХ $f'(a)$ И $[f(a)]'$

Возьмем произвольную функцию $y = f(x)$. Тогда выражение $f'(x)$, как нам уже известно, означает производную этой функции.

Под выражением же $f'(a)$, где a — постоянное число, принято понимать значение выражения $f'(x)$ при $x = a$.

Примеры:

Если $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, то $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$;

$$f'(a) = 3a^2 + 2a + 1; \qquad f'(7) = 3 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7 + 1.$$

Если

$$f(x) = \sin x, \quad \text{то} \quad f'(x) = \cos x;$$

$$f'(\pi) = \cos \pi = -1; \qquad f'(2) = \cos 2^*;$$

$$f'(a) = \cos a; \qquad f'(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta).$$

Итак, если дана какая-нибудь функция $f(x)$ и мы хотим найти $f'(a)$, то должны для этого выполнить следующие две операции:

1) Найти $f'(x)$, т. е. производную от функции $f(x)$.

2) В полученную производную $f'(x)$ подставить вместо независимой переменной число a.

Символ $f'(a)$ называется значением производной от функции $f(x)$ при $x = a$.

Теперь разъясним смысл символа $[f(a)]'$, где a есть постоянное число.

Выражение $[f(a)]'$, где a есть постоянное число, всегда равно нулю. Действительно, $f(a)$ есть величина постоянная, а производная от постоянной величины равна нулю. Значит,

$$[f(2)]' = 0, \qquad [f(-2)]' = 0.$$

Таким образом, следует различать смысл символов

$$f'(a) \quad \text{и} \quad [f(a)]',$$

в которых буква a обозначает постоянное число.

Пусть

$$f(x) = x^3 + x.$$

Тогда

$$f'(x) = 3x^2 + 1; \qquad f(5) = 5^3 + 5 = 130;$$

$$f'(5) = 3 \cdot 5^2 + 1 = 76; \qquad [f(5)]' = (130)' = 0.$$

§ 7. МАКСИМУМ И МИНИМУМ ФУНКЦИИ

Пусть кривая $MABCDE$ есть график функции $y = f(x)$ (рис. 207) и пусть в точках A, B, C, D, E с абсциссами, равными соответственно a, b, c, d, e, проведены к этой кривой касательные.

Касательная в точке A составляет с положительным направлением оси X_1X острый угол. Касательная в точке C составляет с положительным направлением оси X_1X тупой угол. Касательные же в точках B, D, E параллельны оси X_1X, т. е. составляют с ней угол, равный нулю.

Из геометрических наглядных представлений видно, что функция в точках A и E является возрастающей, в точке C — убывающей, а в точках B, D — ни возрастающей, ни убывающей.

---

* Выражение $\cos 2$ полагается понимать так: $\cos$ (2 радианов) $=$
$= \cos 114°36'28'' = -\sin 24°36'23'' \approx -0{,}4161$.

В точке B функция переходит от возрастания к убыванию. В точке D, наоборот, — от убывания к возрастанию.

Значение функции, соответствующее точке B, больше, чем ее значения, соответствующие точкам, близлежащим к точке B, слева и справа.

Значение функции, определяющее такую точку, как B, называется максимумом функции.

Значение функции, определяющее такую точку, как D, называется минимумом функции.

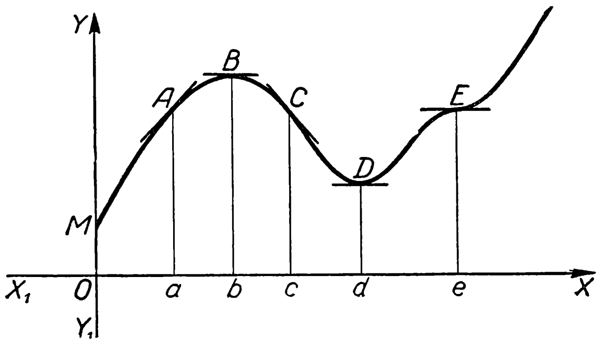


Рис. 207.

Пользуясь геометрическим значением производной (см. § 5), можно записать, что

$$f'(a) > 0;\ f'(b) = 0;\ f'(c) < 0;$$
$$f'(d) = 0;\ f'(e) = 0.$$

Значение функции $f(x)$, соответствующее точке $x = b$, называется максимумом этой функции.

Значение функции $f(x)$, соответствующее точке $x = d$, называется минимумом этой функции.

Значение функции $f(x)$, соответствующее точке $x = e$, не является ни максимумом, ни минимумом этой функции.

Отсюда мы можем сделать следующие выводы:

1. Если при $x = b$ окажется $f'(x) = 0$ и если слева от точки $x = b$ в непосредственной близи к ней $f'(x) > 0$, а справа $f'(x) < 0$, то в точке $x = b$ функция $f(x)$ имеет максимум.

2. Если при $x = d$ окажется $f'(x) = 0$ и слева (от точки d) $f'(x) < 0$, а справа (от точки d) $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = d$ имеет минимум.

3. Если при $x = e$ окажется $f'(x) = 0$ и при этом слева и справа $f'(x)$ сохраняет один и тот же знак, то в точке $x = e$ не будет ни максимума, ни минимума.

Пусть теперь график функции $y=f(x)$ имеет вид, изображенный на рисунке 208.

В точке A касательная существует и параллельна оси Y_1Y (производная функции $f(x)$ в точке $x=a$ обращается в бесконечность).

В точке B касательная не существует (функция $f(x)$ в точках $x=b$ не имеет ни конечной, ни бесконечной производной).

Из наглядных геометрических представлений видно, что в точках $x=a$ и $x=b$ функция имеет максимумы.

Те точки, в которых функция имеет максимум или минимум, называются э к с т р е м а л ь н ы м и т о ч к а м и ф у н к ц и и, *а про функцию говорят, что она имеет в этих точках* э к с т р е м у м.

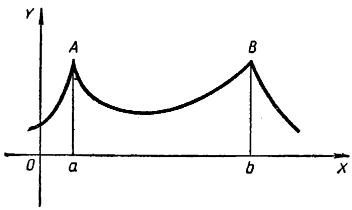


Рис. 208.

Из совокупности всего изложенного примем к сведению такой вывод:

Экстремальными точками функции могут быть лишь те, в которых производная обращается либо в нуль, либо в бесконечность, а также и те, в которых функция не имеет ни конечной, ни бесконечной производной. При этом надо иметь в виду, что экстремум в указанных точках будет иметь место тогда и только тогда, когда будет происходить указанная выше перемена знака производной.

В тех точках, в которых производная является конечным числом, отличным от нуля, экстремума функции быть не может.

§ 8. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ НА ЭКСТРЕМУМ

1. Найти те значения аргумента x, при которых функция $y=x^2$ имеет максимум или минимум.

Сначала найдем производную от данной функции. Искомая производная будет:

$$y'=2x.$$

Затем найдем корни производной, т. е. те значения x, при которых производная равна нулю.

Для этого приравняем производную нулю и решим полученное уравнение

$$2x=0.$$

Отсюда видно, что производная в данном случае имеет лишь один корень, равный нулю.

Теперь исследуем знак производной, т. е. знак функции $2x$ слева и справа от точки $x=0$.

$$\text{При } x<0 \quad 2x<0,$$
$$\text{при } x>0 \quad 2x>0.$$

Следовательно, данная функция $y=x^2$ имеет только один минимум при $x=0$.

Минимальное значение функции $y=x^2$, т. е. ее значение при $x=0$, будет также равно нулю.

2. Исследовать на максимум и минимум функцию $y=x^3$.

а) $y'=3x^2$, б) $3x^2=0$, отсюда $x=0$;

в) при $x<0$ $3x^2>0$, при $x>0$ $3x^2>0$.

Производная не меняет знака.

Следовательно, функция $y=x^3$ не имеет ни одного максимума и ни одного минимума.

3. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y=(x-1)^3(x-2)^2;$$
$$y'=3(x-1)^2(x-2)^2+$$
$$+2(x-2)(x-1)^3=$$
$$=(x-1)^2(x-2)(5x-8);$$
$$y'=5(x-1)^2(x-2)\left(x-\frac{8}{5}\right).$$

Производная имеет следующие корни:

$$1;\ \frac{8}{5}\ \text{и}\ 2.$$

а) При $x<1$ $y'>0$; при $x<1$ $y'>0$ (см. замечание, сделанное ниже).

Следовательно, при $x=1$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

b) При $x<\frac{8}{5}$ будет $y'>0$; при $x>\frac{8}{5}$ будет $y'<0$.

Следовательно, при $x=\frac{8}{5}$ функция имеет максимум.

с) При $x<2$ будет $y'<0$; при $x>2$ будет $y'>0$.

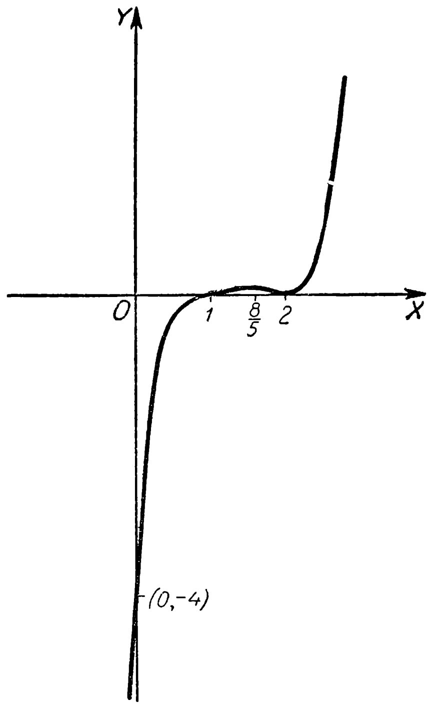


Рис. 209.

Следовательно, при $x=2$ функция имеет минимум (рис. 209).

Замечание. При исследовании знака производной мы берем значения x, расположенные в непосредственной близости к рассматриваемой точке.

3. Исследовать на максимум и минимум функцию $y=x^2e^{-x^2}$ и построить ее график.

$$y'=2xe^{-x^2}-2x^3e^{-x^2}=2xe^{-x^2}(1-x^2).$$

Эта производная является конечным числом при любом значении x. Следовательно, данная функция дифференцируема всюду и

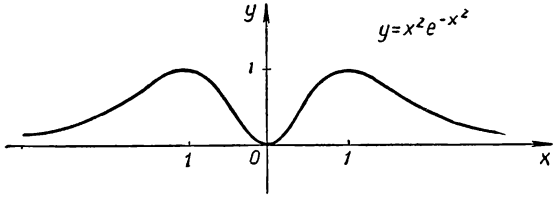


Рис. 210.

ее производная в бесконечность не обращается. Поэтому экстремальными точками данной функции могут быть лишь те, при которых производная обращается в нуль, т. е. точки $x=-1$, $x=0$ и $x=1$.

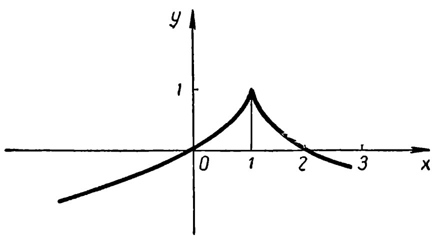


Рис. 211.

Исследование знака производной в непосредственной близости к каждой из этих точек слева и справа показывает, что данная функция имеет максимум в точках $x=-1$, $x=1$ и минимум при $x=0$.

График имеет вид, изображенный на рисунке 210.

4. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y=1-\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

и построить ее график.

Записав $y=1-(x-1)^{\frac{2}{3}}$, получим:

$$y'=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Эта производная обращается в бесконечность при $x=1$. При $x<1$ будет $y'>0$; при $x>1$ будет $y'<0$.

Следовательно, при $x=1$ данная функция имеет максимум. График функции изображен на рисунке 211.

§ 9. ЗАДАЧИ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

1. Число 14 разбить на три слагаемых так, чтобы второе слагаемое было в два раза больше первого и чтобы сумма квадратов всех трех слагаемых имела наименьшее значение.

Первое слагаемое обозначим через x; тогда второе слагаемое будет $2x$, а третье $(14-3x)$.

Теперь исследуем на максимум и минимум функцию

$$y = x^2 + (2x)^2 + (14 - 3x)^2, \text{ или } y = 14x^2 - 84x + 196.$$

Найдем производную:

$$y' = 28x - 84, \text{ или } y' = 28(x - 3).$$

Производная имеет лишь один корень $x = 3$.

$$\text{При } x < 3 \text{ будет } y' < 0; \text{ при } x > 3 \text{ будет } y' > 0.$$

Следовательно, при $x = 3$ функция имеет минимум. Этот минимум будет и наименьшим значением функции.

Итак, сумма квадратов трех слагаемых при наших условиях будет иметь наименьшее значение, если этими слагаемыми взять числа 3; 6; 5.

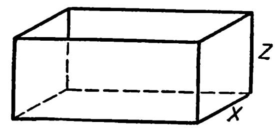


Рис. 212.

2. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 $м^3$ так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала (рис. 212).

Обозначим сторону основания бассейна через x, а высоту через z. Тогда площадь стен и дна, взятых вместе, будет: $y = 4xz + x^2$. Но по условию $x^2z = 32$, откуда $z = \frac{32}{x^2}$ и $y = \frac{128}{x} + x^2$. Найдем производную:

$$y' = -\frac{128}{x^2} + 2x = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}, \text{ или } y' = \frac{2(x-4)(x^2+4x+16)}{x^2}.$$

Производная имеет лишь один действительный корень $x = 4$.

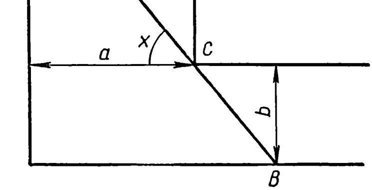


Рис. 213.

При $x < 4$ $y' < 0$; при $x > 4$ $y' > 0$.

Следовательно, при $x = 4$ функция имеет минимум. Итак, на облицовку стен и дна бассейна при наших условиях пойдет наименьшее количество материала, если сторону основания бассейна взять равной 4 *м*, а высоту 2 *м*.

3. К реке шириной a метров построен под прямым углом канал шириной b метров. Какова наибольшая длина бревна, которое при сплаве, перемещаясь из реки в канал, не застрянет на повороте? Максимальная длина бревна будет той же самой, что минимальная длина отрезка AB, проходящего через точку C (рис. 213).

Обозначим переменный угол ACD буквой x. Тогда

$$AC = \frac{a}{\cos x}, \quad CB = \frac{b}{\sin x}.$$

Обозначив AB буквой y, получим, что

$$y=\frac{a}{\cos x}+\frac{b}{\sin x}.$$

Задача сводится к нахождению минимального значения этой функции. Возьмем производную

$$y'=\frac{a\sin x}{\cos^2 x}-\frac{b\cos x}{\sin^2 x}=\frac{a\sin^3 x-b\cos^3 x}{\cos^2 x\sin^2 x}.$$

Полагая $a\sin^3 x-b\cos^3 x=0$, найдем, что

$$\operatorname{tg} x=\sqrt[3]{\frac{b}{a}}=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

Исследовать знак производной в данной задаче нет надобности. Из чисто геометрических соображений видно, что величина $y=AB$ максимального значения не имеет, а минимальное имеет. Поэтому при

$$\operatorname{tg} x=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

отрезок AB будет иметь минимальное значение. Чтобы найти это минимальное значение отрезка AB, вычислим $\cos x$ и $\sin x$, зная, что

$$\operatorname{tg} x=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}.$$

$$\sec^2 x=1+\operatorname{tg}^2 x=1+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}=\frac{a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}.$$

Отсюда

$$\sec x=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}},\qquad \cos x=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда

$$\sin x=\operatorname{tg} x\cos x=\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Теперь наименьшее значение AB, а, следовательно, наибольшая длина бревна равна

$$\frac{\dfrac{a}{a^{\frac{1}{3}}}}{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}+\frac{\dfrac{b}{b^{\frac{1}{3}}}}{(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

423. Найти размеры цилиндра, чтобы он при заданном объеме имел наименьшую полную поверхность.

Отв. Высота равна диаметру основания. Радиус основания равен $\sqrt{\frac{v}{2\pi}}$.

424. Открытый чан имеет форму цилиндра. Каковы должны быть размеры чана, чтобы при заданном объеме V его поверхность была наименьшей?

Отв. Высота равна радиусу основания и равна $\sqrt[3]{\frac{v}{\pi}}$.

425. В шар радиусом R вписать прямой конус наибольшего объема.

Отв. Высота равна $\frac{4}{3}R$.

426. Рычаг второго рода имеет точку опоры A; в точке B ($AB=a$) подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен q. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой. (Момент уравновешивающей силы должен равняться сумме моментов груза P и рычага.)

Отв. $\sqrt{\frac{2aP}{q}}$.

427. Груз весом P, лежащий на горизонтальной плоскости, нужно сдвинуть приложенной к нему наименьшей силой. Под каким углом к горизонту должна быть направлена эта сила, если коэффициент трения равен 0,24?

Отв. 13°30′.

§ 10. ВЫВОД ФОРМУЛ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

Формула бинома Ньютона. Выражение $(1+x)^n$, где n — целое положительное число, есть краткое изображение следующего произведения:

$$(1+x)(1+x)\ldots(1+x),$$

которое состоит из n одинаковых множителей.

Раскрыв скобки в этом произведении, получим многочлен n-й степени относительно x. Поэтому

$$(1+x)^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_n x^n. \tag{1}$$

Задача заключается в том, чтобы определить коэффициенты

$$b_0, \quad b_1, \quad b_2, \quad b_3, \ldots, \quad b_n.$$

Полагая в тождестве (1) $x=0$, найдем, что $b_0 = 1 = C_n^0$.

Дифференцируя левую и правую части тождества (1), получим:

$$n(1+x)^{n-1} = b_1 x + 2b_2 x + 3b_3 x^2 + \ldots + nb_n x^{n-1}. \tag{2}$$

Полагая и здесь $x=0$, найдем, что $b_1 = n = C_n^1$.

Дифференцируя левую и правую части тождества (2), получим:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2b_2 + 2\cdot 3b_3 x + \ldots + n(n-1) b_n x^{n-2}.$$

Полагая опять $x=0$, найдем, что $b_2 = \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} = C_n^2$.

Продолжая этот процесс, найдем, что

$$b_3 = C_n^3;\ b_4 = C_n^4;\ \ldots;\ b_k = C_n^k; \ldots;\ b_{n-1} = C_n^{n-1};\ b_n = C_n^n.$$

Итак,

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^k x^k + \ldots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n.$$

Найдем разложение для $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = a^n \left[C_n^0 + C_n^1 \frac{b}{a} + C_n^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + C_n^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + C_n^n \left(\frac{b}{a}\right)^n\right],$$

или

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Другие формулы

С помощью дифференцирования можно получить и многие другие формулы.

Например, найдем следующую сумму:

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}.$$

Пользуясь формулой суммы членов геометрической прогрессии, получим:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Дифференцируя, найдем:

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}=\frac{(x^{n+1}-1)'\cdot(x-1)-(x-1)'\cdot(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{(n+1)\,x^n\cdot(x-1)-1\cdot(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{(n+1)x^{n+1}-(n+1)\,x^n-x^{n+1}+1}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{nx^{n+1}-(n+1)\,x^n+1}{(x-1)^2}.$$

Найдем еще следующую сумму:

$$1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}.$$

Пользуясь формулой суммы членов геометрической прогрессии, получим:

$$x-x^2+x^3-x^4+\ldots+(-1)^{n-1}\,x^n=\frac{x-(-1)^n\,x^{n+1}}{1+x}.$$

Дифференцируя, найдем, что

$$1-2x+3x^2-4x^3+\ldots+(-1)^n nx^{n-1}=$$

$$=\frac{[x-(-1)^n\,x^{n+1}]'\,(1+x)-(1+x)'\cdot[x-(-1)^n\,x^{n+1}]}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{[1-(-1)^n\,(n+1)\,x^n]\cdot(1+x)-1\cdot[x-(-1)^n\,x^{n+1}]}{(1+x)^2}=$$

$$=\frac{1-(-1)^n\,(n+1)\,x^n-(-1)^n\,nx^{n+1}}{(1+x)^2}.$$

С помощью дифференцирования можно получить, например, формулу косинуса двойного угла, исходя из формулы синуса двойного угла.

Действительно,

$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

$$(\sin 2x)'=(2\sin x\cos x)',$$

$$2\cos 2x=2\,[(\sin x)'\cos x+(\cos x)'\sin x],$$

$$\cos 2x=\cos x\cos x+(-\sin x)\cdot\sin x,$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

С помощью дифференцирования можно из уравнения движения получить формулу скорости. Например,

$$S=v_0t+\frac{g}{2}\,t^2,$$

$$S'=v_0\cdot 1+\frac{g}{2}\cdot 2t.$$

Следовательно,

$$v=v_0+gt,$$

где v — скорость.

§ 11. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Допустим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$, т. е. что

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A,$$

где A — конечное число.

Но разность между переменной и ее пределом есть величина бесконечно малая. Поэтому

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-A=\alpha,$$

где α — величина бесконечно малая при бесконечно малом h. Отсюда

$$f(x_0+h)=Ah+\alpha h+f(x_0) \quad \text{и} \quad \lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0).$$

Обозначив выражение x_0+h буквой x, получим, что

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Итак, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то должно иметь место равенство:

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Но не следует думать, что равенство

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

является справедливым всегда. Например, для функции

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

имеем:

$$\lim_{x\to 1}f(x)=2,$$

а $f(1)$ обращается в $\frac{0}{0}$, т. е. предел функции и значение функции представляет собой не одно и то же. В данном случае

$$\lim_{x\to 1}f(x)\neq f(1).$$

Теперь перейдем к более подробному изучению понятия непрерывности функции.

Непрерывность в точке. Функция $y=f(x)$ является непрерывной при $x=a$ (или, короче, в точке a), если выполняются следующие четыре требования:

1. $f(a)$ есть определенное число, т. е. функция $f(x)$ определена в точке a.

2. Функция $f(x)$ определена в какой-нибудь окрестности точки a (окрестностью точки a называется любой промежуток, содержащий точку a).

3. При любом законе стремления аргумента x к числу a существует предел функции $f(x)$.

4. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример 1. Функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке $x = a$. (Здесь $f(x) = x^2$.)

Действительно,

1) $f(a) = a^2$, т. е. функция определена в точке $x = a$.

2) Функция x^2 определена в любой окрестности точки $x = a$.

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$, т. е. требующийся предел существует, поскольку

$$\lim_{x \to a} (x^2) = \lim_{x \to a} (x \cdot x) = \lim_{x \to a} x \cdot \lim_{x \to a} x = a \cdot a = a^2.$$

(Мы здесь воспользовались тем, что предел произведения двух множителей равен произведению пределов этих множителей, если последние пределы существуют.)

4) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, так как и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a^2$ и $f(a) = a^2$.

Пример 2. Функция $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ не является непрерывной в точках $x = 1$ и $x = -1$, так как в этих точках она не определена. В данном случае $f(1)$ и $f(-1)$ не являются числами.

Пример 3. Функция

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < -1; \\ x + 2 & \text{при } -1 \leqslant x < 0; \\ 1 & \text{при } x = 0; \\ -x + 2 & \text{при } 0 < x \leqslant 1; \\ 1 & \text{при } x > 1; \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x = 0$. Здесь первое требование выполняется: $f(0)$ есть определенное число, а именно единица. Выполняются второе и третье требования. Но не выполняется четвертое требование, так как $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$, а $f(0) = 1$,

$$\text{т. е. } \lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0).$$

Пример 4. Функция

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x = 0; \\ x + 1 & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

не является непрерывной в точке $x = 0$. Здесь первое требование выполняется:

$$f(0) = 1.$$

Выполняется и второе условие: существует окрестность точки $x=0$, в которой функция определена. Но третье условие не выполняется.

Действительно,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1 \text{ и } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1,$$

т. е. при разных законах стремления аргумента x к нулю получаются разные пределы, а не один и тот же предел. Для непрерывности же необходимо, чтобы предел функции существовал один и тот же, независимо от способа стремления аргумента x к нулю.

Пример 5. Функция $y=E(x)$ (антье от x) не является непрерывной при целых значениях аргумента. Покажем, что она не является непрерывной, например, при $x=4$.

Первое требование для непрерывности выполняется:

$$E(4)=4.$$

Второе требование также выполняется: существует окрестность точки $x=4$, в которой функция $E(x)$ определена.

Но третье требование не выполняется:

$$\lim_{\substack{x\to 4\\ x>4}} E(x)=4, \text{ но } \lim_{\substack{x\to 4\\ x<4}} E(x)=3.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 4} E(x)$ не существует. Из этого вытекает, что $x=4$ не является точкой непрерывности.

Итак, *функция называется непрерывной в точке a, если она определена в этой точке, определена в какой-нибудь окрестности этой точки, и если предел функции при произвольном стремлении аргумента x к a существует и равен значению функции при $x=a$.*

Непрерывность на промежутке. Функция, непрерывная в каждой точке промежутка, называется непрерывной на этом промежутке.

Непрерывность на отрезке. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[p, q]$, если она непрерывна в промежутке (p, q) и если

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x>p}} f(x)=f(p); \qquad \lim_{\substack{x\to q\\ x<q}} f(x)=f(q).$$

Пример 1. Функция $y=\operatorname{tg} x$ имеет следующие промежутки непрерывности:

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right), \ldots$$

Если к каждому из этих промежутков присоединить их концы, то на полученных отрезках $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ и т. д. функция

$x = \operatorname{tg} x$ уже не будет непрерывной (см. рис. 159 на стр. 511). (Доказательство этих двух утверждений опускается. Эти утверждения следуют из общей теоремы о непрерывности элементарных функций, см. стр. 733.)

Пример 2. Для функции $y = E(x)$ (антье от x) любой промежуток, концами которого служат два последовательных целых числа, будет являться промежутком непрерывности. На отрезке же, концами которого служат целые числа, функция $y = E(x)$ уже не будет непрерывной (см. рис. 101, стр. 326).

Пример 3. Функция $y = x^2$ непрерывна на всей числовой оси.

Точки разрыва функции. Точка $x = a$ называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если $f(x)$ определена в какой-нибудь окрестности этой точки и если при этом выполнено хотя бы одно из следующих условий: либо $f(x)$ не имеет предела, когда x стремится к a по произвольному закону, либо этот предел существует, но не совпадает со значением функции в точке $x = a$, либо, наконец, $f(x)$ не определена в точке $x = a$.

Каждая точка, которая не являлась точкой непрерывности функции в разобранных выше примерах, является, как это легко доказать, вместе с тем и точкой разрыва соответствующей функции.

Приведем еще несколько примеров точек разрыва.

Пример 4. Функция $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ определена для любых значений x, кроме $x = 0$. Следовательно, $x = 0$ является точкой разрыва этой функции. Таким образом, эта функция при произвольном стремлении аргумента x к нулю не имеет предела. Действительно, если мы станем стремить x к нулю слева, т. е. оставляя x отрицательным, то $\dfrac{1}{x}$ будет стремиться к минус бесконечности и

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

Если же мы станем стремить x к нулю справа, т. е. оставляя x положительным, то $\dfrac{1}{x}$ будет стремиться к плюс бесконечности и

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0.$$

Таким образом, оказалось, что рассматриваемая функция имеет различные пределы при двух различных законах стремления x к нулю. Это означает, что функция не имеет предела при произвольном стремлении аргумента x к нулю. Если $x \to \pm\infty$, то $y \to \dfrac{1}{2}$. График этой функции изображен на рисунке 214.

Асимптота. Пусть имеется кривая, ветвь которой удаляется в бесконечность. Если расстояние от точки кривой до некоторой определенной прямой по мере удаления точки в бесконечность стремится к нулю, то эта прямая называется асимптотой кривой.

На рисунке 215 изображена асимптота AB к кривой MN. Оси координат являются асимптотами кривой $y=\frac{1}{x}$ (см. рис. 76 на

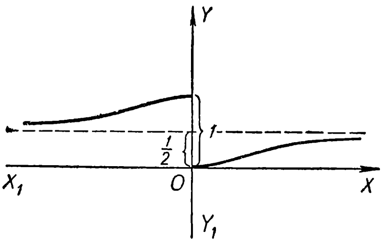


Рис. 214.

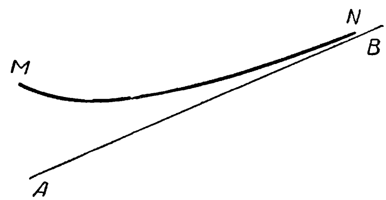


Рис. 215.

стр. 308). Прямая $y=\frac{1}{2}$, как это видно на рисунке 214, является асимптотой кривой $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

Пример 5. Функция $y=\operatorname{tg} x$ не является непрерывной в точках $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$; ... (см. рис. 159 на стр. 511).

Эти точки являются одновременно и точками ее разрыва.

Пример 6. Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ определена для всех значений x, кроме $x=0$. Она и непрерывна при всех значениях x, кроме $x=0$. Точка $x=0$ является одновременно и ее точкой разрыва. Но есть разница в характере точек разрыва функций $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$, $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\sin\frac{1}{x}$. А именно $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ стремится к нулю, когда x стремится к нулю справа и к единице слева. Функция $\operatorname{tg} x$ стремится к плюс бесконечности справа и к минус бесконечности слева, когда x стремится, например, к $\frac{\pi}{2}$.

Функция же $\sin\frac{1}{x}$ не стремится ни к какому пределу при x, стремящемся к нулю (безразлично слева или справа). При стремлении x к нулю $\sin\frac{1}{x}$ совершает бесконечное множество колебаний между $+1$ и -1 (рис. 216).

Элементарные функции. Основными элементарными функциями являются следующие:

1) степенная функция: $y=x^n$, где n — постоянное действительное число;

2) показательная функция: $y=a^x$, где a — постоянное положительное число;

3) логарифмическая функция: $y=\log_a x$, где основание логарифмов a — положительное число;

4) тригонометрические функции: $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, а также реже употребляемые: $y=\operatorname{ctg} x$, $y=\sec x$, $y=\operatorname{cosec}\ x$;

5) обратные тригонометрические функции:

$$y=\arcsin x, \quad y=\arccos x, \quad y=\operatorname{arctg} x,$$

а также $y=\operatorname{arcctg} x$, $y=\operatorname{arcsec} x$, $y=\operatorname{arccosec} x$.

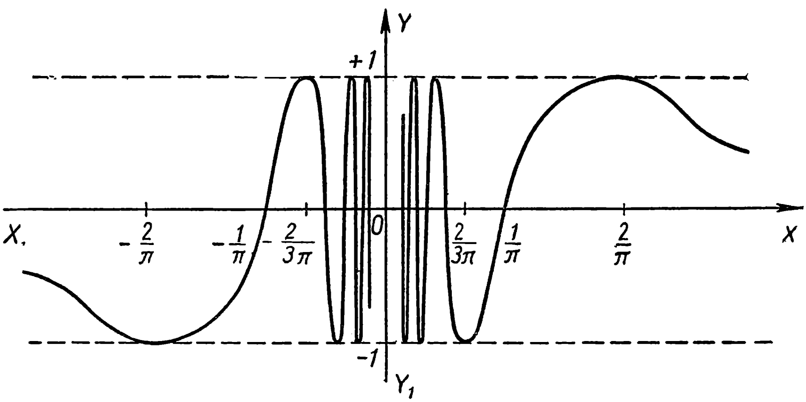


Рис. 216.

Всякая функция, заданная одним аналитическим выражением, составленным из конечного числа основных элементарных функций при помощи арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и взятия функции, называется элементарной функцией.

Например, элементарными функциями будут следующие:

$$y=ax^2+bx+c; \quad y=2^{\sin x};$$

$$y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2});$$

$$y=\operatorname{arctg}\frac{1+\sin x}{1-\sin x} \text{ и т. п.}$$

Примем к сведению без доказательства следующее свойство элементарных функций.

Все элементарные функции непрерывны в своих областях определения, т. е. они не являются непрерыв-

ными лишь в тех точках, в которых они не определены.

Способ определения предела непрерывной функции. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то, как мы знаем,

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Отсюда следует правило: для того чтобы найти предел непрерывной функции, достаточно взять значение функции в соответствующей точке.

Способ определения предела элементарной функции. Для того чтобы найти предел элементарной функции при стремлении аргумента к такой точке a, в которой она определена, достаточно взять значение этой элементарной функции в точке a.

Примеры:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{2^3-1}{2^2-1}=\frac{7}{3};$$

$$\lim_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0;$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\lg\left(\sin 2x+\cos 2x+\frac{36x}{\pi}\right)=$$

$$=\lg\left(\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+\frac{36\cdot\frac{\pi}{4}}{\pi}\right)=1.$$

Нельзя писать

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{1^3-1}{1^2-1},$$

так как данная элементарная функция в точке $x=1$ не определена. Этот предел надо находить так:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Мы имели право сократить дробь на $(x-1)$, так как $x\neq 1$, а лишь стремится к единице.

Нельзя писать так:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\frac{\sin a-\sin a}{a-a}.$$

Этот предел вычисляется так:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right)=1\cdot\cos a=\cos a.$$

Функции, непрерывные на всей числовой оси X_1X или на ее отдельных участках, обладают многими важными свойствами, которыми и объясняется огромное значение этих функций в математике и ее приложениях. Например, функция может иметь производную только в точках ее непрерывности. В своих точках разрыва функция производной не имеет.

Теорема Больцано. Функция, непрерывная на отрезке и принимающая на концах этого отрезка значения разных знаков, по крайней мере один раз обращается в нуль внутри этого отрезка.

Иначе можно сформулировать эту теорему так:

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и при этом $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$ (или $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$), то существует такое число c, что $a < c < b$ и $f(c) = 0$.

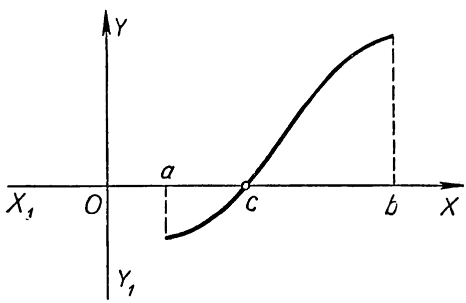


Рис. 217.

Теорема Больцано* прекрасно согласуется с нашим представлением о непрерывной кривой, которая неизбежно должна пересечь ось X_1X в какой-нибудь точке, чтобы перейти с одной ее стороны на другую (рис. 217).

Доказательство теоремы Больцано мы приводить здесь не будем. Заметим лишь, что, опираясь на эту теорему, можно доказывать некоторые утверждения, на первый взгляд отнюдь не представляющиеся вполне очевидными. Например, можно доказать такое утверждение:

Если A и B—две заданные фигуры на плоскости (рис. 218), то существует такая прямая в этой плоскости, которая одновременно делит обе фигуры на равновеликие по площади части.

---

* См. „Краткие исторические сведения".

Приведем доказательство этой теоремы, изложенное на странице 418 книги Р. Курант и Г. Роббинс «Что такое математика» (ОГИЗ, 1947).

«Начнем доказательство с того, что выберем произвольную фиксированную точку P в нашей плоскости и проведем из нее фиксированный луч PR, от которого будем вести отсчет углов. Каков бы ни был луч PS, образующий угол x с лучом PR, существует направленная прямая, параллельная PS и делящая фигуру A на равновеликие части. Действительно, возьмем одну из направленных прямых, параллельных PS и имеющих всю фигуру A по одну сторону: пусть эта прямая будет l_1; станем подвергать ее параллельному перенесению таким образом, чтобы при окончательном положении (которое назовем l_2) вся фигура A оказалась уже

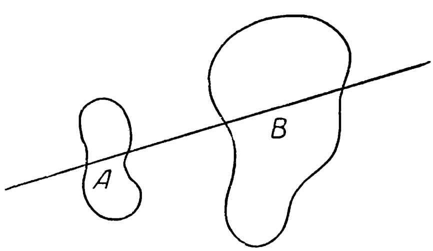


Рис. 218.

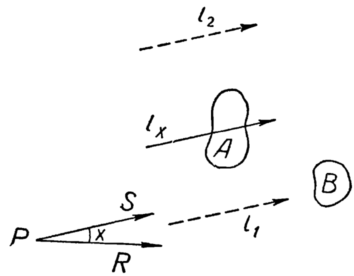


Рис. 219.

по другую ее сторону (рис. 219). В таком случае функция, определяемая как разность площади части A, расположенной вправо от направленной прямой, и площади части A, расположенной влево («вправо» — «к востоку», «влево» — «к западу», если прямая направлена, скажем, «на север»), оказывается положительной для положения прямой l_1 и отрицательной для положения l_2. Так как эта функция непрерывна, то, по теореме Больцано, она обращается в нуль при каком-то промежуточном положении прямой, которое мы обозначим теперь через l_x и при котором, очевидно, фигура A разбивается пополам. Итак, каково бы ни было x ($0° \leqslant x < 360°$), существует прямая l_x, разбивающая A пополам. Обозначим теперь через $y = f(x)$ разность между площадью части фигуры B справа от l_x и площадью части слева от l_x. Допустим для определенности, что прямая l_0, параллельная PR и разбивающая A пополам, справа имеет бо́льшую часть площади B, чем слева; тогда y положительно при $x = 0°$. Пусть теперь x возрастает до $180°$, тогда прямая l_{180}, параллельная RP и разбивающая A пополам, совпадает с l_0 (но направлена в противоположную сторону, а «правая» и «левая» стороны переместились); отсюда ясно, что значение y при $x = 180°$ численно то же, что и при $x = 0°$, но с обратным знаком, т. е. отрицательно. Так как y есть функция x, непрерывная при $0° \leqslant$

$\leqslant x \leqslant 180°$ (упомянутая разность площадей, очевидно, изменяется непрерывно при вращении секущей прямой), то существует такое значение $x = \alpha$, при котором y обращается в нуль. Но тогда прямая l_α разбивает пополам обе фигуры A и B одновременно. Наша теорема доказана.

Следует заметить, что мы установили всего-навсего существование прямой, обладающей заданным свойством, но не указали определенной процедуры для ее построения: в этом характерная черта «чистых» математических доказательств существования».

§ 12 ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Если движение совершается по закону

$$S = \frac{1}{2} g t^2,$$

то скорость в момент t выражается формулой

$$v = gt \qquad \text{(см. стр. 713).}$$

Из этой формулы видно, что скорость движения меняется с течением времени. В каждый новый момент времени она становится новой.

Возьмем скорость в момент t и вообразим, что начиная с этого момента тело стало двигаться равномерно с приобретенной к этому моменту скоростью gt. При этих условиях тело пройдет за промежуток времени с момента t до момента $t+h$ расстояние

$$gth.$$

Но gt есть S'. Поэтому вместо выражения gth можно написать

$$S' \cdot h.$$

Еще раз обратим внимание на то, что $S' \cdot h$ выражает собой то расстояние, которое тело прошло бы за промежуток времени с момента t до момента $t+h$, если бы наше неравномерное движение превратилось бы с момента t в движение равномерное. Вот этот прирост пути $S' \cdot h$ называется дифференциалом пути и обозначается символом dS. Таким образом,

$$dS = S' \cdot h.$$

Здесь S' есть производная, а h есть приращение аргумента t.

Действительное расстояние, пройденное телом за промежуток времени с момента t до момента $t+h$, при нашем неравномерном движении будет равно

$$\frac{1}{2} g (t+h)^2 - \frac{1}{2} g t^2.$$

Это расстояние называется приращением пути и обозначается символом ΔS.

Итак,

$$\Delta S = \frac{1}{2} g (t+h)^2 - \frac{1}{2} g t^2.$$

Отсюда ясно, что dS и ΔS — это разные понятия, разные величины.

ΔS есть настоящее, действительное приращение пути, а dS есть не настоящее, а такое, которое получилось бы, если неравномерное движение заменить с момента t движением равномерным, происходящим со скоростью, приобретенной к моменту t.

Но dS есть, как было показано выше, произведение производной на приращение аргумента.

Отсюда мы приходим к следующему определению:

Дифференциалом функции называется произведение производной на произвольное приращение аргумента.

Например, если $y = x^3$, то

$$dy = d(x^3) = (x^3)' \cdot h = 3x^2 h.$$

Здесь h есть произвольное приращение аргумента x.

Значение дифференциала зависит от значения аргумента x и от значения приращения h.

Из формулы

$$dy = 3x^2 h$$

при $x = 5$ и $h = 0{,}1$ мы получим, что

$$dy = 3 \cdot 5^2 \cdot 0{,}1 = 7{,}5.$$

Теперь составим еще и приращение функции $y = x^3$

$$\Delta y = (x+h)^3 - x^3;$$

при $x = 5$ и $h = 0{,}1$

$$\Delta y = 7{,}651.$$

Итак, оказалось, что $dy = 7{,}5$, а $\Delta y = 7{,}651$.

Дифференциал функции $y = x$

$$dy = dx = (x)' \cdot h = 1 \cdot h = h.$$

Оказалось, что $dx = h$. Пользуясь этим, мы можем формулу дифференциала, например $dy = 3x^2 h$, записать в следующем виде:

$$dy = 3x^2 dx.$$

Примеры:

$$d(x^8) = (x^8) \cdot dx = 8x^7 dx;$$

$$d(\sin x) = (\sin x)' dx = \cos x\, dx;$$

$$d(\ln x) = (\log_e x)' \cdot dx = \frac{1}{x} dx;$$

$$d(\operatorname{arctg} x) = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2} dx.$$

§ 13. ИНВАРИАНТНОСТЬ* ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛА

Пусть $y=u^3$, где u — аргумент. Тогда по определению дифференциала

$$dy=y'_u\,du. \tag{A}$$

Здесь du представляет собой произвольное приращение аргумента u.

Пусть теперь

$$y=u^3 \text{ и } u=\sin x.$$

Рассматривая здесь y как функцию аргумента x и пользуясь определением дифференциала, получим:

$$dy=y'_x dx=y'_u\cdot u'_x dx.$$

Здесь dx есть произвольное приращение аргумента x. Но так как $du=u'_x dx$, то мы можем переписать равенство

$$dy=y'_u\cdot u'_x dx$$

в следующем виде:

$$dy=y'_u du. \tag{B}$$

Выражение du в формуле (B) уже не приращение функции u, а ее дифференциал.

Мы получили очень важный результат. Формулы (A) и (B) имеют один и тот же вид, т. е. формула дифференциала

$$dy=y'_u du$$

верна и в том случае, когда u есть аргумент, и в том случае, когда величина u сама есть функция какого-либо другого аргумента. Вот это свойство и называется инвариантностью формулы дифференциала.

Значит, если $y=\operatorname{tg} u$, то запись $dy=\frac{1}{\cos^2 u}du$ будет верной и тогда, когда u является аргументом, и тогда, когда u есть функция какого-либо аргумента (например, $u=\sqrt{t}$).

Формула же производной не является инвариантной. Действительно, если $y=u^3$ и при этом u есть аргумент, то мы имеем формулу

$$y'_u=3u^2. \tag{I}$$

Если же $y=u^3$ и $u=\sin x$, то мы имеем формулу

$$y'_x=3u^2\cdot\cos x. \tag{II}$$

Формулы (I) и (II) имеют различный вид.

Нахождение производной или дифференциала функции называется дифференцированием функции.

---

* Латинское слово «variants» означает «изменяющийся», а приставка «in» означает «не». Инвариантностью называется неизменяемость.

ГЛАВА XLII

ИНТЕГРАЛ

§ 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Мы уже знаем, что такое производная и что такое дифференциал данной функции. Например, если

$$y = x^3, \text{ то } y' = 3x^2 \text{ и } dy = 3x^2 dx.$$

Если

$$y = \operatorname{tg} x, \text{ то } y' = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ и } dy = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Теперь поставим обратную задачу.

Пусть мы знаем, что производная некоторой функции равна $\frac{1}{\cos^2 x}$, и спрашиваем себя, какой же должна быть в таком случае эта некоторая функция. Пользуясь таблицей производных, можно сказать, что за эту некоторую функцию можно взять выражение

$$\operatorname{tg} x + C,$$

где C — любое постоянное число.

Действительно,

$$(\operatorname{tg} x + C)' = (\operatorname{tg} x)' + C' = \frac{1}{\cos^2 x} + 0 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Но тут возникает вопрос, а нет ли еще какой-либо другой функции, производная которой также равнялась бы $\frac{1}{\cos^2 x}$? Примем к сведению без доказательства, что никакой такой функции больше нет, что все функции, имеющие своей производной $\frac{1}{\cos^2 x}$, содержатся в выражении $\operatorname{tg} x + C$.

Функцию, производная которой равна, например, $\frac{1}{\cos^2 x}$ или дифференциал которой равен $\frac{1}{\cos^2 x}\, dx$, обозначают символом

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

и называют **неопределенным интегралом.**

Значит,

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C.$$

Для иллюстрации напишем несколько неопределенных интегралов:

$$\int x^7\, dx = \frac{1}{8} x^8 + C;$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C;$$

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ (n \neq -1);$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C;$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + C;$$

$$\int e^x\, dx = e^x + C;$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

Знак $\int$ называется знаком неопределенного интеграла. Выражение, написанное под знаком неопределенного интеграла, называется *подынтегральным выражением*.

Подынтегральное выражение представляет собой дифференциал той функции, которую требуется отыскать.

Чтобы проверить правильность выполненного интегрирования, достаточно вычислить дифференциал полученного результата. Если этот дифференциал окажется равным подынтегральному выражению, то это будет означать, что интегрирование выполнено правильно.

Например,

$$d\left(\frac{1}{8} x^8 + C\right) = \left(\frac{1}{8} x^8 + C\right)' dx = \left[\left(\frac{1}{8} x^8\right)' + C'\right] dx =$$

$$= \left[\frac{1}{8} (x^8)' + C'\right] dx = \left(\frac{1}{8} \cdot 8x^7 + 0\right) dx = x^7\, dx.$$

Значит, формула

$$\int x^7\, dx = \frac{1}{8} x^8 + C$$

написана правильно.

Действие отыскания неизвестной функции по данному ее дифференциалу называется *неопределенным интегрированием*, потому что в результате этого действия получается не одна функция, а бесконечно много функций. Например,

$$\int x^7\, dx = \frac{1}{8} x^8 + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Значит, имеется бесконечно много таких функций, дифференциал которых равен $x^7\,dx$. Такими функциями будут, скажем,

$$\frac{1}{8}x^8+1;\quad \frac{1}{8}x^8+17\,\frac{1}{4};\quad \frac{1}{8}x^8-2\quad \text{и т. д.}$$

Все эти функции отличаются друг от друга лишь на постоянную величину.

Из того, что постоянный множитель можно выносить за знак производной, следует, что его можно выносить и за знак интеграла. Например,

$$\int A\sin x\,dx=A\int\sin x\,dx,$$

$$\int\frac{R\,(R^2-x^2)}{H^2}\,dx=\frac{R}{H^2}\int(R^2-x^2)\,dx.$$

Здесь предполагалось, что A, R, H — величины постоянные, т. е. не зависящие от x.

Способы отыскания неизвестной функции по данному ее дифференциалу, т. е. способы неопределенного интегрирования, излагаются в учебниках по интегральному исчислению.

Здесь же мы приведем лишь несколько неопределенных интегралов, которые находятся так называемым «методом непосредственного интегрирования». Суть этого метода такова.

При вычислении, например, интеграла

$$\int\cos 2x\,dx$$

естественно вспомнить формулу

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C.$$

Однако, если мы напишем

$$\int\cos 2x\,dx=\sin 2x+C,$$

то допустим ошибку, так как $(\sin 2x)'=2\cos 2x$, а не $\cos 2x$, как должно быть. Легко сообразить, что правильным ответом будет

$$\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C.$$

Таким же образом получим:

$$\int\cos 5x\,dx=\frac{1}{5}\sin 5x+C;\quad \int\sin 5x\,dx=-\frac{1}{5}\cos 5x+C;$$

$$\int e^{5x}\,dx=\frac{1}{5}e^{5x}+C;\quad \int e^{-x}dx=-e^{-x}+C;\quad \int xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+C;$$

$$\int\sin^3x\cos x\,dx=\frac{\sin^4 x}{4}+C;\quad \int\frac{x}{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C\ \text{и т. д.}$$

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ СУММА

Пусть нам дана какая-нибудь функция, например x^7, и отрезок числовой оси от точки a до точки b (рис. 220).

Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частичных промежутков с помощью точек $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$. На каждом частичном промежутке возьмем произвольным образом по одной точке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n$. Эти точки назовем **опорными**.

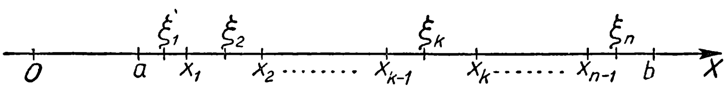


Рис. 220.

Теперь напишем такую сумму:

$$\xi_1^7(x_1 - a) + \xi_2^7(x_2 - x_1) + \ldots + \xi_k^7(x_k - x_{k-1}) + \\ + \ldots + \xi_n^7(b - x_{n-1}). \qquad \text{(A)}$$

Эта сумма составлена следующим образом: значения данной функции x^7, взятые в опорных точках, умножены на длины соответствующих промежутков и все полученные произведения сложены. Сумма (А) называется **интегральной суммой**, составленной для функции x^7 на отрезке $[a, b]$.

Если вместо функции x^7 мы возьмем какую-нибудь другую функцию, например $\sqrt{x}$, то, написав выражение

$$\sqrt{\xi_1}(x_1 - a) + \sqrt{\xi_2}(x_2 - x_1) + \ldots + \sqrt{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + \sqrt{\xi_n}(b - x_{n-1}),$$

получим интегральную сумму, составленную для функции $\sqrt{x}$. Таким же образом можно составить интегральную сумму и для любой другой функции.

Для произвольной функции $f(x)$ интегральная сумма запишется так:

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + f(\xi_n)(b - x_{n-1}).$$

Величина интегральной суммы зависит от многих обстоятельств. Она зависит:

1) от выбора данной функции;

2) от выбора чисел a и b;

3) от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные промежутки и, наконец,

4) от выбора опорных точек $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Вообразим, что число частичных отрезков, т. е. число n, неограниченно возрастает и разбиение на частичные промежутки происходит так, что длина наибольшего частичного промежутка стремится к нулю. При этих условиях интегральная сумма, составленная для функции непрерывной на отрезке $[a, b]$, будет стремиться к определенному пределу, зависящему только от выбора данной функции и от выбора чисел a и b. (Доказательство этого утверджения мы здесь не приводим.)

Таким образом, *предел интегральной суммы не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на частичные промежутки и не зависит от выбора опорных точек.*

Возникает вопрос: а для чего нужна интегральная сумма и ее предел? Существует много разнообразных задач (геометрических, задач по механике, физике и др.), решения которых выражаются пределами интегральных сумм. Например, предел интегральной суммы

$$f(\xi_1)(t_1 - a) + f(\xi_2)(t_2 - t_1) + \ldots + f(\xi_n)(b - t_{n-1})$$

есть путь, пройденный точкой при прямолинейном движении за время от $t = a$ до $t = b$, если $f(t)$ — скорость движения, а t — время.

Теперь возникает новый вопрос: а как вычислять пределы интегральных сумм?

Прямое вычисление пределов интегральных сумм является делом очень трудным, выполнимым лишь в некоторых простых случаях, да и то путем применения хитрых искусственных приемов. С помощью таких приемов Архимед умел вычислять пределы некоторых интегральнык сумм. Но вот в XVII веке Ньютон и Лейбниц, независимо друг от друга открыли очень удобный способ вычисления пределов интегральных сумм. Они доказали, что предел интегральной суммы, например, составленной для функциии x^7 на отрезке $[a, b]$, можно вычислить следующим образом.

Сначала надо найти какую-нибудь одну функцию, производная которой равна x^7. За такую функцию можно взять, скажем, $\frac{1}{8}x^8$. После этого надо составить разность значений найденной функции при $x = b$ и $x = a$, т. е. написать

$$\frac{1}{8}b^8 - \frac{1}{8}a^8.$$

Эта разность и будет представлять собой точное значение предела следующей интегральной суммы:

$$\xi_1^7(x_1 - a) + \xi_2^7(x_2 - x_1) + \ldots + \xi_n^7(b - x_{n-1})$$

при условии, что $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$. (Запись $\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$ означает, что длина наибольшего частичного промежутка стремится к нулю.)

Ньютон и Лейбниц доказали, что этот удобный способ применим к вычислению интегральной суммы, составленной для любой непрерывной функции $f(x)$.

Таким образом, чтобы вычислить предел интегральной суммы

$$f(\xi_1)(x_1-a)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\ldots+f(\xi_n)(b-x_{n-1}),$$

надо поступить так.

Найти функцию $F(x)$ такую, чтобы $F'(x)=f(x)$. Функцию $F(x)$ находят с помощью неопределенного интегрирования. Искомый предел будет равен

$$F(b)-F(a).$$

Для удобства разность $F(b)-F(a)$ принято записывать кратко так:

$$F(x)\Big|_a^b.$$

Например,

$$\sqrt{x}\Big|_a^b=\sqrt{b}-\sqrt{a}.$$

§ 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВЯЗЬ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Предел интегральной суммы, составленной для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, называется определенным интегралом и обозначается символом:

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Символ $\int_a^b f(x)\,dx$ читается так: «Определенный интеграл от выражения $f(x)\,dx$ в пределах от a до b».

Из того, что изложено в двух предыдущих параграфах, мы можем сказать следующее:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

где

$$F'(x)=f(x).$$

$F(x)$ находят с помощью неопределенного интегрирования:

$$F(x)=\int f(x)\,dx.$$

Пример. Пусть требуется вычислить предел интегральной суммы, составленной для функции x^2 на отрезке $[a, b]$.

Найдем функцию, производная которой равна x^2. Для этого выполним неопределенное интегрирование:

$$\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

Следовательно, искомый предел равен

$$\left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b=\frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}.$$

Другие примеры вычисления определенных интегралов:

1) $\int\limits_1^2 x^3\,dx=\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2=\frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4}=4-\frac{1}{4}=3\frac{3}{4}.$

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1.$

3) $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\operatorname{arctg} x\Big|_0^1=\operatorname{arctg} 1-\operatorname{arctg} 0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}.$

4) $\int\limits_4^9 \sqrt{x}\,dx=\int\limits_4^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_4^9=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_4^9=18-\frac{16}{3}=12\frac{2}{3}.$

5) $\int\limits_0^R \frac{H(R^2-x^2)}{2R}\,dx=\frac{H}{2R}\int\limits_0^R (R^2-x^2)\,dx=$

$=\frac{H}{2R}\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R=\frac{H}{2R}\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)=\frac{1}{3}R^2H.$

Здесь предполагалось, что R и H — величины постоянные, т. е. не зависящие от x.

6) $\int\limits_0^{\pi} \pi\sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx=$

$=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}\cdot\pi=\frac{1}{2}\pi^2.$

7) $\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx=\ln x\Big|_a^b=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}.$

8) $\int\limits_0^{\pi} l\sin x\,dx=l\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx=l(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=$

$=-l\cos\pi-(-l\cos 0)=l+l=2l.$

9) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x\,dx=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\sin\frac{\pi}{2}-\ln\sin\frac{\pi}{6}=$

$=0-\ln\frac{1}{2}=-\ln 1+\ln 2=\ln 2.$

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Найти площадь, ограниченную осью OX, кривой $y=\sqrt{x}$ и прямыми AB и CD, параллельными оси Y_1Y (рис. 221).

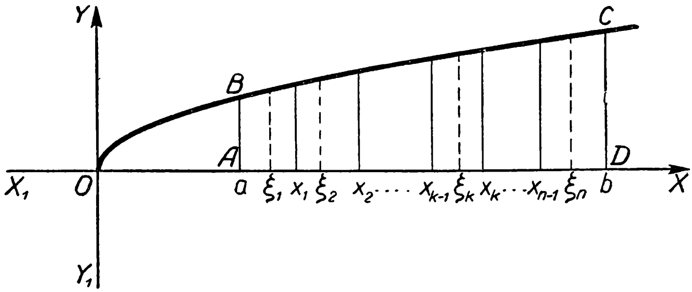


Рис. 221.

Фигура $ABCD$ называется криволинейной трапецией.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков с помощью точек $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$. Через эти точки проведем прямые, параллельные оси Y_1Y. На частичных отрезках выберем произвольным образом опорные точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots, \xi_n$, и проведем через них также прямые, параллельные оси Y_1Y. Величины отрезков этих вертикалей соответственно равны:

$$\sqrt{\xi_1},\ \sqrt{\xi_2},\ \ldots,\ \sqrt{\xi_k},\ \ldots,\ \sqrt{\xi_n}.$$

Тогда интегральная сумма

$$\sqrt{\xi_1}(x_1-a)+\sqrt{\xi_2}(x_2-x_1)+\ldots+\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{\xi_n}(b-x_{n-1})$$

будет приближенным значением площади криволинейной трапеции $ABCD$. Это значение будет тем точнее, чем меньше будут длины каждого из частичных отрезков.

За истинную, т. е. точную, площадь криволинейной трапеции естественно принять предел написанной выше интегральной суммы при условии, что n стремится к бесконечности и длины всех частичных отрезков стремятся к нулю. Следовательно, площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна

$$\lim_{\substack{\max(x_k-x_{k-1})\to 0\\(k=1,2,3,\ldots,n)}}[\sqrt{\xi_1}(x_1-a)+\sqrt{\xi_2}(x_2-x_1)+\ldots$$
$$\ldots+\sqrt{\xi_k}(x_k-x_{k-1})+\ldots+\sqrt{\xi_n}(b-x_{n-1})].$$

Но этот предел есть следующий определенный интеграл:

$$\int_a^b\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_a^b=\frac{2}{3}b\sqrt{b}-\frac{2}{3}a\sqrt{a}.$$

Итак, оказалось, что площадь s данной криволинейной трапеции определяется формулой

$$s=\int_a^b \sqrt{x}\,dx.$$

Если взять $a_0=1$ и $b_n=4$, то получим, что

$$s=\int_1^4 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_1^4=\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}-\frac{2}{3}\sqrt{1}=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=4\frac{2}{3}\ \textit{кв. ед.}$$

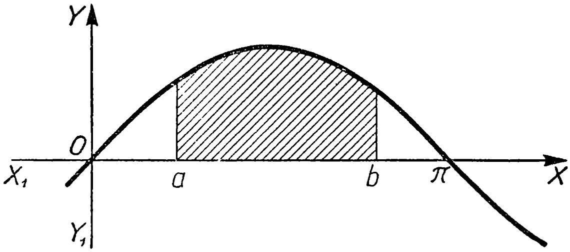


Рис. 222.

Аналогично площадь s заштрихованной криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой $y=\sin x$ (рис. 222), выразится формулой

$$s=\int_a^b \sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_a^b=-\cos b-(-\cos a)=\cos a-\cos b.$$

При $a=0$ и $b=\pi$ получим, что

$$s=\int_0^\pi \sin x\,dx=(-\cos x)\Big|_0^\pi=-\cos\pi-(-\cos 0)=$$
$$=-(-1)-(-1)=1+1=2.$$

Значит, площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной полуволной синусоиды, равна 2 *кв. ед.*

2. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y=x^2$ и $x=y^2$ (рис. 223).

Сначала найдем точки пересечения данных парабол. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y=x^2, \\ x=y^2. \end{cases}$$

Подставив в 1-е уравнение вместо x выражение, взятое из второго уравнения, получим;

$$y=y^4;\ \text{отсюда: } 1)\ y=0;\ 2)\ y=1.$$

При $y=0$ получим $x=0$.

При $y=1$ получим $x=1$.

Итак, получилось две точки пересечения: 0 (0; 0) и A (1; 1). Площадь фигуры $OmAnO$ равна разности площадей криволинейных трапеций $OmAB$ и $OnAB$.

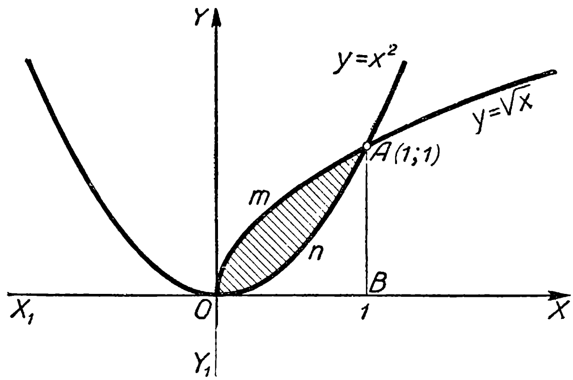


Рис. 223.

Но площадь трапеции $OmAB$ равна $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx$, а площадь трапеции $OnAB$ равна $\int\limits_0^1 x^2\,dx$. Следовательно, искомая площадь s определяется формулой

$$s=\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx-\int\limits_0^1 x^2\,dx;$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx=\int\limits_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\sqrt{1}-\frac{2}{3}\cdot 0\cdot\sqrt{0}=\frac{2}{3};$$

$$\int\limits_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}.$$

Значит,

$$s=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\ \text{кв. ед.}$$

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

а) ***Объем тела, площади поперечных сечений которого известны.*** Пусть площадь S поперечного сечения тела T плоскостью, перпендикулярной к оси X_1X, задана как непрерывная функция от x (рис. 224).

$$S=F(x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Это значит, что функция $F(x)$ нам известна и мы имеем возможность вычислить площадь указанного выше поперечного сечения для любого заданного значения x.

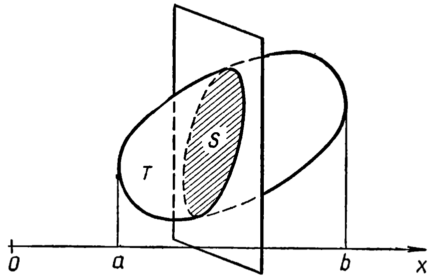


Рис. 224.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, \ldots, x_{n-1}$ на n частичных промежутков.

Через точки $a, x_1, x_2, \ldots, \ldots, x_{n-1}, b$ проведем плоскости, перпендикулярные к оси X_1X. Эти плоскости разобьют тело T на n слоев.

На каждом из n промежутков $(a, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{k-1}, x_k), \ldots, x_{n-1}, b)$ выберем по одной произвольной опорной точке $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \ldots, \xi_n$. Тогда произведение

$$F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

будет выражать собой объем цилиндра с площадью основания, равной $F(\xi_k)$, и высотой, равной $x_k - x_{k-1}$. Объем этого цилиндра является приближенным значением объема слоя, заключенного между плоскостями, проходящими через точки x_{k-1} и x_k.

Поэтому сумму

$$F(\xi_1)(x_1 - a) + F(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + F(\xi_n)(b - x_{k-1})$$

мы можем рассматривать как приближенное значение объема тела T.

Но эта последняя сумма представляет собой интегральную сумму, составленную для непрерывной функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$. Как нам известно, эта сумма при

$$\max(x_k - x_{k-1}) \to 0$$

имеет предел, равный определенному интегралу

$$\int_a^b F(x)\,dx.$$

По определению объемом V тела T называется предел указанной выше интегральной суммы. Поэтому

$$v = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Примеры:

1. Вычислить объем цилиндрического копыта, отсекаемого от прямого круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания (рис. 225).

R — радиус основания цилиндра,

H — высота копыта,

ABC — сечение копыта плоскостью, перпендикулярной к оси X_1X, проведенное через точку x.

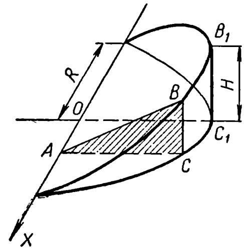


Рис. 225.

Площадь S этого сечения равна $\frac{1}{2} AC \cdot BC$. Но из подобия треугольников ABC и OB_1C_1 $\frac{BC}{AC} = \frac{H}{R}$. Отсюда $BC = \frac{H \cdot AC}{R}$. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{H \cdot (AC)^2}{2R}.$$

Из уравнения $x^2 + y^2 = R^2$ окружности основания цилиндра следует, что $y^2 = R^2 - x^2$. Но $AC = y$. Поэтому окончательно

$$S = \frac{H(R^2 - x^2)}{2R}.$$

Значит, здесь $F(x) = \frac{H(R^2 - x^2)}{2R}$. Поэтому объем V копыта определяется формулой

$$\frac{1}{2} V = \int_0^R \frac{H(R^2 - x^2)}{2R} dx = \frac{1}{3} R^2 H \text{ (см. стр. 746, пример 5).}$$

Следовательно, $V = \frac{2}{3} R^2 H$.

2. Определить объем произвольной пирамиды по данной площади основания Q и высоте H. Примем за ось X_1X — ось, проходящую через вершину S пирамиды перпендикулярно к плоскости основания (рис. 226).

Через точку x оси X_1X проведем плоскость, перпендикулярную к оси X_1X. Тогда получим, что $\frac{q}{Q} = \frac{x^2}{H^2}$, где q — площадь сечения. Отсюда

$$q = \frac{Qx^2}{H^2}.$$

Поэтому объем V пирамиды определяется формулой

$$V = \int_0^H \frac{Qx^2}{H^2} dx.$$

Отсюда находим, что

$$V = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} QH.$$

б) ***Объем тела вращения.*** Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси X_1X криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 227), ограниченной кривой AB, осью X_1X и прямыми $x=a$ и $x=b$.

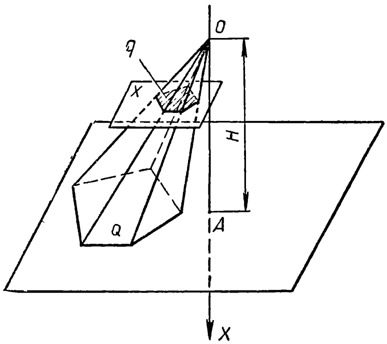


Рис. 226.

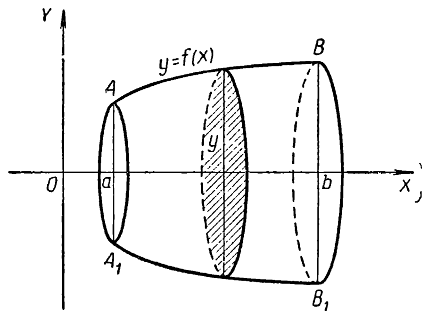


Рис. 227.

Пусть кривая AB есть часть графика непрерывной функции $y=f(x)$. В этом случае произвольное сечение тела вращения плоскостью, перпендикулярной к оси X_1X, есть круг, площадь которого определяется формулой:

$$S=\pi y^2=\pi[f(x)]^2.$$

Таким образом, площадь поперечного сечения тела, которую в предыдущем пункте мы обозначали $F(x)$, в данном случае равна $\pi[f(x)]^2$. Поэтому искомый объем V тела вращения определяется формулой

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx.$$

Примеры:

1. Определить объем шара по данному его радиусу R. Половиной шара будет тело, полученное от вращения заштрихованной четверти круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=R^2$, вокруг оси X_1X (рис. 228).

В данном случае кривая AB является частью графика функции $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Поэтому, обозначая объем шара буквой V, получим, что

$$\frac{1}{2}V=\int_0^R \pi(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Отсюда

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

2. Определить объем V тела, полученного от вращения вокруг оси X_1X фигуры, ограниченной осью X_1X и одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ (рис. 229).

$$V = \int_0^\pi \pi \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\pi^2 \text{ (см. стр. 752 и пример 6 на стр. 746).}$$

3. Рассматривая конус как тело, полученное от вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов, определите самостоятельно объем конуса по данному его радиусу основания R и высоте H.

Отв. $\pi R^2 H$.

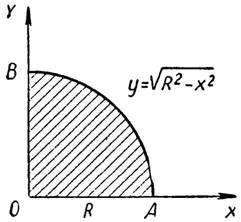


Рис. 228.

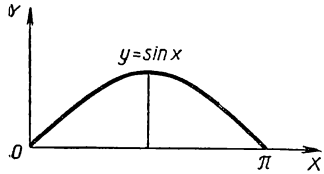


Рис. 229.

С помощью интегрирования можно вычислять длины дуг кривых линий, площади кривых поверхностей, центры тяжести плоских фигур и тел, массы неоднородных тел, моменты инерции. Решения всех этих и многих других задач, имеющих практическое или теоретическое значение, излагаются в учебниках по интегральному исчислению.

ГЛАВА XLIII

НЕКОТОРЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. МНОЖЕСТВА И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Понятие множества относится к числу неопределяемых математических понятий и может быть разъяснено только на примерах. Так, можно говорить о множестве всех книг, составляющих данную библиотеку (конечное множество), множестве точек данной окружности (бесконечное множество), множестве решений данного уравнения. Это последнее множество может быть *конечным*, *бесконечным* и даже *пустым*. Например, множество решений уравнения $x^2-8x+15=0$ — конечное, множество решений уравнения $\sin x=0$ — бесконечное, а множество действительных решений уравнения $\sin x=2$ — пустое, так как это уравнение не имеет ни одного действительного решения.

Книги данной библиотеки, точки данной окружности, решения данного уравнения называются *элементами* соответствующего множества.

Другими бесконечными множествами являются, например, множество всех натуральных чисел, множество всех четных чисел, множество всех простых чисел, множество всех рациональных чисел, множество всех иррациональных чисел, множество всех различных прямоугольных треугольников с гипотенузой, равной единице, множество всех различных квадратных уравнений с действительными числовыми коэффициентами и т. д.

Теория множеств есть учение об общих свойствах множеств, *преимущественно бесконечных*.

Для того чтобы ввести понятие об эквивалентных множествах, необходимо сначала ввести понятие о взаимно однозначном соответствии между элементами двух множеств.

Говорят, что между элементами двух множеств имеет место взаимно однозначное соответствие, если каждому элементу первого множества можно поставить в соответствие один и только один элемент второго и, наоборот, каждому элементу второго — один и только один элемент первого.

Поясним это на примерах.

Мы уже знаем, что каждому действительному числу соответствует определенная точка числовой оси и, наоборот, каждой точке числовой оси соответствует определенное действительное число. Имея это в виду, говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси имеет место взаимно однозначное соответствие.

Приведем другой пример взаимно однозначного соответствия.

Между множеством всех целых положительных чисел и множеством целых отрицательных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, каждому целому положительному числу можно поставить в соответствие число, ему противоположное и наоборот.

Определение. ***Если между элементами двух множеств можно установить взаимно однозначное соответствие, то такие два множества называются эквивалентными.***

Пример 1. Множество точек числовой оси и множество действительных чисел эквивалентны. Каждой точке числовой оси соответствует одно и только одно определенное действительное число и, наоборот, каждому действительному числу соответствует одна и только одна определенная точка числовой оси.

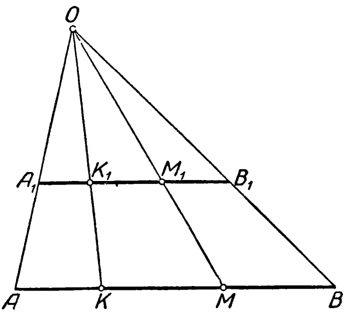


Рис. 230.

Пример 2. Множество точек отрезка AB (рис. 230) и множество точек отрезка A_1B_1 эквивалентны.

Каждой точке M отрезка AB можно поставить в соответствие одну и только одну точку M_1 отрезка A_1B_1, лежащую на луче OM. Наоборот, каждой точке K_1 отрезка A_1B_1 можно поставить в соответствие одну и только одну точку K отрезка AB, лежащую на луче OK.

Пример 3. Множество всех целых положительных чисел

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \ldots$$

эквивалентно множеству всех положительных четных чисел

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ \ldots.$$

В самом деле, мы можем поставить в соответствие каждому целому числу число, вдвое большее его. Наоборот, каждому четному числу мы можем поставить в соответствие число, вдвое меньшее его.

Взаимно однозначное соответствие между рассмотренными в примере 3 множествами мы можем записать в виде следующей таблицы:

$1 \longleftrightarrow 2$	$70 \longleftrightarrow 140$
$2 \longleftrightarrow 4$	$71 \longleftrightarrow 142$
$3 \longleftrightarrow 6$	. . . . . .
$4 \longleftrightarrow 8$	. . . . . .
$5 \longleftrightarrow 10$	$1001 \longleftrightarrow 2002$
$6 \longleftrightarrow 12$	. . . . . .
. . . .	. . . . . .

Относительно двух эквивалентных бесконечных множеств говорят также, что они имеют одинаковую мощность. Другими словами, два бесконечных множества имеют одинаковую мощность, если эти множества эквивалентны.

§ 2. СЧЕТНЫЕ МНОЖЕСТВА И МНОЖЕСТВА МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА*

Множество, эквивалентное множеству всех целых положительных чисел, называется счетным множеством. Например, множество всех положительных четных чисел есть счетное множество. Множество всех положительных нечетных чисел также будет счетным, так как оно тоже эквивалентно множеству всех целых положительных чисел.

Так как всякое множество эквивалентно самому себе, то и множество целых положительных чисел также является счетным множеством.

Множество, эквивалентное множеству всех действительных чисел, называется множеством мощности континуума.

Множество точек числовой оси эквивалентно множеству действительных чисел. Поэтому множество точек числовой оси также имеет мощность континуума.

Приведем еще примеры множеств, имеющих мощность континуума.

Пример 1. Множество точек полуокружности имеет мощность континуума. В самом деле, легко убедиться в том, что множество точек полуокружности эквивалентно множеству точек числовой оси. Каждой точке M_1 полуокружности (рис. 231) можно поставить в соответствие одну и только одну точку M

---

* Латинское слово «**continuum**» означает непрерывное. Понятие континуум употребляется в математике для обозначения образований, обладающих известными свойствами непрерывности. Множество действительных чисел является непрерывным образованием. Поэтому-то мощность множества действительных чисел и называется множеством мощности контйнуума.

числовой оси, лежащую на луче OM_1. Наоборот, каждой точке K числовой оси можно поставить в соответствие одну и только одну точку K_1 полуокружности, лежащую на луче OK.

Пример 2. Множество точек любого отрезка прямой имеет мощность континуума.

Доказательство. Множество точек отрезка прямой эквивалентно множеству точек полуокружности, построенной на этом отрезке как на диаметре.

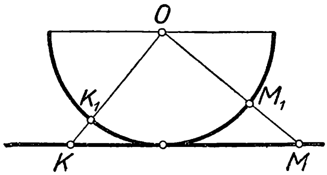


Рис. 231.

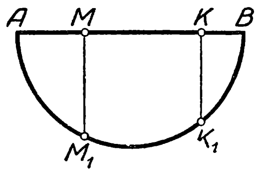


Рис. 232.

В самом деле, каждой точке M отрезка AB (рис. 232) можно поставить в соответствие одну и только одну определенную точку M_1 полуокружности, лежащую на перпендикуляре к прямой AB, восставленном из точки M. Далее, каждой точке K_1 полуокружности можем поставить в соответствие одну и только одну точку K отрезка AB, лежащую на перпендикуляре, опущенном из точки K_1 на прямую AB.

Но ранее было доказано, что множество точек полуокружности имеет мощность континуума. Следовательно, и мощность множества точек любого отрезка прямой также имеет мощность континуума, что и требовалось доказать.

Так как всякое множество эквивалентно самому себе, то множество действительных чисел также имеет мощность континуума.

§ 3. О СРАВНЕНИИ МОЩНОСТЕЙ БЕСКОНЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ

Понятие мощности множеств ценно потому, что мощности бесконечных множеств поддаются сравнению. Покажем, как это делается.

Для двух бесконечных множеств, которые для краткости мы обозначим буквами A и B, возможны лишь следующие три случая:

1. Во множестве A есть часть, эквивалентная B, но в B нет части, эквивалентной A. В этом случае говорят, что мощность множества A больше мощности множества B.

2. Во множестве B есть часть, эквивалентная множеству A, но в A нет части, эквивалентной B. В этом случае говорят, что мощность A меньше мощности B.

3. Во множестве A есть часть, эквивалентная B, и в B есть часть, эквивалентная A. В этом случае говорят, что мощность множества A равна мощности множества B.

Такого же случая, чтобы в A не было части, эквивалентной B, и в B не было части, эквивалентной A, быть не может. (Это утверждение доказано; но его доказательство очень сложное, а потому здесь не излагается.)

Теперь приведем один пример на сравнение мощностей бесконечных множеств.

Во множестве действительных чисел есть часть, эквивалентная множеству натуральных чисел, а во множестве натуральных чисел нет части, эквивалентной множеству действительных чисел (доказательства этого мы не приводим).

Поэтому мощность множества действительных чисел, т. е. мощность континуума, больше мощности множества натуральных чисел, т. е. мощности счетного множества.

Мощность счетного множества есть наименьшая мощность, которую может иметь бесконечное множество (всякое бесконечное множество содержит часть, эквивалентную счетному множеству).

Доказано, что существуют бесконечные множества, имеющие мощности бо́льшие, чем мощность континуума.

Вопрос о том, существуют или не существуют бесконечные множества, имеющие мощность, бо́льшую мощности счетного множества, но меньшую мощности континуума, до сих пор остается не решенным.

Из всего изложенного видно, что бесконечность не есть только голое, безразличое отрицание конечного. Бесконечные множества могут существенно отличаться друг от друга по своим мощностям.

Примем к сведению без доказательства следующее.

1. Множество рациональных чисел эквивалентно множеству натуральных чисел, т. е. есть счетное множество.

2. Множество же одних иррациональных чисел не является счетным, а имеет такую же мощность, как и множество всех действительных чисел, т. е. мощность континуума.

3. Из множества, имеющего мощность континуума, можно выделить сколько угодно бесконечных счетных множеств и при этом оставшиеся элементы составят бесконечное множество опять же мощности континуума. Теория множеств, как наука, создана впервые в 70-х годах прошлого столетия немецким математиком Г. Кантором (1845—1918).

С теорией множеств можно ознакомиться, например, по книге А. Н. Колмогорова и С. Ф. Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа».

ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

1. ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Системой счисления называется совокупность правил и приемов записей и наименований чисел.

Особо важную роль играют позиционные системы счисления. В позиционной системе счисления значение цифры изменяется с изменением ее положения в записи числа. Одним из представителей позиционных систем счисления является общепринятая десятичная система. Представителем непозиционных систем счисления является, например, известная римская система. Непозиционные системы неудобны и в настоящее время почти не употребляются.

Но прежде чем приступить к изучению различных позиционных систем, поясним, почему они в настоящее время представляют особый интерес.

Как известно, создание и широкое применение разнообразных электронных вычислительных машин обеспечило резкий подъем науки и техники. Дальнейшее совершенствование этих машин и их служение достижению новых, еще более огромных успехов в науке и технике имеет необычайно широкие перспективы. В настоящее время электронными вычислительными машинами владеют и пользуются очень многие организации, учреждения и предприятия.

Среди разнообразных электронных вычислительных машин важное место занимают так называемые электронные цифровые вычислительные машины* (ЭЦВМ). Для решения задач на этих цифровых машинах используются в основном следующие системы счисления: десятичная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная. Сами операции в большинстве таких цифровых машин выполняются в двоичной системе счисления. Вот почему знакомство с позиционными системами, отличными от десятичной, не может не представлять интереса для изучающего математику.

---

* Эти машины способны выполнять сотни тысяч арифметических действий в секунду. С их помощью решаются сложные математические задачи с большим объемом вычислений, исчисляемых миллионами и даже сотнями миллионов арифметических действий. Раньше, до появления ЭЦВМ, такие задачи были практически неразрешимыми.

2. ДЕСЯТИЧНАЯ ПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В десятичной системе счисления используются для записей чисел десять различных знаков-цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, изображающих десять последовательных целых чисел. Число десять изображается уже двумя цифрами «10». Любое другое число записывается в десятичной системе в виде некоторого набора десятичных цифр, разделенного запятой на целую и дробную части. В десятичной системе счисления значение цифр изменяется с изменением ее местоположения в записи числа. Например, в числе 7784,75 первая слева цифра 7 обозначает количество тысяч, вторая цифра 7 обозначает число сотен и, наконец, цифра 7, стоящая после запятой, обозначает количество десятых долей. Поэтому десятичную систему и называют позиционной. Значение цифры зависит от ее местоположения (позиции) в последовательности цифр, изображающей данное число. Всякая другая система счисления, обладающая таким же свойством, тоже будет позиционной.

Десятичное число 7784, 75 есть сокращенная запись выражения $7\cdot 10^3+7\cdot 10^2+8\cdot 10+4+7\cdot 10^{-1}+5\cdot 10^{-2}$. В общем случае десятичное число $a_n\, a_{n-1}\dots a_1\, a_0,\ a_{-1}\, a_{-2}\dots a_{-m}$ есть сокращенная запись выражения

$$a_n\, 10^n+a_{n-1}\, 10^{n-1}+\dots+a_1\, 10+a_0+a_{-1}\, 10^{-1}+$$
$$+a_{-2}\, 10^{-2}+\dots+a_{-m}\, 10^{-m}.$$

В этой системе счисления для записи чисел используются, как уже отмечалось, десять различных цифр, и потому она называется десятичной. Число «десять» называется основанием десятичной системы.

Названия чисел в десятичной системе построены из названий цифр и названий некоторых чисел (десять, сто, тысяча, миллион, миллиард и т. д.). Например, двенадцать — сокращенное «два и десять»; двадцать — сокращенное «два по десять»; восемьдесят — сокращенное «восемь десятков»; тридцать пять — сокращенное «три по десять и пять» и т. д.

Широкое распространение десятичной системы объясняется тем, что человек имеет десять пальцев на руках. Древний человек считал по пальцам, считал десятками. Однако имеются в истории примеры использования позиционных систем с другими основаниями, например с основанием двенадцать, шестьдесят.

Подобно десятичной системе счисления можно построить любую другую p-ичную систему (p — целое положительное число).

3. ДВЕНАДЦАТЕРИЧНАЯ ПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА

В двенадцатеричной системе для изображения чисел надо иметь 12 цифр. Для первых десяти цифр оставляются те же значки (цифры) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, что и в десятичной системе, а для следующих двух целых чисел вводятся значки, например, $\bar{0}$ и $\bar{1}$. Для этих значков $\bar{0}$ и $\bar{1}$ оставим десятичные названия «десять» и «одиннадцать».

Основание системы «двенадцать» будем называть «дюжиной». В позиционной двенадцатеричной системе число «двенадцать» должно изображаться символом «10».

В рассматриваемой системе счисления можно ввести, например, такие названия чисел:

11 — дюжина да один,
12 — дюжина да два,
$1\bar{1}$ — дюжина да одиннадцать,
20 — две дюжины,
$2\bar{0}$ — две дюжины да десять,
$4\bar{1}$ — четыре дюжины да одиннадцать,
100 — дюжина дюжин (или гросс, наподобие «ста» в десятичной системе),
$10\bar{1}$ — гросс да одиннадцать и т. д.

Чтобы облегчить понимание записей в двенадцатеричной системе, приведем еще следующую таблицу:

Запись чисел в «дюжинной» системе	Расшифровка тех же чисел в десятичной системе	Запись тех же чисел в десятичной системе
37	$3 \cdot 12 + 7$	43
50	$5 \cdot 12 + 0$	60
69	$6 \cdot 12 + 9$	81
$3\bar{0}$	$3 \cdot 12 + 10$	46
$4\bar{1}$	$4 \cdot 12 + 11$	59
279	$2 \cdot 12^2 + 7 \cdot 12 + 9$	381
1000	$1 \cdot 12^3 + 0 \cdot 12^2 + 0 \cdot 12 + 0$	1728
$27\bar{1}8$	$2 \cdot 12^3 + 7 \cdot 12^2 + 11 \cdot 12 + 8$	4604

Вводить названия чисел в каждой позиционной системе нет необходимости. Позиционными системами, отличными от десятичной, можно пользоваться и без введения для чисел особых для каждой системы названий.

Чтобы отличить запись числа в какой-нибудь системе от записи в десятичной системе, можно пользоваться указателем системы.

Например, запись $514_{(12)}$ означает число, записанное в двенадцатеричной системе. Запись $514_{(8)}$ означает запись в восьмеричной системе и т. д.

Легко убедиться, что $514_{(12)} = 736$; $514_{(8)} = 332$.

Запись $514_{(12)}$ можно прочитать так: «пятьсот четырнадцать в двенадцатеричной системе». Запись $514_{(8)}$ — «пятьсот четырнадцать в восьмеричной системе» и т. д.

Но можно этот указатель системы счисления не писать, а лишь помнить его.

4. ВОСЬМЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Восьмеричная система счисления широко используется при подготовке задач для решения на электронных вычислительных цифровых машинах.

В этой системе для записи чисел используются восемь различных цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, которые обозначают последовательно целые числа от нуля до семи.

Число восемь (основание системы) обозначается двумя цифрами в виде «10». Любое другое число можно представить в виде определенной последовательности из восьмеричных цифр, разделенных запятой на целую и дробную части.

Например, число $213_{(8)}$ есть сокращенная запись выражения $2\cdot10^2+1\cdot10^1+3$ (10 обозначает восемь). Для перевода этого числа в десятичную систему нужно в последнем выражении вместо 10 поставить 8 и произвести необходимые вычисления (в десятичной системе). Будем иметь:

$$2\cdot8^2+1\cdot8+3=128+8+3=139.$$

Теперь рассмотрим обратный перевод. Пусть требуется перевести в восьмеричную систему десятичное число 748.

Разделим 748 на 8.

$$\begin{array}{r|l} 748 & 8 \\ \underline{72} & \overline{93} \\ 28 & \\ \underline{24} & \\ 4 & \end{array}$$

Результат этого деления показывает, что в числе 748 содержится четыре единицы и 93 восьмерки.

Разделим 93 на 8.

$$\begin{array}{r|l} 93 & 8 \\ \underline{8} & \overline{11} \\ 13 & \\ \underline{8} & \\ 5 & \end{array}$$

Этот результат показывает, что в 93 единицах 2-го разряда восьмеричной системы содержится 5 единиц 2-го разряда и 11 единиц 3-го разряда.

Разделим 11 на 8.

$$\begin{array}{r|l} 11 & 8 \\ \underline{8} & \overline{1} \\ 3 & \end{array}$$

В 11 единицах 3-го разряда восьмеричной системы содержится три единицы 3-го разряда и одна единица 4-го разряда.

Следовательно,

$$748=1354_{(8)}.$$

Произведенное выше последовательное деление на 8 можно расположить кратко так:

$$
\begin{array}{r|l}
748 & 8 \\
\cline{2-2}
\underline{72} & \begin{array}{r|l} 93 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{8} & \begin{array}{r|l} 11 & 8 \\ \cline{2-2} \underline{8} & 1 \\ 3 & \end{array} \\ 13 & \\ \underline{8} & \\ 5 & \end{array} \\
28 & \\
\underline{24} & \\
4 &
\end{array}
$$

Это последовательное деление на 8, т. е. на основание новой системы, продолжается до тех пор, пока частное не окажется меньше восьми.

Чтобы производить арифметические действия в восьмеричной системе, нужно пользоваться таблицами сложения и умножения, составленными для восьмеричной системы.

Восьмеричная таблица сложения

+	0	1	2	3	4	5	6	7	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	10
1	1	2	3	4	5	6	7	10	11
2	2	3	4	5	6	7	10	11	12
3	3	4	5	6	7	10	11	12	13
4	4	5	6	7	10	11	12	13	14
5	5	6	7	10	11	12	13	14	15
6	6	7	10	11	12	13	14	15	16
7	7	10	11	12	13	14	15	16	17
10	10	11	12	13	14	15	16	17	20

Правило пользования таблицей сложения можно проиллюстрировать на примерах. Пусть требуется, например, сложить 5 и 7. Находим строку таблицы, в левой клетке которой стоит 5, и находим столбец, в верхней клетке которого стоит 7. На пересечении найденных строки и столбца прочитаем ответ 14. Этой же таблицей можно пользоваться и для вычитания. Требуется, например, вычесть 6 из 12. Ищем строку, в левой клетке которой стоит 6, и в этой строке находим столбец с числом 12. Смотрим на верхнюю цифру этого столбца, получаем ответ 4.

При помощи восьмеричной таблицы сложения можно складывать и вычитать восьмеричные числа по таким же правилам, как и в десятичной системе счисления.

Примеры:

Сложение

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 427{,}76 \\ 75{,}47 \end{array} \\
\hline
525{,}45
\end{array}
$$

Вычитание

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r} 1475{,}01 \\ 776{,}65 \end{array} \\
\hline
476{,}14
\end{array}
$$

Восьмеричная таблица умножения

×	0	1	2	3	4	5	6	7	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	10
2	0	2	4	6	10	12	14	16	20
3	0	3	6	11	14	17	22	25	30
4	0	4	10	14	20	24	30	34	40
5	0	5	12	17	24	31	36	43	50
6	0	6	14	22	30	36	44	52	60
7	0	7	16	25	34	43	52	61	70
10	0	10	20	30	40	50	60	70	100

Правило получения произведения по двум сомножителям по восьмеричной таблице умножения не требует пояснений. Используя восьмеричную таблицу умножения и сложения и руководствуясь правилами, которые применяются в десятичной системе счисления, можно производить умножение и деление восьмеричных чисел.

Примеры:

Умножение

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 126{,}17 \\ 4{,}15 \end{array} \\
\hline
657\,13 \\
1261\,7 \\
53074 \\
\hline
552{,}3503
\end{array}
$$

Деление

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{r}
-\,3366566{,}15 \\
1635\phantom{566{,}15} \\
\hline
-\,15315\phantom{66{,}15} \\
14513\phantom{66{,}15} \\
\hline
-\,6026\phantom{6{,}15} \\
5327\phantom{6{,}15} \\
\hline
-\,4776\phantom{{,}15} \\
3472\phantom{{,}15} \\
\hline
-\,13041 \\
12656 \\
\hline
-\,1635 \\
1635 \\
\hline
\end{array}
&
\begin{array}{l}
1635 \\
\hline
1732{,}61
\end{array}
\end{array}
$$

5. ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА

Двоичная система счисления особенно важна. В двоичной системе, как уже отмечалось, выполняются операции почти во всех типах ЭЦВМ.

Числа, над которыми машина должна выполнить нужные действия по составленной программе, сначала переводятся в двоичную систему. Для ввода этих чисел в машину служат перфорированные карты или лента, размеченные таким образом, что каждому разряду числа соответствует определенное место на перфокарте. Если в этом месте пробито отверстие, то в соответствующем разряде стоит 1, если же отверстия нет, то в разряде стоит нуль. Места для пробивки разрядов на карте располагаются для каждого числа слева направо. Пробивка отверстий производится вручную на специальном перфораторе. После этого карты вводятся в специальное электромеханическое устройство вычислительной машины.

В двоичной системе для записи чисел употребляются только цифры 0 и 1. Число два (основание системы) изображается двумя цифрами так же, как и основание любой другой системы, а именно символом «10».

Символ «10» в двенадцатеричной системе обозначает число двенадцать, в восьмеричной — восемь, в двоичной — два, в троичной — три и т. д.

Целые числа, начиная с трех и кончая десятью, изображаются в двоичной системе соответственно символами:

$$11;\ 100;\ 101;\ 110;\ 111;\ 1000;\ 1001;\ 1010.$$

Любое число, записанное в двоичной системе, легко перевести в десятичную систему.

Например,

$$1101_{(2)} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 = 13;$$

$$101011_{(2)} = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2 + 1 = 43;$$

$$11011011101 = 1\cdot 2^{10} + 1\cdot 2^9 + 0\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 1\cdot 2^6 + \\ + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 = 1757;$$

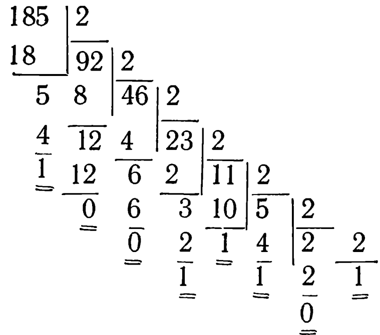
$$1101{,}11 = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2 + 1 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = \\ = 8 + 4 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 13{,}75.$$

Теперь покажем перевод целого числа* из десятичной системы в двоичную.

Пусть требуется изобразить число 185 в двоичной системе. Выполним последовательное деление числа 185 на 2, т. е. на основание двоичной системы.

---

* Как переводить дробные числа, поясняется ниже.



Следовательно, число 185, данное в десятичной системе, изобразится в двоичной системе так: 10111001.

Действительно,

$$1\cdot 2^7+0\cdot 2^6+1\cdot 2^5+1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+\\+1=185.$$

Это разложение числа по степеням основания 2 можно записать в двоичной системе так:

$$1\cdot 10^{111}+0\cdot 10^{110}+1\cdot 10^{101}+1\cdot 10^{100}+1\cdot 10^{11}+\\+0\cdot 10^{10}+0\cdot 10^{1}+1.$$

Здесь «10» означает два. Показатели степени также записаны в двоичной системе. Например, 111 означает 7, а 110 означает 6 и т. д.

В двоичной системе число изображается бо́льшим количеством разрядов по сравнению с десятичной. Например, число 185 в десятичной системе является трехразрядным, а в двоичной — восьмиразрядным (10111001). Но это обстоятельство не создает каких-нибудь трудностей.

Для того чтобы с двоичными числами можно было производить арифметические действия, необходимо знать двоичные таблицы сложения и умножения. Эти таблицы имеют очень малый объем и легко запоминаются.

Двоичная таблица сложения

$0+0=0$
$0+1=1$
$1+0=1$
$1+1=10$

Двоичная таблица умножения

$0\times 0=0$
$0\times 1=0$
$1\times 0=0$
$1\times 1=1$

Используя эти таблицы и применяя правила, известные из «десятичной арифметики», можно производить сложение, вычитание, умножение и деление двоичных чисел.

Примеры:

Сложение

$$\begin{array}{r} 10101{,}101\\ +\quad 111{,}001\\ \hline 11100\,110 \end{array}$$

Вычитание

$$\begin{array}{r} 11011{,}01\\ -\quad 111{,}11\\ \hline 10011{,}10 \end{array}$$

Умножение

$$
\begin{array}{r}
\times\ 1100111{,}1101\\
11{,}011\\
\hline
1100111\ 1101\\
11001111\ 101\\
1100111110\ 1\\
11001111101\\
\hline
101011110{,}0101111
\end{array}
$$

Деление

$$
\begin{array}{l|l}
-\,11011101101 & 1001\\
1001 & \overline{11000101}\\
\cline{1-1}
-1001 & \\
1001 & \\
\cline{1-1}
-1011 & \\
1001 & \\
\cline{1-1}
1001 & \\
1001 & \\
\cline{1-1}
= &
\end{array}
$$

Из этих примеров видно, что арифметические действия в двоичной системе выполняются особенно просто. Так, при умножении множимое переписывается без изменения «со сдвигами» столько раз, сколько раз цифра 1 содержится во множителе. Деление выполняется также просто. В частном получаются только цифры 0 и 1, которые определяются очень легко. Сложение и вычитание в двоичной системе выполняются также проще, чем в других системах. Но не в этом заключается главное решающее достоинство двоичной системы для конструкции электронных цифровых машин. Чтобы машина работала, например, в десятичной системе, она должна была бы иметь десять различных устойчивых состояний, соответствующих десяти различным цифрам 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 десятичной системы. При двоичной же системе машине надо иметь только два устойчивых состояния*, соответствующих цифрам 0 и 1 двоичной системы. Создание физических элементов, имеющих больше чем два различных устойчивых состояния, труднее, чем элементов с двумя устойчивыми состояниями. В этом и заключается огромное преимущество двоичной системы для конструкции ЭЦВМ.

6. ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА

Если основание системы счисления больше десяти, то для записи чисел общепринятых (арабских) цифр будет недостаточно. Число цифр должно равняться числу, являющемуся основанием данной системы. Например, для шестнадцатеричной системы можно принять следующие 16 цифр и их названия:

0 ... нуль	4 ... четыре	8 ... восемь	$\bar{2}$ ... двенадцать
1 ... один	5 ... пять	9 ... девять	$\bar{3}$ ... тринадцать
2 ... два	6 ... шесть	$\bar{0}$ ... десять	$\bar{4}$ ... четырнадцать
3 ... три	7 ... семь	$\bar{1}$ ... одиннадцать	$\bar{5}$ ... пятнадцать

Здесь 10 означает шестнадцать.

---

* Например, наличие заряда одного и другого знака, наличие импульса и его отсутствие и т. п.

Приведем пример перевода шестнадцатеричного изображения числа в десятичное:

$$5\bar{5}9_{(16)} = 5 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16 + 9 = 1529.$$

Теперь приведем два примера обратного перевода.

$$\begin{array}{r|r|l}
-\,1111 & 16 & \\
\underline{96} & 69 & 16 \\
-\,151 & \underline{64} & \underline{\underline{4}} \\
\underline{144} & \underline{\underline{5}} & \\
\underline{\underline{7}} & &
\end{array}
\qquad \text{Следовательно, } 1111 = 457_{(16)}.$$

$$\begin{array}{r|r|l}
1000 & 16 & \\
\underline{96} & 62 & 16 \\
40 & \underline{48} & \underline{\underline{3}} \\
\underline{32} & \underline{\underline{14}} & \\
\underline{\underline{8}} & &
\end{array}
\qquad \text{Следовательно, } 1000 = 3\bar{4}8.$$

Здесь $\bar{4}$ является цифрой 2-го разряда и означает четырнадцать.

Перевод сделан правильно. Действительно,

$$3\bar{4}8 = 3 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16 + 8 = 1000.$$

В качестве дополнительной иллюстрации приведем таблицу записей небольшого ряда чисел в различных позиционных системах счисления:

Десятичная	Двоичная	Троичная	Пятеричная	Восьмеричная	Шестнадцатеричная
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
2	10	2	2	2	2
3	11	10	3	3	3
4	100	11	4	4	4
5	101	12	10	5	5
6	110	20	11	6	6
7	111	21	12	7	7
8	1000	22	13	10	8
9	1001	100	14	11	9
10	1010	101	20	12	$\bar{0}$
11	1011	102	21	13	$\bar{1}$
12	1100	110	22	14	$\bar{2}$
13	1101	111	23	15	$\bar{3}$
14	1110	112	24	16	$\bar{4}$
15	1111	120	30	17	$\bar{5}$
16	10000	121	31	20	10
17	10001	122	32	21	11
18	10010	200	33	22	12
19	10011	201	34	23	13
20	10100	202	40	24	14
100	1100100	10201	400	144	64

7. ПЕРЕВОД ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ НЕДЕСЯТИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ДРУГУЮ НЕДЕСЯТИЧНУЮ

Мы уже рассматривали перевод целых чисел из недесятичной системы в десятичную и перевод из десятичной в недесятичную.

Поэтому перевод из одной недесятичной системы в другую недесятичную можно было бы сделать так: сначала перейти от данной недесятичной системы к десятичной, а затем из десятичной перейти к требуемой недесятичной.

Покажем это на примере.

$$27_{(8)} = 2 \cdot 8 + 7 = 23.$$

```
23 | 2
2  |----
--  11 | 2
 3  10 |---
 2  --   5 | 2
 -   1   4 |---
 1       -   2 | 2
         1   2 |---
             -   1
             0
```

Отсюда $23_{(10)} = 10111_{(2)}$. Следовательно $27_{(8)} = 10111_{(2)}$.

Однако делать перевод изложенным способом нецелесообразно, так как его можно делать непосредственно, т. е. без использования десятичной системы.

Покажем на примерах, как это нужно делать.

Пример 1. В восьмеричной системе некоторое число имеет изображение 2704. Найти изображение этого числа в пятеричной системе.

Произведем последовательное деление числа $2704_{(8)}$ на 5, делая все расчеты в восьмеричной системе:

```
2704(8) | 5
24      |-----
--        447 | 5
 30       43  |----
 24       ---   73 | 5
 --        17   5  |----
  44       17   --   13 | 5
  43       --   23   12 |---
  --        0   17   --   2 .
   1            --    1
                 4
```

Следовательно, $2704_{(8)} = 21401_{(5)}$.

Пояснения: $27_{(8)} = 23$; $4 \cdot 5 = 24_{(8)}$; $30_{(8)} = 24$; $44_{(8)} = 36$; $5 \cdot 7 = 43_{(8)}$.

Пример 2. Число $27_{(8)}$ изобразить в двоичной системе:

```
27 | 2
2  |----
--   13 | 2
 7   12 |---
 6   --   5 | 2
 -    1   4 |---
 1        -   2 | 2
          1   2 |---
              -   1 .
              0
```

Следовательно, $27_{(8)} = 10111_{(2)}$.

Пример 3. Число $11011_{(2)}$ изобразить в восьмеричной системе.

Произведем последовательное деление числа 11011 на 8, делая расчеты в двоичной системе:

$$8 = 1000_{(2)};$$

$$\begin{array}{r|l} 11011 & 1000 \\ \underline{1000} & \underline{\underline{11}} \\ 1011 & \\ \underline{1000} & \\ \underline{\underline{11}} & \end{array}$$

$$11_{(2)} = 3.$$

Следовательно, $11011_{(2)} = 33_{(8)}$.

Пример 4. Число $10011110_{(2)}$ изобразить в восьмеричной системе.

$$8 = 1000_{(2)}.$$

Расчет ведем в двоичной системе:

$$\begin{array}{r|r|l} 10011110 & 1000 & \\ \underline{1000} & 10011 & 1000 \\ 1111 & \underline{1000} & \underline{\underline{10}} \\ \underline{1000} & \underline{\underline{11}} & \\ 1110 & & \\ \underline{1000} & & \\ \underline{\underline{110}} & & \end{array}$$

$$10_{(2)} = 2.$$
$$11_{(2)} = 3.$$
$$110_{(2)} = 6.$$

Следовательно, $10011110_{(2)} = 236_{(8)}$.

Пример 5. Число $10110111_{(2)}$ изобразить в пятеричной системе:

$$5 = 101_{(2)}$$

$$\begin{array}{r|r|l} 10110111 & 101 & \\ \underline{101} & 100100 & 101 \\ 101 & \underline{101} & \underline{\underline{111}} \\ \underline{101} & 1000 & \\ \underline{\underline{11}} & \underline{101} & \\ & 110 & \\ & \underline{101} & \\ & \underline{\underline{1}} & \end{array}$$

$$10_{(2)} = 2.$$
$$111_{(2)} = 7 = 12_{(5)}.$$
$$11_{(2)} = 3.$$

Следовательно, $10110111_{(2)} = 1213_{(5)}$.

8. ПЕРЕВОД ПРАВИЛЬНЫХ ДРОБЕЙ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ДРУГУЮ

Сначала напомним на примерах смысл дробей, записанных в разных системах счисления:

$$0{,}34375 = 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-5};$$
$$0{,}26_{(8)} = 2 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2};$$
$$0{,}1402_{(5)} = 1 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{-2} + 0 \cdot 5^{-3} + 2 \cdot 5^{-4};$$
$$0{,}101011_{(2)} = 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6}.$$

Теперь перейдем к рассмотрению вопроса о переводе правильных дробей из одной системы счисления в другую. Способ этого перевода изучим на примерах.

Пример 1. Правильную десятичную дробь 0,34375 перевести в восьмеричную систему.

Увеличим данную дробь 0,34375 в 8 раз:

$$\begin{array}{r} 0,34375 \\ \times \quad 8 \\ \hline 2,75000 \end{array}$$

В полученном произведении целая часть содержит две единицы. Но эти две целые единицы мы должны рассматривать как две восьмые доли, так как их мы получили умножением данной десятичной дроби на 8.

Таким образом, восьмеричное изображение данной десятичной дроби должно иметь первой цифрой после запятой цифру 2.

Теперь умножим дробь 0,75000 на 8:

$$\begin{array}{r} 0,75000 \\ \times \quad 8 \\ \hline 6,00000 \end{array}$$

Полученные 6 целых единиц образовались в результате двух последовательных умножений на число 8. Таким образом, это число 6 мы должны рассматривать как 6 не целых единиц, а как шесть шестьдесят четвертых долей. Следовательно, восьмеричное изображение данной дроби 0,34375 должно иметь второй цифрой после запятой цифру 6.

Так как в последнем произведении 6,00000 все знаки после запятой являются нулями, на этом процесс перевода заканчивается и искомым изображением числа 0,34375 в восьмеричной системе будет 0,26.

Итак, $0,34375 = 0,26_{(8)}$.

Проверка. $0,26_{(8)} = 2 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2} = \frac{1}{4} + \frac{3}{32} = \frac{11}{32} = 0,34375$.

Краткая схема перевода без объяснений:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{r}{0,34375} \\ \multicolumn{2}{r}{\times \quad 8} \\ \hline \underline{\underline{2}} & 75000 \\ & \times \quad 8 \\ \hline \underline{\underline{6}} & 00000 \end{array} \qquad 0,34375 = 0,26_{(8)}.$$

Пример 2. Дробь 0,816 изобразить в пятеричной системе.

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{r}{0,816} \\ \multicolumn{2}{r}{\times \; 5} \\ \hline \underline{\underline{4}} & 080 \\ & \times 5 \\ \hline \underline{\underline{0}} & 400 \\ & \times 5 \\ \hline \underline{\underline{2}} & 000 \end{array}$$

$0,816 = 0,402_{(5)}$.

Проверка. $0,402_{(5)} = 4 \cdot 5^{-1} + 0 \cdot 5^{-2} + 2 \cdot 5^{-3} =$
$= \frac{4}{5} + \frac{2}{125} = \frac{102 \cdot 8}{125 \cdot 8} = \frac{816}{1000} = 0,816$.

Пример 3. Дробь 0,34375 изобразить в двоичной системе.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{r}{0,34375} \\
\multicolumn{2}{r}{\times \quad 2} \\
\hline
\underline{\underline{0}} & 68750 \\
 & \times \quad 2 \\
\hline
\underline{\underline{1}} & 37500 \\
 & \times \quad 2 \\
\hline
\underline{\underline{0}} & 75000 \\
 & \times \quad 2 \\
\hline
\underline{\underline{1}} & 50000 \\
 & \times \quad 2 \\
\hline
\underline{\underline{1}} & 00000
\end{array}
$$

Следовательно, $0,34375 = 0,01011_{(2)}$.

Проверка. $0,01011_{(2)} = 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{11}{32} = 0,34375.$

Пример 4. Дробь 0,34375 изобразить в шестнадцатеричной системе.

$$
\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{r}{0,34375} \\
\multicolumn{2}{r}{\times \quad 16} \\
\hline
2 & 06250 \\
3 & 4375 \\
\hline
\underline{\underline{5}} & 50000 \\
 & \times \; 16 \\
\hline
3 & 00000 \\
5 & 0000 \\
\hline
\underline{\underline{8}} & 00000
\end{array}
$$

Следовательно, $0,34375 = 0,58_{(16)}$.

Проверка $0,58_{(16)} = 5 \cdot 16^{-1} + 8 \cdot 16^{-2} = \frac{5}{16} + \frac{1}{32} = \frac{11}{32} = 0,34375.$

Пример 5. Двоичную дробь 0,01011 изобразить в восьмеричной системе.

Последовательные умножения на 8 будем производить в двоичной системе, зная, что $8 = 1000_{(2)}$.

$$
\begin{array}{r|r}
\multicolumn{2}{r}{0,01011} \\
\multicolumn{2}{r}{\times \; 1000} \\
\hline
0 & 00000 \\
00 & 0000 \\
000 & 000 \\
10 & 11 \\
\hline
\underline{\underline{10}} & 11000 \\
 & \times \; 1000 \\
\hline
\underline{\underline{110}} & 00000
\end{array}
$$

$10_{(2)} = 2$; $110_{(2)} = 6$.

Следовательно, $0,01011_{(2)} = 0,26_{(8)}$.

(Для проверки см. примеры 1 и 3.)

Пример 6. Число $0{,}26_{(8)}$ изобразить в двоичной системе.

Последовательные умножения на 2 будем производить в восьмеричной системе.

$$
\begin{array}{r|r}
 & 0{,}26 \\
 & \times 2 \\
\hline
\underline{\underline{0}} & 54 \\
 & \times\ 2 \\
\hline
\underline{\underline{1}} & 30 \\
 & \times\ 2 \\
\hline
\underline{\underline{0}} & 60 \\
 & \times\ 2 \\
\hline
\underline{\underline{1}} & 40 \\
 & \times\ 2 \\
\hline
\underline{\underline{1}} & 00
\end{array}
$$

Следовательно, $0{,}26_{(8)} = 0{,}01011_{(2)}$. (Для проверки см. пример 5.)

Замечание. Обратим внимание, что при переводе p-ичной правильной дроби в какую-нибудь другую систему надо последовательные умножения производить в p-ичной системе.

Следует иметь в виду, что при переводе дроби из одной системы в другую процесс последовательных умножений может и не обрываться или обрываться не скоро. В таких случаях нужно обрывать процесс умножения при достижении достаточной точности перевода.

Пример 1. Десятичную дробь 0,12 требуется перевести в восьмеричную систему счисления.

$$
\begin{array}{r|r}
 & 0{,}12 \\
 & 8 \\
\hline
\underline{\underline{0}} & 96 \\
 & 8 \\
\hline
\underline{\underline{7}} & 68 \\
 & 8 \\
\hline
\underline{\underline{5}} & 44 \\
 & 8 \\
\hline
\underline{\underline{3}} & 52 \\
 & 8 \\
\hline
\underline{\underline{4}} & 16 \\
 & 8 \\
\hline
\underline{\underline{1}} & 28
\end{array}
$$

Обрывая процесс после пяти умножений, получим приближенное значение нашей дроби в восьмеричной системе счисления 0,075341.

Если требуется перевести неправильную дробь из одной системы в другую, то отдельно переводят целую и отдельно дробную части.

Пример 2. Десятичное число 158, 34375 перевести в двоичную систему. Сначала переведем целое число 158:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
158 & 2 & & & & & & \\
14 & 79 & 2 & & & & & \\
18 & 6 & 39 & 2 & & & & \\
18 & 19 & 2 & 19 & 2 & & & \\
\underline{\underline{0}} & 18 & 19 & 18 & 9 & 2 & & \\
 & \underline{\underline{1}} & 18 & \underline{\underline{1}} & 8 & 4 & 2 & \\
 & & \underline{\underline{1}} & & \underline{\underline{1}} & 4 & 2 & 2 \\
 & & & & & \underline{\underline{0}} & 2 & 1 \\
 & & & & & & \underline{\underline{0}} &
\end{array}$$

$$158 = 10\,011\,110.$$

Далее, $0{,}34375 = 0{,}01011_{(2)}$ (см. пример 3 на стр. 771). Следовательно,

$$158{,}34375 = 10\,011\,110{,}01011_{(2)}.$$

9. РАЦИОНАЛИЗИРОВАННЫЙ СПОСОБ ПЕРЕВОДА ЧИСЕЛ ИЗ ВОСЬМЕРИЧНОЙ СИСТЕМЫ В ДВОИЧНУЮ И ОБРАТНО

Двоичная система счисления применяется для представления чисел и выполнения операций в большинстве современных машин.

Восьмеричная же система применяется при подготовке данных для работы машины. Восьмеричная система выбрана для целей подготовительной работы потому, что при ее использовании достаточно просто осуществляется перевод подготовленных чисел в двоичную систему и обратный перевод.

Поэтому вопрос о переходе от восьмеричной системы к двоичной и вопрос об обратном переходе мы подвергнем здесь рассмотрению еще раз.

Примечание. Число, записанное в p-ичной системе, будем называть для краткости p-ичным числом.

Рассмотрим восьмеричное и двоичное изображения одного и того же числа N:

$$N = a_k 8^k + a_{k-1} 8^{k-1} + \ldots + a_3 8^3 + a_2 8^2 + a_1 8^1 + a_0;$$
$$N = b_m 2^m + b_{m-1} 2^{m-1} + \ldots + b_3 2^3 + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0.$$

Разделим число N, записанное в восьмеричной системе, на 8. Тогда получим в частном $a_k 8^{k-1} + a_{k-1} 8^{k-2} + \ldots + a_2 8 + a_1$ и в остатке a_0.

Число a_0 действительно является остатком, так как, являясь цифрой восьмеричной системы, оно не может обозначать собой число, большее 7.

Разделим то же число N, записанное в двоичной системе, также на 8.

Тогда получим в частном

$$b_m 2^{m-3} + b_{m-1} 2^{m-4} + \ldots + b_5 2^2 + b_4 2^1 + b_3$$

и в остатке $b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0$.

Число $b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0$ не больше семи, так b_2, b_1, b_0 — цифры двоичной системы.

В обоих случаях мы делили на 8 одно и то же число. Поэтому должны быть равными между собой как частные, так и остатки. Следовательно,

$$a_k 8^{k-1} + a_{k-1} 8^{k-2} + \ldots + a_2 8^1 + a_1 = b_m 2^{m-3} + b_{m-1} 2^{m-4} + \\ + \ldots + b_6 2^3 + b_5 2^2 + b_4 2 + b_3 \qquad \text{(A)}$$

и

$$a_0 = b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0. \qquad \text{(B)}$$

Равенство (B) дает развернутую запись восьмеричного числа a_0 в двоичной системе счисления, т. е.

$$a_0 = b_2 b_1 b_0.$$

Из равенства (A) таким же путем (т. е. путем деления его левой и правой части на 8) найдем, что

$$a_1 = b_5 b_4 b_3 \text{ и т. д.}$$

Таким образом, для перевода целого восьмеричного числа в двоичное нужно каждую цифру заменить ей равным двоичным числом согласно следующей таблице:

(A)

0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

Примеры:

$473_{(8)} = 100\ 111\ 011_{(2)}$;

$345_{(8)} = 11\ 100\ 101_{(2)}$; (здесь нуль в первой тройке 011 отброшен);

$1111_{(8)} = 1\ 001\ 001\ 001_{(2)}$.

Это правило сохраняет силу и при переводе восьмеричных дробей в двоичную систему.

В самом деле, если $N = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m}$ есть восьмеричное число, то $N \cdot 8^m$ будет целым числом, которое можно перевести в двоичную систему указанным в этом параграфе способом.

Для того чтобы получить требуемое двоичное число, нужно полученное число разделить на $8^m = 2^{3m}$, т. е. поставить запятую после $3m$ цифр справа.

Пример. Восьмеричное число 376, 174 перевести в двоичное. Используя таблицу, пишем ответ: 11 111 110, 001 111 100 (нуль в первой тройке 011 отброшен).

Теперь можно сразу сформулировать и правило для перевода двоичных чисел в восьмеричные.

Для перевода двоичного числа в восьмеричное нужно, начиная от запятой, разбить набор двоичных цифр на тройки; если левая и правая группы цифр не составляют полной тройки, то они дополняются нулями до полных троек. Далее, каждая тройка двоичных чисел заменяется одной восьмеричной цифрой согласно таблице (А).

Пример. Двоичное число 10 111 011, 111 011 0111 требуется перевести в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем набор цифр на тройки, начиная от запятой. Имеем 10 111 011, 111 011 011 1. Дополняем левую и правую (крайние) группы нулями до тройки цифр

010 111 011, 111 011 011 100.

Применяя таблицу (А), получим ответ: 273, 7334.

Теперь можно предложить более простой способ и для перевода чисел из десятичной системы в двоичную.

Для того чтобы десятичное число перевести в двоичное, нужно выполнить два этапа: 1) перевести десятичное число в восьмеричную систему счисления (это сделать проще, чем перевести десятичое число в двоичное); 2) перевести восьмеричное число (по рассмотренному правилу) в двоичное.

Пример. Десятичное число 286,15 перевести в двоичную систему счисления.

1-й этап. Перевод целой части в восьмеричную систему:

$$\begin{array}{r|l}
286 & 8 \\
\underline{24} & \begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \underline{32} & \underline{\underline{4}} \\ \underline{\underline{3}} & \end{array} \\
46 & \\
\underline{40} & \\
\underline{\underline{6}} &
\end{array}
\qquad \text{Отв. } 436_{(8)}.$$

Перевод дробной части в восьмеричную систему:

0	15	(продолжение)	
	8		
1	20	4	80
=	8	=	8
1	60	6	40
=	8	=	8
4	80	3	20
		=	

В восьмеричной системе будет дробь бесконечной периодической: 0,(11463).

Таким образом, наше число в восьмеричной системе счисления будет иметь вид: 436, (11463).

2-й этап. Используя изложенное правило и таблицу (А), пишем сразу ответ: 100 011 110, (001 001 100 110 011).

УПРАЖНЕНИЯ

428. Число $0{,}010\ 111\ 01_{(2)}$ выразить в восьмеричной системе. Указание. Сначала приписать справа нуль. Отв. 0,272.

429. Число 11001111, 0110011 выразить в восьмеричной системе. Указание. Приписать слева один нуль, а справа два нуля.

Отв. $317{,}314_{(8)}$.

430. Число 928, 640625 выразить в двоичной системе.

Указание. Сначала данное число перевести в восьмеричную систему. Отв. $928{,}640625 = 1460{,}51_{(8)} = 1100110000{,}101001$.

431. Число 856 выразить в троичной системе. Отв. 1011201.

432. Произвести деление в восьмеричной системе числа $7124_{(8)}$ на 5. Отв. Частное $= 1335_{(8)}$; остаток $= 3$.

433. Число $7124_{(8)}$ выразить в пятеричной системе.

Отв. $104133_{(5)}$.

434. Число $10110111_{(2)}$ выразить в пятеричной системе.

Указание. Деление производить на $101_{(2)}$, так как $5 = 101_{(2)}$.

Отв. $1213_{(5)}$.

435. Дробь 0,640625 выразить в восьмеричной системе.

Отв. $0{,}51_{(8)}$.

436. Дробь 0,15 выразить (приближенно до четвертого знака после запятой включительно) в пятеричной системе.

Отв. $0{,}0333_{(5)}$.

Задачи 437—439 решать по правилам, изложенным в § 9.

437. Число $0{,}7205_{(8)}$ изобразить в двоичной системе.

Отв. 0,111 010 000 101.

438. Число $512{,}471_{(8)}$ выразить в двоичной системе.

Отв. 101 001 010, 100 111 001.

439. Число $0{,}110\ 010\ 101_{(2)}$ выразить в восьмеричной системе.

Отв. $0{,}625_{(8)}$.

ОБ УСЛОВИЯХ НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ

В математике часто встречаются понятия: «необходимое условие», «достаточное условие» и «необходимое и достаточное условие».

1. Когда мы говорим, что данное условие является «необходимым», то это означает, что некоторое событие не может иметь места без этого условия. Иначе говоря, если событие имеет место, то и это условие обязательно будет иметь место.

Пример. Для того чтобы число делилось на 19, необходимо, чтобы оно было не меньше 19.

38 делится на 19 (38 не меньше 19),
19 делится на 19 (19 не меньше 19),
15 не делится на 19 (15 меньше 19).

Таким образом, требование, чтобы число было не меньше 19, является необходимым условием делимости этого числа на 19.

2. Когда мы говорим, что данное условие является «достаточным», то это означает, что при наличии этого условия некоторое событие обязательно будет иметь место.

Пример. Если каждое слагаемое делится на 7, то и их сумма разделится на 7.

Числа 14; 35; 56 делятся на 7. Их сумма $14+35+56$, т. е. 105, также делится на 7.

Таким образом, условие делимости каждого слагаемого на 7 является достаточным для делимости их суммы на 7.

3. Когда мы говорим, что данное условие является «необходимым и достаточным», то это означает, что при наличии некоторого события это условие обязательно будет иметь место и, наоборот, при наличии этого условия упомянутое выше событие обязательно также будет иметь место.

Пример. Для того чтобы число делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Действительно, из арифметики известны следующие два положения:

1) Если число делится на 9, то сумма его цифр также делится на 9.
2) Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Таким образом, условие делимости на 9 суммы цифр числа является условием «необходимым и достаточным» для делимости на 9 и самого числа.

Дополнительные пояснения. Мы видели, что требование, чтобы число было не меньше 19, является условием необходимым для делимости этого числа на 19.

Однако это условие вовсе не является достаточным. Действительно, число 45 не меньше 19, но 45 на 19 не делится.

Таким образом могут существовать условия необходимые, но вовсе не являющиеся достаточными.

Мы видели, что требование делимости каждого слагаемого на 7 является условием, достаточным для делимости на 7 их суммы.

Однако это условие вовсе не является необходимым. Действительно, числа 30 и 54 не делятся на 7, между тем как их сумма $30+54$, т. е. 84, делится на 7.

Таким образом, могут существовать условия достаточные, но вовсе не являющиеся необходимыми.

Наконец, могут существовать условия, которые не являются необходимыми и в то же время не являются достаточными.

Пример. Делимость суммы цифр числа на 7 не является условием необходимым для делимости самого числа на 7.

Действительно, число 6734 делится на 7, между тем как сумма его цифр на 7 не делится.

Делимость суммы цифр числа на 7 не является также и достаточным условием. Действительно, сумма цифр числа 786 делится на 7, между тем как само это число на 7 не делится.

Приведем еще несколько примеров.

А. ПРИМЕРЫ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ

1. Условие $a<b+c$ является необходимым для того, чтобы из отрезков a, b, c можно было построить треугольник, так как одна сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Однако условие $a<b+c$ не является достаточным, чтобы из отрезков a, b, c можно было построить треугольник. Например, если $a=5$, $b=3$, $c=17$, то хотя $a<b+c$, но все же треугольника со сторонами 5, 3 и 17 построить нельзя.

2. Условие $ab_1-a_1b=0$ является необходимым для того, чтобы система

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

не имела ни одного решения. Однако это условие не является достаточным. Например, система

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$$

имеет решения, хотя

$$ab_1-a_1b=1\cdot 2-2\cdot 1=0.$$

3. Свойство целого числа m быть делителем свободного члена приведенного уравнения n-й степени с целыми коэффициентами является условием, необходимым для того, чтобы m было корнем этого уравнения. Однако это условие не является достаточным, так как не всякий делитель свободного члена будет обязательно корнем уравнения (см. стр. 625).

Б. ПРИМЕРЫ ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ

1. Делимость на 17 каждого из двух слагаемых является условием, достаточным для делимости суммы этих двух слагаемых на 17. Однако это условие вовсе не является необходимым. Например, числа 40 и 45 не делятся на 17 и все же их сумма делится на 17.

2. Условие, что оба множителя суть положительные числа, является достаточным для того, чтобы их произведение было положительным. Однако это условие не является необходимым. Произведение двух чисел будет положительным и тогда, когда оба множителя отрицательные.

Условие $0 < x < \frac{\pi}{2}$ является достаточным для того, чтобы выполнялось неравенство $\sin x > 0$. Однако оно не является необходимым, так как $\sin x$ будет больше нуля, например, и при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

В. ПРИМЕРЫ НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЙ

1. Отрицательность числа x является необходимым и достаточным условием для того, чтобы выражение x^3 имело отрицательное значение.

2. Условие $ab_1 - a_1b \neq 0$ является «необходимым и достаточным условием» для того, чтобы система

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a_1x + b_1y &= c_1 \end{aligned}\right\}$$

имела одно и только одно решение.

3. Свойство дискриминанта квадратного уравнения быть неотрицательным числом является необходимым и достаточным условием того, чтобы это уравнение не имело мнимых корней.

4. Свойство числа a быть корнем многочлена n-й степени относительно x является условием, необходимым и достаточным для делимости этого многочлена на $x - a$.

Понятия «необходимое условие», «достаточное условие» и «необходимое и достаточное условие» — очень важные понятия. Непонимание этих логических категорий может приводить к путанице при формулировках и доказательствах многих положений математики.

О РАСШИРЕНИИ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Мы уже знакомы с несколькими различными системами чисел: системой целых чисел, системой рациональных чисел, вещественных (действительных) чисел и, наконец, системой комплексных чисел. Каждая из этих систем, начиная со второй, шире предыдущей, так как она содержит ее в себе. Например, система рациональных чисел содержит в себе систему целых чисел; система вещественных чисел содержит в себе систему рациональных чисел и, наконец, система комплексных чисел — систему вещественных чисел.

Целые числа являются частным случаем рациональных чисел; рациональные числа являются частным случаем вещественных чисел. Наконец, вещественные числа являются частным случаем комплексных.

Переход от одной системы чисел к следующей представляет собой, таким образом, расширение этой системы, а вместе с тем и расширение понятия числа. Такой принцип расширения и обобщения понятия числа называется генетическим *.

Исходным понятием числа было понятие натурального числа. Это понятие возникло очень рано, явившись первой математической абстракцией, выработанной человечеством. Долгое время натуральные числа были единственными известными числами; понятие числа было синонимом ** только натурального числа. Даже у Евклида термин «число» употребляется только применительно к натуральным числам. Дробные числа, хотя и были ему известны, все же не были для него числами, а были только отношениями целых чисел. Отрицательных чисел он совсем не знал.

Теперь остановимся подробнее на том, как именно последовательно происходило исторически расширение понятия числа. Сначала люди производили сложение, вычитание, умножение и деление только над натуральными числами. Но в то время как сложение оказывалось выполнимым всегда, вычитание уже сделать можно было не всегда. Соответственно этому уравнение $x+a=b$

---

* Генетический, т. е. связанный с историческим развитием человеческого общества.

** Синонимы — слова, выражающие одно и то же понятие (греч. συνώνυμος — одноименный).

разрешимо не для всех натуральных чисел a и b. Чтобы снять это ограничение, сделать вычитание всегда выполнимым и уравнение $x+a=b$ всегда разрешимым, мы расширяем понятие числа, вводя новые символы -1; -2; -3; ..., т. е. отрицательные числа, считая по определению, что $-k$ есть корень уравнения $x+k=0$, т. е. что $(-k)+k=0$.

Для того чтобы символы -1; -2; -3; ... признать числами, надо сложению и умножению положительных и отрицательных чисел дать такое определение, при котором эти действия обладали бы такими же свойствами, как и сложение и умножение натуральных чисел.

Среди этих правил, как мы уже знаем, имеются, например, такие:

$$(-a)+(-b)=-(a+b),$$

$$(-a)(-b)=ab.$$

Тогда все законы (переместительный, сочетательный и распределительный) останутся в силе для системы целых положительных и отрицательных чисел. Этим путем мы приходим к системе целых чисел и соответственно расширяем понятие натурального числа до понятия целого числа.

Аналогично происходит расширение области целых чисел до области всех рациональных чисел.

В области целых чисел деление возможно не всегда. Уравнение $ax=b$ разрешимо не для всех целых a и b. Чтобы сделать деление выполнимым всегда, т. е. уравнение $ax=b$ разрешимым всегда, мы пополняем наш запас чисел (т. е. целых чисел) введением новых символов $\frac{b}{a}$, т. е. дробей. Надо отметить, что исторически дробные числа появились раньше отрицательных.

В этой расширенной области (целые числа и дроби) мы определяем сложение и умножение так, чтобы законы этих действий совпадали с законами в первоначальной области.

Продолжая таким образом, мы приходим к системе действительных чисел и, наконец, к системе комплексных чисел.

С алгебраической точки зрения множество рациональных чисел, множество действительных чисел и множество комплексных чисел характеризуется каждое в отдельности тем, что над числами каждого из этих множеств можно неограниченно производить все четыре алгебраических действия: сложение, вычитание, умножение и деление, не выходя за пределы этих множеств. Деление на нуль исключается.

Множества такого рода в современной математике называются **полями**.

Множество, например, целых чисел не является полем, так как в этом множестве деление не всегда можно выполнить, не выходя за пределы этого множества.

Поле комплексных чисел обладает исключительной особенностью. В этом поле можно, не выходя из него, выполнять не только первые четыре действия, но и все прочие математические действия (возведение в любую комплексную степень, извлечение корня n-й степени из любого комплексного числа, нахождение логарифма отрицательного или комплексного числа, нахождение $\sin x$ и $\arcsin x$ при любых комплексных значениях x).

Примеры:

1)
$$\sqrt[6]{-1}=\begin{cases}\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},\\ \cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6},\\ \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6},\\ \cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6},\\ \cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6},\\ \cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\end{cases}$$ (см. стр. 569).

2)
$$\ln(-1)=(\pi+2k\pi)\,i,$$
где k — любое целое число.

3)
$$\ln i=\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i,$$
где k — любое целое число (см. стр. 700 и 701).

4)
$$i^i=e^{\ln(i^i)}=e^{i\ln i}=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i}=e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},$$
где k — любое целое число, т. е. i^i имеет бесконечное множество действительных значений.

5)
$$\cos i=\frac{e+e^{-1}}{2},$$
т. е. $\cos i$ есть действительное число (см. стр. 700).

Возникает вопрос: нельзя ли понятие числа расширить дальше и построить такую новую систему чисел, которая содержала бы в себе, как свою часть, множество комплексных чисел и чтобы в этой новой области законы (переместительный, сочетательный и распределительный) сложения и умножения были бы сохранены?

Этот вопрос чрезвычайно сильно занимал математиков XIX века. И это вполне понятно. Введение комплексных чисел в математику принесло столь плодотворные результаты во всех разделах математики и математического естествознания, что мысль ввести какие-то новые, еще более общие числа естественно должна была привлечь к себе внимание математиков. За решение этой задачи принялись многие ученые (Гамильтон, Грассман и др.). Результат оказался крайне неожиданным: расширить область комплексных чисел, сохраняя при этом все свойства сложения и умножения, нельзя. Поле комплексных чисел оказалось самой широкой областью чисел, в которой сохраняются переместительный, сочетательный и распределительный законы сложения и умножения. Задачу же дальнейшего расширения понятия числа можно было ставить лишь при условии отказа хотя бы от какого-либо одного из обычных свойств сложения или умножения.

Таким путем Гамильтон построил такую новую систему чисел, которая содержит в себе, как свою часть, множество комплексных чисел. Но эта новая система чисел, названных кватернионами, обладая всеми прочими обычными свойствами сложения и умножения, не обладает переместительным свойством умножения, т. е. вообще

$$\omega_1 \cdot \omega_2 \neq \omega_2 \cdot \omega_1,$$

где ω_1 и ω_2 — кватернионы.

Посмотрим, что такое кватернион.

Чтобы облегчить понимание структуры кватерниона, мы сначала остановим внимание на структуре комплексного числа.

Допустим, что сумма квадратов двух действительных чисел x и y разлагается на линейные множители следующим образом:

$$x^2 + y^2 = (x + \lambda y)\ (x - \lambda y).$$

Выясним, какому условию должен удовлетворять символ λ, чтобы написанное разложение было справедливым.

Очевидно, что

$$x^2 + y^2 = x^2 - \lambda^2 y^2.$$

Следовательно, должно быть:

$$\lambda^2 = -1.$$

Но мы знаем, что в выражении $a + bi$, в котором a и b — действительные числа, символ i удовлетворяет условию

$$i^2 = -1.$$

Отсюда заключаем, что за λ нужно взять мнимую единицу i.

Итак, структура комплексного числа $a \cdot 1 + bi$ такова, что оно образуется с помощью двух действительных чисел a и b и двух символов 1 и i. Символ 1 называется вещественной единицей, а символ i — мнимой единицей.

При выполнении действий над комплексными числами мы принимаем следующую таблицу умножения для этих двух единиц:

$$1 \cdot 1 = 1;\ 1 \cdot i = i \cdot 1 = i;\ i \cdot i = -1.$$

Теперь допустим, что сумма квадратов четырех действительных чисел x, y, z, t разлагается на два линейных множителя следующим образом:

$$x^2+y^2+z^2+t^2=(x+iy+jz+kt)(x-iy-jz-kt),$$

где i, j, k — какие-то неизвестные нам символы.

Посмотрим, какое требование надо наложить на символы i, j, k, чтобы написанное выше разложение было справедливым.

Произведя умножение в правой части этого разложения, получим:

$$x^2+y^2+z^2+t^2=x^2-i^2y^2-j^2z^2-k^2t^2-$$
$$-(ij+ji)yz-(ik+ki)yt-(jk+kj)zt.$$

Для того чтобы последнее равенство было верным при любых вещественных значениях x, y, z, t, необходимо и достаточно подчинить символы i, j, k следующим требованиям:

$$i^2=j^2=k^2=-1,$$
$$ij+ji=ik+ki=jk+kj=0.$$

Примем символ i имеющим тот же смысл, что и в комплексном числе $a+bi$. Но тогда символы j и k будут иметь иной смысл, чем i. Действительно, если допустить, например, что $j=i$, то получим $ij+ji=i\cdot i+i\cdot i=-2$, между тем как должно быть $ij+ji=0$.

Выражение

$$x+iy+jz+kt,$$

где x, y, z, t — действительные числа, а i, j, k—символы, удовлетворяющие следующим требованиям:

$$i^2=-1;\qquad j^2=-1;\qquad k^2=-1;$$
$$ij=-ji;\qquad ik=-ki;\qquad jk=-kj,$$

и называется кватернионом.

Итак, структура кватерниона такова, что он образуется с помощью четырех действительных чисел x, y, z, t и четырех символов 1; i; j; k, удовлетворяющих указанным выше условиям.

Символы 1; i; j; k называются единицами, с помощью которых составляется кватернион.

Первая из этих четырех единиц есть обыкновенная вещественная 1.

В кватернионе

$$x+iy+jz+kt$$

x называется скалярной составной частью кватерниона, а

$$iy+jz+kt$$

его векториальной составной частью.

Чтобы считать кватернионы «числами», мы должны установить, по определению, правила их сложения и умножения.

Сложение естественно определить так: если

$$\omega = x + iy + jz + kt$$

и

$$\omega_1 = x_1 + iy_1 + jz_1 + kt_1,$$

то

$$\omega + \omega_1 = (x + x_1) + i(y + y_1) + j(z + z_1) + k(t + t_1).$$

Чтобы определить умножение, достаточно задать «таблицу» умножения символов 1, i, j, k:

$$1^2 = 1;\ i \cdot 1 = 1 \cdot i = i;\ j \cdot 1 = 1 \cdot j = j;\ k \cdot 1 = 1 \cdot k = k.$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

$$j \cdot k = i; \qquad k \cdot i = j; \qquad i \cdot j = k;$$

$$k \cdot j = -i; \qquad i \cdot k = -j; \qquad j \cdot i = -k.$$

При этих условиях для кватернионов сохранятся все обычные свойства действий, кроме переместительного закона умножения, т. е. вообще

$$\omega \cdot \omega_1 \neq \omega_1 \cdot \omega.$$

Полагая в выражении

$$\omega = x + iy + jz + kt,$$

$$z = 0 \text{ и } t = 0,$$

получим:

$$\omega = x + iy,$$

т. е. получим обычное комплексное число.

Таким образом, область кватернионов является расширением области комплексных чисел. Но в этой расширенной области уже не выполняется переместительный закон умножения.

Составим произведение двух кватернионов в общем виде:

$$\omega \cdot \omega_1 = (x + iy + jz + kt)(x_1 + iy_1 + jz_1 + kt_1) =$$

$$\left.\begin{aligned} &= (xx_1 - yy_1 - zz_1 - tt_1) + \\ &+ i(xy_1 + x_1y + \underline{zt_1} - \underline{z_1t}) + \\ &+ j(xz_1 + x_1z + \underline{y_1t} - \underline{yt_1}) + \\ &+ k(xt_1 + x_1t + \underline{yz_1} - \underline{y_1z}) \end{aligned}\right\}$$

Мы здесь пользовались тем, что

$$ij = k;\ ji = -k;\ ki = j;\ ik = -j;$$

$$jk = i;\ kj = -i.$$

При перемене порядка сомножителей ω и ω_1 шесть подчеркнутых членов меняют свои знаки, так что $\omega_1\omega$, вообще говоря, существенно отлично от $\omega \cdot \omega_1$ и притом не только по знаку, как это имеет место для произведений отдельных единиц i, j, k.

Наряду с этим произведение кватерниона на действительное число обладает переместительным свойством, т. е.

$$(x+iy+jz+kt)\cdot a = a\cdot(x+iy+jz+kt),$$

где a — действительное число.

Заметим, между прочим, что каждая из трех единиц i, j, k является корнем уравнения $x^2+1=0$.

В области кватернионов уравнение $x^2+1=0$ имеет бесконечное множество корней. Действительно, всякий кватернион $a+bi+cj+dk$, в котором $a=0$ и $b^2+c^2+d^2=1$, будет корнем уравнения $x^2+1=0$. Докажем это.

Подставив в левую часть уравнения $x^2+1=0$ вместо x кватернион $bi+cj+dk$, получим:

$$\begin{gathered}(bi+cj+dk)^2+1=(bi+cj+dk)(bi+cj+dk)+1= \\ =b^2i^2+bcij+bdik+cbji+c^2j^2+cdjk+dbki+dckj+d^2k^2+1= \\ =-b^2-c^2-d^2+bck-bdj-cbk+cdi+dbj-dci+1= \\ =-(b^2+c^2+d^2)+1=-1+1=0.\end{gathered}$$

Итак, доказано, что кватернион $bi+cj+dk$ при любых действительных значениях b, c, d, удовлетворяющих условию b^2+ $+c^2+d^2=1$, будет корнем уравнения $x^2+1=0$.

Два кватерниона

$$\omega = x+iy+jz+kt$$

и

$$\bar{\omega} = x-iy-jz-kt$$

называются взаимно сопряженными.

Легко убедиться, что

$$\omega\cdot\bar{\omega} = x^2+y^2+z^2+t^2.$$

Величина $\sqrt{x^2+y^2+z^2+t^2}$ называется модулем кватерниона и обозначается через $|\omega|$.

Всякому кватерниону:

$$\omega = x+iy+jz+kt,$$

не являющемуся нулем, соответствует вполне определенный другой кватернион:

$$\eta = \frac{x-iy-jz-kt}{x^2+y^2+z^2+t^2}$$

такой, что

$$\omega\cdot\eta = 1.$$

Можно доказать, что

$$|\omega \cdot \omega_1| = |\omega| \cdot |\omega_1|,$$

т. е. модуль произведения двух кватернионов равен произведению модулей этих кватернионов.

Мы здесь изложили лишь некоторые общие, далеко не полные сведения о кватернионах, не дав им ни геометрической, ни физической интерпретации (истолкования).

Читателю может показаться, что кватернионы являются лишь формальной выдумкой и никакой пользы принести не могут. Чтобы рассеять такое неверное представление о кватернионах, мы покажем хотя бы одно их несложное применение. А именно докажем с помощью кватернионов, что произведение суммы четырех квадратов на сумму четырех квадратов может быть представлено в виде суммы четырех квадратов.

Доказательство.

Пользуясь разложением суммы четырех квадратов на произведение двух сопряженных кватернионов и тем, что произведение кватерниона на действительное число обладает переместительным свойством, найдем последовательно следующее:

$$\begin{gathered}(x^2+y^2+z^2+t^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)= \\ =(x+iy+jz+kt)(x-iy-jz-kt)(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)= \\ =(x+iy+jz+kt)(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)(x-iy-jz-kt)=(x+ \\ +iy+jz+kt)(x_1+iy_1+jz+kt_1)(x_1-iy_1-jz_1-kt_1)(x-iy-jz-kt).\end{gathered}$$

В последнем выражении произведение первых двух множителей можно заменить кватернионом

$$\left.\begin{aligned}&(xx_1-yy_1-zz_1-tt_1)+i(xy_1+x_1y+zt_1-z_1t)+ \\ &+j(xz_1+x_1z+y_1t-yt_1)+k(xt_1+x_1t+yz_1-y_1z),\end{aligned}\right\} \quad (A)$$

а произведение остальных двух множителей кватернионом

$$\begin{gathered}(xx_1-yy_1-zz_1-tt_1)+i(-xy_1-x_1y+z_1t-zt_1)+ \\ +j(-xz_1-x_1z+yt_1-y_1t)+k(-xt_1-x_1t+y_1z-yz_1),\end{gathered}$$

который можно записать и так:

$$\left.\begin{aligned}&(xx_1-yy_1-zz_1-tt_1)-i(xy_1+x_1y+zt_1-z_1t)- \\ &-j(xz_1+x_1z+y_1t-yt_1)-k(xt_1+x_1t+yz_1-y_1z).\end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Кватернионы (A) и (B) являются сопряженными, а поэтому их произведение равно

$$\begin{gathered}(xx_1-yy_1-zz_1-tt_1)^2+(xy_1+x_1y+zt_1-z_1t)^2+ \\ +(xz_1+x_1\bar{z}+y_1t-yt_1)^2+(xt_1+x_1t+yz_1-y_1z)^2.\end{gathered}$$

Таким образом, получилось, что

$$(x^2+y^2+z^2+t^2)(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)=$$
$$=(xx_1-yy_1-zz_1-tt_1)^2+(xy_1+x_1y+zt_1-z_1t)^2+$$
$$+(xz_1+x_1z+y_1t-yt_1)^2+(xt_1+x_1t+yz_1-y_1z)^2,$$

что и требовалось доказать.

Пример. При $x=1,\ y=2,\ z=3,\ t=4$
и $x_1=1,\ y_1=2,\ z_1=3,\ t_1=5$

получим, что

$$(1^2+2^2+3^2+4^2)(1^2+2^2+3^2+5^2)=$$
$$=32^2+7^2+4^2+9^2.$$

Значит, произведение суммы четырех квадратов $1^2+2^2+3^2+4^2$ на сумму четырех квадратов $1^2+2^2+3^2+5^2$ оказывается также суммой четырех квадратов $32^2+7^2+4^2+9^2$.

Кватернионы применяются в геометрии, физике, механике и особенно в современной квантовой механике. Все же их роль не столь велика, как роль комплексных чисел.

КРАТКИЕ ИСТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Каждому, кто занимается изучением математики, полезно иметь хотя бы некоторые общие представления и о том, как происходило исторически развитие математических наук. Поэтому изложенное ниже рекомендуется вниманию учащегося.

Примерно еще за три тысячи лет до н. э. в Египте и Вавилонии (Месопотамия) уже были накоплены значительные математические сведения арифметического, алгебраического и геометрического содержания. Здесь возникли первые общие приемы решения задач. Так, например, вавилонские математики умели решать своеобразным способом задачи, равносильные квадратным уравнениям. Однако математических теорий там еще не существовало. Методы и алгоритмы* проводились в виде простых рецептов без каких-либо доказательств или обоснований.

Начиная с VII—VI веков до н. э. трудами греческих математиков Фалеса, Пифагора, Гиппократа, Евдокса, Евклида, Архимеда, Аполлония разрозненные математические сведения, накопленные к тому времени человечеством, были систематизированы и преобразованы в строгую логическую систему. С этих пор математика впервые становится наукой. Создаются такие первые математические теории, как плоская и пространственная геометрия, общая теория отношений и др.

Благодаря тому что в математику были введены доказательства, обнаружилось, что не все отрезки соизмеримы. Примерно в середине V века до н. э. греческие ученые убедились в том, что сторона и диагональ квадрата несоизмеримы между собой, иначе говоря, что не существует рационального числа $\frac{p}{q}$, квадрат которого равнялся бы 2.

Мы уже говорили, что этот факт никогда не мог бы быть открытым только из практики измерений. Для его открытия и обоснования необходимы абстракция и логические рассуждения.

---

* Под словом «алгоритм» в математике понимают регулярный прием, позволяющий с помощью конечного числа единообразных операций решить любую задачу, принадлежащую некоторому определенному классу. Например, алгоритм для решения квадратного уравнения; алгоритм для решения системы линейных уравнений; алгоритм для нахождения наибольшего общего делителя.

Открытие несоизмеримости произвело глубокое впечатление на греческих ученых и оказало решающее влияние на все дальнейшее развитие античной математики.

Во-первых, греческие математики пришли к мысли, что геометрические величины имеют более общий характер, чем рациональные числа. Они начали строить так называемую «геометрическую алгебру», в которой алгебраические тождества записывались геометрически и геометрически же решались квадратные уравнения. Например, формула квадрата суммы двух чисел изображалась квадратом, разрезанным на два меньших квадрата и на два одинаковых прямоугольника (рис. 233).

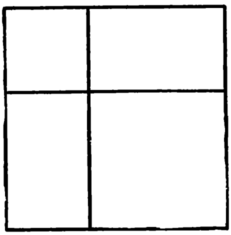


Рис. 233.

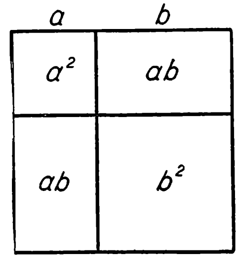


Рис. 234.

Для того времени никакого другого общего способа изображать величины и соотношения между ними, кроме геометрического, не было. Ведь не могли же тогда формулу квадрата суммы записать так:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

потому что буквенные обозначения чисел тогда еще не были известны.

Приведенную выше немую геометрическую фигуру мы можем, пользуясь буквенными обозначениями, оживить так (рис. 234).

Во-вторых, открытие несоизмеримости поставило перед математиками вопрос о том, как сравнивать между собой отношения двух пар несоизмеримых величин, как устанавливать их пропорциональность. В IV веке до н. э. замечательный математик Евдокс решил этот вопрос, построив общую теорию отношений, которая в существенных чертах совпадала с теорией вещественных чисел, созданной только в 70-х годах XIX века Дедекиндом.

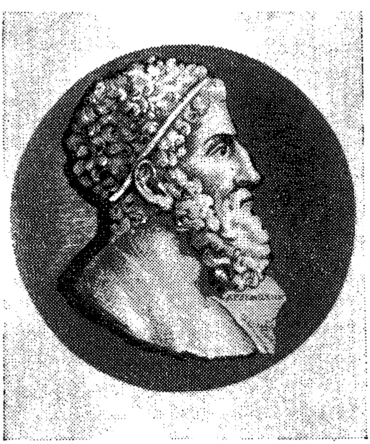
Другой важной проблемой, с которой сразу же столкнулась античная математика, был вопрос об измерении площадей криволинейных фигур, объемов тел, ограниченных кривыми поверхностями. Математики античности и здесь открыли общий метод, который содержал в себе и элементы теории пределов, и идеи интегрирования. Мы не можем здесь рассказать подробно о всех достижениях античной математики, не можем также осветить ее взаимосвязи с астрономией, мореплаванием, архитектурой. Мы остановимся коротко только на творчестве трех великих греческих ученых, имена которых сияют как звезды первой величины в созвездии ученых древности.

Евклид (около 300 гг. до н. э.) — великий геометр древности. Его «Начала» содержат основы всей античной математики: там строится планиметрия и стереометрия, излагается геометрическая алгебра, которая применяется для решения квадратных уравнений и геометрических задач, сводящихся к таким уравнениям, развиваются основные положения элементарной теории чисел, дается первая классификация квадратичных иррациональностей, наконец, там имеются отделы, которые мы теперь отнесли бы к математическому анализу, а именно общая теория отношений Евдокса, которая является прообразом современного учения о действительных числах, и «метод исчерпывания», заключающий в себе элементы теории пределов. В конце этого замечательного произведения излагается учение о правильных многогранниках.

Труд Евклида в течение более двух тысяч лет служил непревзойденным образцом математической строгости. В первой книге Евклид поместил аксиомы и постулаты, из которых стремился путем дедукции получить все основные предложения своей геометрии. По существу в постулатах принимаются выполнимыми именно те построения, которые можно сделать с помощью циркуля и линейки.

«Начала» Евклида занимают одно из первых мест по числу переводов и изданий на всех языках мира. Все наши учебники по элементарной геометрии до сих пор основываются на «Началах» Евклида.

Архимед (около 287 — 212 гг. до н. э.) — величайший математик, механик и инженер древности. Архимед один из величайших математиков всех времен.



Архимед.

Архимед жил и работал в своем родном городе Сиракузах (Сицилия). Он был активным участником обороны Сиракуз. Благодаря превосходным метательным орудиям, изобретенным Архимедом, а также кранам с крюками, опрокидывающим корабли, римляне не могли взять город приступом и перешли к осаде. Все же римляне благодаря хитрости в конце концов овладели Сиракузами. По преданиям, при вступлении победителей в Сиракузы Архимед был погружен в решение какой-то проблемы и попросил подошедшего к нему римского солдата дать ему возможность обдумать вопрос до конца. Солдат убил великого ученого, не исполнив его просьбы.

Величайшей заслугой Архимеда является то, что он изобрел общий метод определения площадей, поверхностей и объемов, который совпадает по существу с современным методом интегральных сумм. Он впервые определил вполне строго поверхность и объем шара, а также объемы сегментов эллипсоидов, параболоидов и гиперболоидов вращения. Ему же принадлежит прием определения касательных к кривым, который является настоящим дифференциальным методом.

Архимед — автор глубоких исследований по статике (теория рычага, отыскание центров тяжести); он является основоположником гидростатики («закон Архимеда»).

Аполлоний (около 200 гг. до н. э.) — великий геометр древности. Он создал теорию конических сечений, в которой систематически изучил основные свойства эллипса, гиперболы и параболы, рассматривая эти кривые и аналитически (пользуясь методами геометрической алгебры) и с проективной точки зрения. Труд Аполлония получил широкое применение в XVI — XVII веках, а именно в механике земных и небесных тел. Его исследованиями пользовался Кеплер при установлении законов движения планет, Галилей (законы падения тел, брошенных под углом к горизонту) и Ньютон в своих «Математических началах натуральной философии».

В середине V века н. э. произошло падение Римской империи. Античная культура и наука пришли в упадок. Прекратилось и развитие греческой математики. Однако общее движение науки вперед не остановилось, но только теперь оно оказалось связанным с деятельностью народов Среднего и Ближнего Востока, иранцев, арабов, сирийцев, таджиков, жителей древнего Хорезма, народов Кавказа.

Еще задолго до этого происходило накопление и систематизация математических знаний в Китае и Индии. Древнейшее математическое сочинение Китая «Математика в девяти книгах» * было написано не позднее I века н. э. Оно свидетельствует о наличии у китайских математиков хорошо разработанной вычислительной техники. Наивысшим достижением китайской математики того времени был общий метод решения задач, сводящихся к системе линейных уравнений. При этом впервые произошло расширение понятия числа: математики Китая пользовались отрицательными коэффициентами, определяли правила действия с отрицательными числами и, наконец, истолковывали их как долг. В этом же сочинении излагался метод извлечения квадратных и кубических корней.

* Эти книги, представляющие большую историческую ценность, впервые переведены с китайского языка недавно Э. И. Березкиной.

Хорошо были разработаны китайскими математиками вычислительные методы и в геометрии. Доказательством этому служит, например, результат Цзу Чун-жи, который еще в V веке показал, что отношение длины окружности к диаметру заключается между числами 3,1415926 и 3,1415927.

Математике Индии мы обязаны прежде всего нашей десятичной позиционной системой счисления, которая дает возможность изобразить любое число с помощью десяти цифр 0, 1, 2,..., 9 и поместного принципа. В Индии, как и в Китае, большое развитие получила числовая алгебра. Ученые Индии в VI веке н. э. применяли отрицательные числа, а в XII веке знали, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения: одно — положительное, а другое — отрицательное. Они оперировали с иррациональными числами, знали правила суммирования арифметической и геометрической прогрессий, решали неопределенные уравнения второй степени. В Индии и Китае большое развитие получила и практическая геометрия; было известно много приближенных и точных формул для вычисления площадей и объемов. Математики Индии умели также определять расстояние до недоступных предметов. Однако изложения математических теорий, построенных с помощью систематического применения доказательств, там не существовало.

Большой заслугой математиков Ближнего и Среднего Востока является то, что они соединили вычислительную математику, характерную для стран Востока, с теоретическими построениями древних греков. Они сохранили и пополнили математические творения древнего мира и Востока. Они проделали огромную и важную работу по переводу на арабский язык сочинений греческих и индийских математиков. Наряду с этим они внесли в математику свой новый вклад, дали новое направление ее развитию.

В тесной связи с успехами астрономии в математике Ближнего и Среднего Востока получают развитие плоская и сферическая тригонометрия, числовая алгебра и различные вычислительные алгоритмы. Из выдающихся ученых этого времени следует прежде всего упомянуть Мохамеда ибн-Муса Аль-Хорезми (т. е. из Хорезма), жившего в IX веке. Аль-Хорезми дал впервые изложение алгебры как самостоятельной науки. Термин «алгебра» происходит от названия его сочинения «Ал-джебр-ал-мукабала». «Ал-джебр» означает восстановление члена уравнения в другой части, но с противоположным знаком. «Ал-мукабала» означает приведение подобных членов. Слово «алгоритм» произошло благодаря искажению слов «Аль-Хорезма» при передаче их в латинской транскрипции. Алгоритмом первоначально называли способ обозначения чисел по десятичной позиционной системе и вычисления с ними. Этот способ был изложен в «Арифметике», написанной Аль-Хорезми, и стал известен европейским ученым благодаря переводу этой книги на латынь.

В XI веке жил и работал замечательный таджикский математик и поэт Омар Хайям. Он предпринял систематическое изучение алгебраических уравнений 3-й степени, корни которых строил геометрически. Ему же принадлежат очень интересные исследования по теории параллельных.

Выдающийся азербайджанский астроном и математик XIII века Насирэддин Туси изложил плоскую тригонометрию в виде самостоятельной науки и разработал вопросы сферической тригонометрии.

В XV веке в обсерватории Улуг-Бека (внука Тимура) под Самаркандом работал крупнейший математик Гиясэддин Джемшид Аль-Каши. Аль-Каши является изобретателем десятичных дробей — это он распространил индийскую позиционную систему на обозначения всех чисел, как целых, так и дробных. В Европе десятичные дроби были введены только С. Стевином в XVII веке. До этого в математике пользовались шестидесятичными дробями. Аль-Каши была хорошо известна формула бинома Ньютона для целых положительных показателей, и он применял ее для извлечения корней любой степени. Наконец, ему принадлежит очень красивый прием, позволяющий вычислить корень кубического уравнения определенного вида с любой степенью точности. Это уравнение встретилось Аль-Каши при составлении подробных тригонометрических таблиц*.

С XV века центр математической культуры переносится в Европу. По переводам на арабский язык еще в XII—XIII веках становятся впервые известными в Европе сочинения греческих и индийских математиков. Через арабов же переносится в Европу в исходе X века и изобретенная в Индии современная система изображения чисел с помощью цифр. До XV века включительно европейские математики преимущественно занимались освоением математического наследства древнего мира и Востока. Никаких особенно значительных математических открытий за этот период сделано не было. Тем не менее в математику были внесены такие новые прогрессивные черты, которые обусловили возможность стремительного развития ее в последующих веках.

XVI век был первым веком, принесшим новые открытия, превосходящие открытия древнего мира и Востока. Например, создание гелиоцентрической системы польским ученым Коперником, исследования по механике итальянского ученого Галилея. В области математики в Италии было получено решение в радикалах уравнений 3-й степени (Ферро и Тарталья) и 4-й степени (Феррари). Решение уравнений 3-й и 4-й степени в радикалах явилось для того времени крупным событием в математике, так как эту проблему не удавалось разрешить на протяжении многих столетий.

---

* Работы Омара Хайяма, Насирэддина Туси и Аль-Каши также переведены на русский язык профессором Б. А. Розенфельдом.

С этим открытием оказалось связанным новое важное расширение области чисел: впервые были введены в рассмотрение комплексные числа. Правда, геометрическое и арифметическое истолкование они получили только в XIX веке, а до тех пор они применялись только как удобные символы, с помощью которых можно получать результаты относительно «настоящих», т. е. вещественных, чисел. Но и это имело большое значение. Математики изучали свойства этих чисел-символов, рассматривали функции от них и тем самым подготовляли создание важнейшей современной математической дисциплины — теории функций комплексного переменного, которая оказалась мощным орудием для решения важнейших вопросов гидромеханики, аэромеханики и многих других разделов естествознания.

XVI век ознаменовался еще одним большим успехом в математике, значение которого трудно переоценить, — было впервые создано буквенное исчисление. Главная заслуга в этом деле принадлежит замечательному французскому математику Франсуа Виету (1540 — 1603). До этого алгебра была либо словесной, либо геометрической. Виет явился творцом математической формулы.

Задумаемся на минуту, в чем же заключается значение формул и буквенного исчисления. Ведь каждую отдельную формулу можно высказать и словами. Например, фраза «квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого на второе, плюс квадрат второго числа» равносильна формуле: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, фраза «куб неизвестного плюс произведение некоторой величины на это неизвестное равно известному числу» равносильна уравнению: $x^3+ax=b$. В чем же отличие этих двух форм выражения?

Первое отличие сразу же бросается в глаза. Формула короче, а фразы длиннее. Но не в этом основное отличие. С буквами и формулами мы можем оперировать по правилам исчисления: складывать их, вычитать, умножать, подставлять вместо одних букв другие буквы или целые формулы и т. д. Со словами так поступать нельзя, над ними мы не можем производить действий арифметики. Поэтому, хотя каждую отдельную формулу можно высказать и словами, но исчисление с помощью обычных слов построить нельзя. Итак, начиная с работ Виета в математику входят формулы и буквенное исчисление.

Совершенно новый этап развития математики наступает в XVII и последующих веках. В XVII веке на базе промышленной революции начинается развитие капитализма и ломка феодальных устоев. Появляются новые, более прогрессивные, чем при феодализме, условия для развития производительных сил общества. Жизнь сразу же ставит перед науками, в частности перед математикой, новые проблемы. Началось быстрое развитие мануфактурного способа производства. Торговому капиталу нужно было развивать мореплавание: началось усиленное кораблестроение, появилась необходимость в точных навигационных приборах.

В это время огромные успехи делает механика земных и небесных тел. В самом начале века Кеплер открывает законы движения планет, несколько позже Галилей устанавливает законы падения тел, в 70-х годах того же века Гюйгенс проводит важное исследование о центробежной силе и приведенной длине маятника, и в 80-х годах появляются бессмертные «Математические начала натуральной философии» Ньютона, в которых формулируются три основных принципа механики и закон всемирного тяготения. Для открытия и исследования всех этих важнейших законов природы оказались необходимыми новые математические методы, прежде всего построение теории переменных величин.

Задача построения теории переменных величин, прежде всего аналитической геометрии и дифференциального и интегрального исчисления, и была в основном выполнена в XVII—XVIII веках. Ф. Энгельс следующим образом характеризовал этот процесс: «Поворотным пунктом в математике была декартова *переменная величина*. Благодаря этому в математику вошли *движение* и *диалектика* и благодаря этому же стало *немедленно необходимым дифференциальное и интегральное исчисление*, которое тотчас же и возникает и которое было в общем и целом завершено, а не изобретено Ньютоном и Лейбницем» *.

Мы остановимся дальше на деятельности ведущих ученых этого периода. Сейчас скажем еще, что в XVII веке грандиозный шаг вперед сделала техника приближенных вычислений в работах швейцарского механика и часовых дел мастера И. Бюрги (1552—1632) и шотландского математика Д. Непера (1550—1617). Были введены логарифмы. Первые логарифмические таблицы, составленные Д. Непером, были изданы в 1614 году. Это — год рождения логарифмов. Логарифмы явились не только мощным средством для выполнения вычислений, но привели еще и к появлению весьма важной для всего математического анализа логарифмической функции.

Крупнейшие математики XVII, XVIII, XIX и начала XX века

XVII век

Декарт Ренэ (1596—1650) — знаменитый французский философ, физик, математик, физиолог. Декарт впервые в науке ввел понятие переменной величины и функции. Декарт является создателем метода координат, на основе которого он развил начала аналитической геометрии. Декарт придал буквенному исчислению **

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, Госполитиздат, 1948, стр. 208.

** Под буквенным исчислением понимаются операции, производимые над числами в их буквенном изображении.

современную форму. До этого у Виета как обозначения, так и правила оперирования с величинами были более громоздкими.

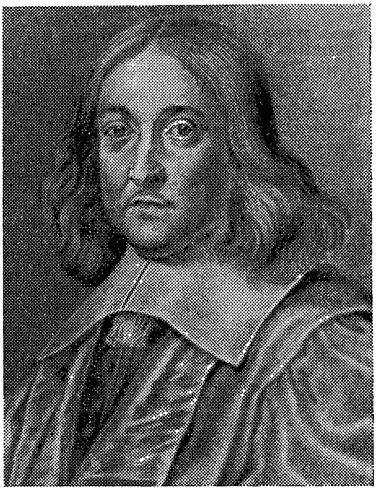
Р. Декарт.

Пьер Ферма (1601—1665) — знаменитый французский математик. Ферма был по специальности юристом и мог посвящать математике только свободное от работы время. Несмотря на это, ему принадлежат глубокие исследования почти во всех областях математики своего времени. Ферма имел общий метод решения задач на определение максимумов и минимумов и на проведение касательных, который совпадал по существу с дифференцированием. Впервые после Архимеда он широко пользовался интегральными суммами и предельным переходом для определения площадей и объемов.

Ферма является создателем теории чисел. Он поставил основные ее проблемы и сформулировал важные общие методы. До сих пор еще не доказана «великая теорема Ферма», которая гласит, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при $n > 2$ решений в области натуральных чисел не имеет. Как выяснилось, эта теорема, несмотря на простоту своей формулировки, связана с очень тонкими разделами высшей математики. Ее исследования послужили в XIX веке стимулом к созданию так называемой теории алгебраических чисел.



П. Ферма.

Блез Паскаль (1623—1662) — крупнейший французский математик. В возрасте 16 лет написал замечательное сочинение, в котором сформулировал одно из основных предложений проективной геометрии. В 18-летнем возрасте он изобрел арифмометр. Паскаль один из первых строго сформулировал принцип полной математической индукции и с помощью «арифметического треугольника» дал простой способ образования биномиальных коэффициентов. Очень большое значение имели работы Паскаля, посвященные определению площадей, а также исследованию свойств циклоиды. Паскаль занимался и проблемами теории вероятностей. Ему принадлежат также замечательные работы по гидродинамике (закон Паскаля).

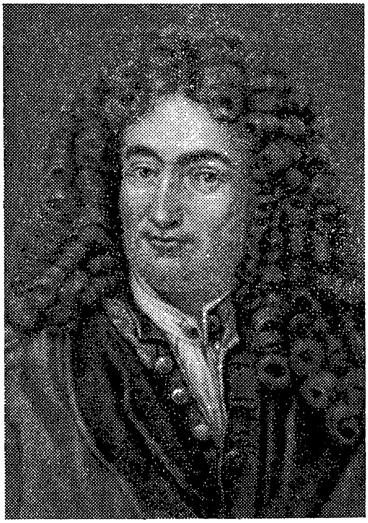
Б. Паскаль.

Ньютон Исаак (1643—1727) — гениальный английский математик, физик, механик и астроном. Им открыт закон всемирного тяготения, закон механики. Он творец дифференциального и интегрального исчислений. Может быть, не меньшее значение имеет то обстоятельство, что Ньютон ввел в математику степенные ряды как основной аналитический аппарат для выражения и изучения функций. Ньютоном положено начало решению обыкновенных дифференциальных уравнений, решены некоторые задачи вариационного исчисления. Он оставил также глубокие исследования по аналитической и алгебраической геометрии *, алгебре и арифметике.

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646—1716) — немецкий ученый, великий математик, философ-идеалист. Он так же, как и Ньютон, является творцом дифференциального и интегрального исчислений. Первые результаты по дифференциальному и интегральному исчислениям Ньютон получил раньше Лейбница, но Лейбниц пришел к тем же результатам самостоятельно и опубликовал их раньше Ньютона. Лейбницу принадлежат термины: «дифференциал», «дифференциальное исчисление», «дифференциальное уравнение», «функция», «алгебраические и трансцендентные кривые».

И. Ньютон.

* До него были изучены только конические сечения, т. е. кривые второго порядка, он же систематически рассмотрел кривые третьего порядка.



Г. В. Лейбниц.

Математические символы, введенные Лейбницем, имели решающие преимущества перед ньютоновскими: они употребляются и в настоящее время.

Лейбницем доказана теорема о сходимости знакочередующегося ряда, изложены приемы решения некоторых дифференциальных уравнений, начато исследование соприкасающихся кривых и огибающих.

Лейбниц внес важный вклад в алгебру: он разработал метод решения систем линейных уравнений и фактически ввел в рассмотрение детерминанты (определители).

Лейбниц является одним из первых провозвестников современной «машинной математики». Он сконструировал арифмометр, который был совершеннее паскалева и основан на новых принципах.

Лейбниц явился основателем математической школы, к которой принадлежали братья Бернулли Якоб и Иоганн, а также маркиз Лопиталь — автор первого учебника по дифференциальному исчислению. Лейбниц издавал и первый в Европе научный журнал.

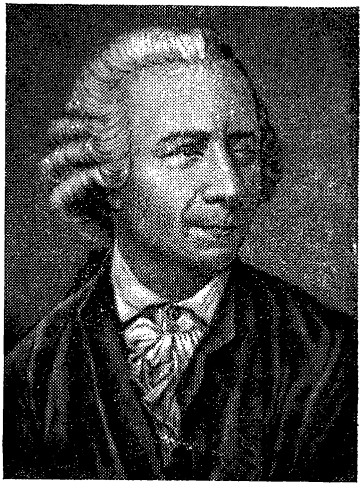
Бернулли Якоб (1654—1705) — профессор Базельского университета. Применил дифференциальное исчисление к изучению замечательных кривых линий; впервые открыл и доказал один из важнейших законов теории вероятностей (закон больших чисел, позднее названный законом Бернулли); открыл числа, позднее названные **бернуллиевыми** числами; обнаружил расходимость гармонического ряда; совместно с братом Иоганном Бернулли нашел методы решения вариационных задач.

Бернулли Иоганн (1667—1748) — профессор Гронингенского (Голландия) и Базельского университетов, почетный член Петербургской Академии наук, в изданиях которой опубликовал 9 работ. Дал правило раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Ему принадлежит первое систематическое изложение дифференциального * и интегрального исчислений. Он продвинул вперед разработку методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. И. Бернулли был учителем Л. Эйлера.

---

* Учебник Лопиталя был издан по лекциям и запискам И. Бернулли.

Бернулли Даниил (1700—1782) — сын Иоганна Бернулли, занимался физиологией и медициной, но больше всего математикой и механикой. Значительный период его деятельности протекал в России. В изданиях Петербургской Академии наук им опубликовано 47 работ. Ему принадлежит основное уравнение движения идеальной жидкости, названное позднее уравнением Бернулли. Он первый применил тригонометрические ряды к решению дифференциальных уравнений с частными производными.

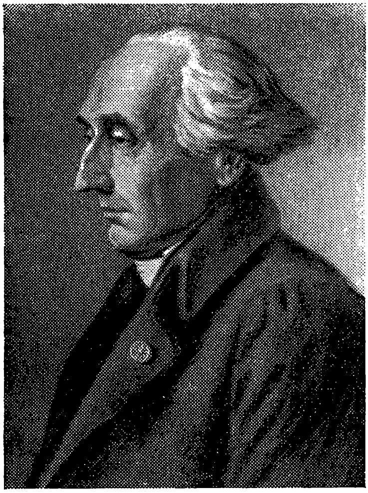


Л. Эйлер.

Леонард Эйлер (1707—1783) — величайший математик, петербургский академик. За 76 лет своей жизни Эйлер написал столько сочинений по математике, механике, астрономии, гидродинамике, оптике, по вопросам артиллерии и мореплавания, что, как недавно было подсчитано, для простой переписки их от руки (считая рабочий день 8-часовым) потребовалось бы более 60 лет. Полного собрания сочинений Эйлера до сих пор не существует. В настоящее время вышло более 40 больших томов, которые, однако, охватывают меньше половины из написанного им.

Д'Аламбер.

Леонард Эйлер оставил глубокий след во всех областях математики. Изучающий высшую математику на каждом шагу встречается с теоремами, формулами и методами, носящими имя Эйлера. По справедливости их число нужно было бы увеличить в несколько раз. Эйлер разработал и систематизировал весь классический математический анализ, развил учение о бесконечных рядах и теорию

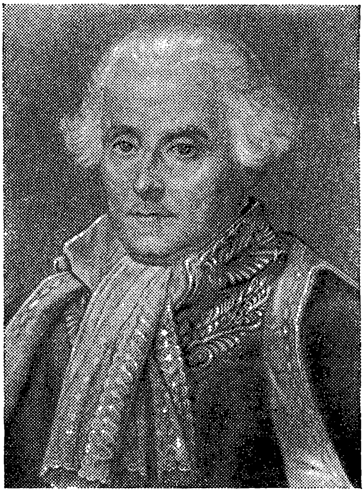


Ж. Л. Лагранж.

дифференциальных уравнений, создал новую науку — вариационное исчисление, создал первые общие методы в теории чисел. «Читайте, читайте Эйлера, это учитель нас всех», — так говорил об Эйлере знаменитый французский математик Лаплас. Великие математики XIX века Гаусс и Чебышев настоятельно советовали своим ученикам читать Эйлера, считая, что ничто не может заменить непосредственного знакомства с его великими творениями.

Д'Аламбер (1717 — 1783) — французский математик и философ-просветитель. Ему принадлежат важные исследования по теории дифференциальных уравнений и по теории рядов. Впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем. Эти правила называют принципом Д'Аламбера. Д'Аламбер был членом Парижской, Петербургской и других академий наук.

Жозеф Луи Лагранж (1736 — 1813) — великий французский математик и механик. Лагранж наряду с Эйлером является создателем вариационного исчисления. Ему принадлежат важные результаты в теории дифференциальных уравнений. Лагранж предпринял глубокие исследования всех методов решения алгебраических уравнений в радикалах и выявил, что в основе их лежит рассмотрение группы перестановок корней уравнения. Этим впервые в алгебру были введены группы. В настоящее время теория групп занимает одно из центральных мест не только в алгебре, но и во всей математике. Лагранж оставил также глубокие исследования по теории чисел.



Лаплас.

Лаплас (1749 — 1827) — знаменитый французский астроном, математик и физик. Ему принадлежат обширные и важные работы по небесной механике, объясняющие движение тел солнечной системы. Ему принадлежат фундаментальные работы по дифференциальным уравнениям, по теории вероятностей, теории капиллярности и другим вопросам.

XIX век

Развитие математики в XIX веке стало необычайно интенсивным, двинулось вперед гигантскими шагами по очень многим совершенно новым направлениям и привело по богатству и глубине содержания к колоссальным ценным для теории и практики результатам. Раскрыть все это здесь невозможно, поэтому о заслугах математиков XIX века мы можем привести лишь очень ограниченные сведения.

Фурье Жан (1768—1830) — выдающийся французский математик. Среди его работ наиболее замечательной является теория распространения тепла, в которой он развил чрезвычайно важное учение о разложении в тригонометрический ряд (как теперь называют, «в ряд Фурье») функций, которые заданы на различных участках различными аналитическими выражениями.

Гаусс Карл Фридрих (1777 — 1855) — великий немецкий математик. В возрасте 19 лет Гаусс решил вопрос о том, какие правильные многоугольники могут быть построены циркулем и линейкой. В древности знали, что это возможно, если число сторон

$$n = 3;\quad 6;\quad 12 \text{ и т. д.}$$

$$n = 4;\quad 8;\quad 16 \text{ и т. д.}$$

$$n = 5:\quad 10;\quad 20 \text{ и т. д.}$$

Вопрос же о возможности построения правильного семиугольника не был решен вплоть до XVIII века.

Гауссу принадлежит первое доказательство возможности построения правильного 17-угольника и, вообще, правильного n-угольника, если n — простое число и имеет вид $2^{2^k}+1$.

Это условие является не только достаточным, но и необходимым. Поэтому из теории Гаусса вытекает невозможность построения правильного семиугольника (хотя число 7 простое, но оно не имеет вида $2^{2^k}+1$).

Таким образом, Гауссом был разрешен полностью и вопрос о построении правильного семиугольника.

Занимаясь этой проблемой, Гаусс построил теорию решения в радикалах специального класса уравнений, развив методы, которые впоследствии легли в основу теории Галуа. Вскоре после этого он строго доказал основную теорему алгебры. Гауссу же принадлежит геометрическая интерпретация комплексных чисел. В его труде «Арифметические исследования» заложен фундамент современной теории чисел.

К. Ф. Гаусс.

Занимаясь геодезией, Гаусс пришел к идее построения внутренней геометрии поверхностей, которую он и развил. Гауссу принадлежат также основополагающие труды по математическому анализу и теории вероятностей. Гаусс оставил фундаментальные исследования по астрономии, физике (теории магнетизма) и геодезии.

Коши Огюстен Луи (1789 — 1857) — великий французский математик. Ему принадлежит более 750 работ, относящихся ко всем областям математики, многим областям механики и физики.

Одной из основных заслуг Коши является строгое обоснование понятий и положений дифференциального и интегрального исчислений путем систематического использования понятия предела. Ему принадлежат также работы первостепенного значения по теории дифференциальных уравнений.

Коши является создателем систематической теории функций комплексного переменного. Он оставил важные исследования по алгебре, теории групп, теории чисел и математической физике.

О. Л. Коши.

Больцано Бернардо (1781 — 1848) — знаменитый чешский математик. Внимание Больцано особенно привлекали вопросы логического обоснования математического анализа. Он раньше Коши определил на основе теории пределов понятие непрерывной функции, вывел основные свойства этих функций, наконец, построил первый пример непрерывной кривой, которая ни в одной своей точке не имеет касательной. В трудах Больцано содержались элементы теории множеств и теория функций действительного переменного.

Будучи профессором богословия в Пражском университете, Больцано смело выступал против господствующих в то время религиозных взглядов и «теорий». За это он был лишен кафедры, сослан в деревню и ему запретили публично выступать и печатать свои сочинения. Поэтому некоторые из его важнейших математических сочинений были опубликованы только в наши дни.

Б. Больцано.

Лобачевский Николай Иванович (1792 — 1856) — великий русский математик, создатель неевклидовой геометрии. Это гениальное творение Лобачевского открыло новую эпоху не только в геометрии, но и в математике вообще. Ему принадлежит и ряд ценных работ в области алгебры, тригонометрических рядов и рядов вообще. Великие идеи Лобачевского не были поняты его современниками. Полное признание и широкое распространение новая геометрия получила лишь спустя 12 лет после смерти ее творца.

Остроградский Михаил Васильевич (1801 — 1861) — крупнейший русский математик, академик. Его основные работы относятся к математическому анализу, теоретической механике и математической физике. Особенно большое значение имели его работы по распространению тепла в твердом теле и в жидкости, в которых он предвосхитил многие идеи функционального анализа, созданного лишь в XX веке.

Н. И. Лобачевский.

Остроградский был членом Нью-Йоркской Академии наук, Туринской Академии, Римской Академии и членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

Абель Нильс Генрик (1802 — 1829) — норвежский ученый, один из величайших математиков XIX века. В его работах заложены основы современной алгебры и теории алгебраических функций. Еще будучи студентом, он занялся решением уравнений 5-й степени

М. В. Остроградский.

в радикалах. Сначала ему показалось, что он нашел такое решение, но вскоре сам обнаружил ошибку и в 1824 году доказал, что общее буквенное уравнение степени $n > 4$ в радикалах не решается.

Работая дальше над теорией алгебраических уравнений, Абель определил важный класс уравнений любой степени, которые разрешимы в радикалах. Эти уравнения в настоящее время называются абелевыми.

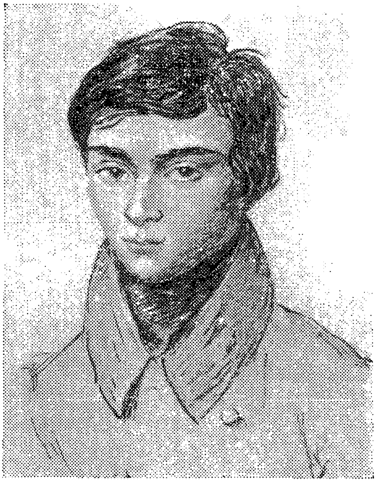
Абелю наряду с Коши и Гаусом принадлежит первое строгое построение теории степенных рядов и изучение их сходимости и в действительной и в комплексной областях. Его работы по теории эллиптических и алгебраических функций оказали решающее влияние на всю математику XIX века и послужили отправным пунктом для исследований Якоби, Вейерштрасса, Римана, Пуанкаре и многих других.

Абель умер очень молодым от туберкулеза. Настоящее признание его творения получили только после его смерти.

Галуа Эварист (1811 — 1832) — гениальный французский математик, творец основ современной алгебры, основоположник теории групп. Галуа нашел необходимое и достаточное условие разрешимости алгебраических уравнений высших степеней в радикалах. Он дважды представлял свои работы в Парижскую Академию наук. Однако даже такие крупные математики, как О. Коши и Ж. Фурье, не заметили огромную ценность и значимость идей Галуа и оставили их без внимания. Полное признание и широкое распространение работы Галуа получили лишь в 70-х годах XIX века.

Н. Г. Абель.

Идеи Галуа оказали огромное влияние не только на развитие алгебры, но и всей математики. Теория групп нашла применение и в естествознании, в современной квантовой механике, в кристаллографии. За последнее столетие нет такой области математики, развитие которой не было бы обязано идеям Галуа.

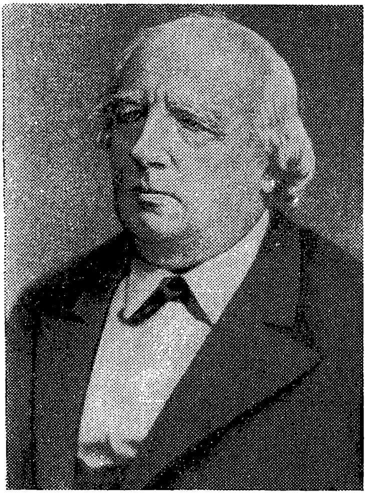


Э. Галуа.

Галуа принимал активное участие в политической борьбе против королевского режима во Франции; он дважды подвергался тюремному заключению и в возрасте 21 года был убит на дуэли, по-видимому, спровоцированной его политическими противниками. Галуа — самый молодой из самых великих и самый великий из молодых.

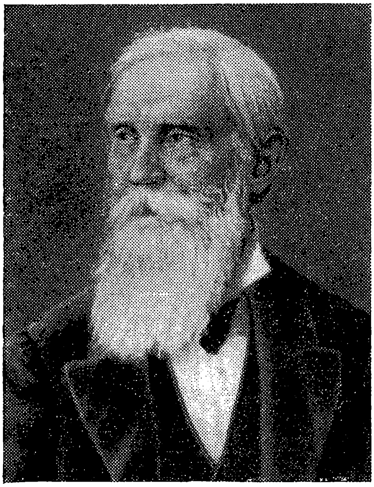
Вейерштрасс Карл (1815—1897) — выдающийся немецкий математик. Его работы посвящены математическому анализу, теории аналитических функций, дифференциальной геометрии и алгебре. Критические требования Вейерштрасса к работам по математическому анализу сыграли положительную роль в формировании современного анализа.

Риман Бернгард (1826—1866) — великий немецкий математик. Его работы по теории функции комплексного переменного по геометрии, математическому анализу и теории чисел составили эпоху в каждой из этих областей. Идеи Римана до сих пор являются незаменимыми при исследовании основных областей математики. Его новая концепция геометрии нашла широкое применение в теории относительности.



К. Вейерштрасс.

Чебышев Пафнутий Львович (1821—1894) — великий русский математик и механик, один из основателей Петербургской математической школы. Еще в «Началах» Евклида доказывалось, что простых чисел бесконечно много. Следующий шаг был сделан только П. Л. Чебышевым, который открыл и обосновал закон распределения простых чисел: он установил, что число простых чисел,



П. Л. Чебышев.

не превышающих числа N, равно приблизительно $\frac{N}{\ln N}$.

Занимаясь теорией механизмов, Чебышев создал новую математическую область — теорию наилучшего приближения функций полиномами, которая в настоящее время приобрела огромное значение. Наконец, Чебышев совершенно преобразовал теорию вероятностей, сделав ее строгой математической дисциплиной и сформулировав при очень общих предположениях основные теоремы этой теории.

Чебышеву принадлежит и много других работ по математическому анализу, теории поверхностей и т. д.

П. Л. Чебышев был прекрасным педагогом. Его учениками являются такие выдающиеся русские математики, как А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, А. М. Ляпунов и др.

Чебышев был избран членом Берлинской, Болонской, Парижской, Шведской академий наук, членом-корреспондентом Лондонского Королевского общества и почетным членом многих других русских и иностранных научных обществ, академий и университетов.

Ковалевская Софья Васильевна (1850—1891) — выдающийся русский математик; первая в мире женщина-профессор и член-корреспондент Петербургской Академии наук. Работы С. В. Ковалевской относятся к теории дифференциальных уравнений, теории алгебраических функций, теоретической механике.

Еще в 1874 году за работу «К теории уравнений в частных производных», «Дополнения и замечания к исследованиям Лапласа о форме кольца Сатурна» и «О приведении одного класса абелевых интегралов к интегралам эллиптическим» Геттингенский университет присудил Ковалевской степень доктора философских наук с высшей похвалой. За свою работу «Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки» она получила в 1888 году от Парижской Академии наук особо высокую премию ввиду большой ценности этой работы.

В следующем году за вторую работу о вращении твердого тела Ковалевской была присуждена еще одна премия Шведской Академией наук. Ковалевская как ученый получила мировое признание.

И вот несмотря на все это, несмотря на то, что С. Ковалевская получила мировое признание как ученый, все же она не была допущена к преподаванию ни в университете, ни даже на Высшие женские курсы. По законам того времени допущение женщины к преподаванию в высшей школе считалось как бы кощунством. Считалось недопустимым также и избрание женщины в члены-корреспонденты Академии наук. Все же по представлению академиков П. А. Чебышева, В. Г. Ишменецкого и В. Я. Буняковского в 1889 году С. Ковалевская была избрана членом-корреспондентом Петербургской Академии наук, после того как перед этим специально был решен принципиальный вопрос о допущении женщин к избранию в члены-корреспонденты.

С. В. Ковалевская.

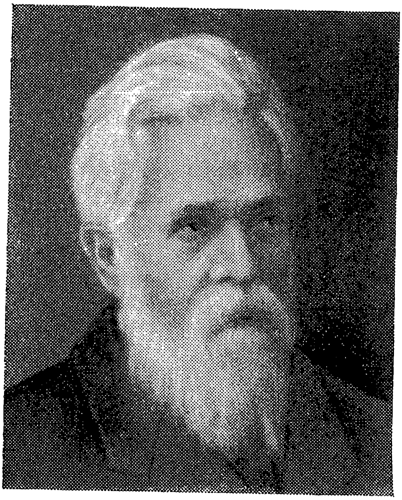
Не имея возможности отдать свой талант служению родине, к чему Ковалевская стремилась всей душой, она вынуждена была работать профессором Стокгольмского университета.

С. Ковалевская выступала и как писатель, и как публицист. Произведения Ковалевской свидетельствуют о широте ее общественных интересов и о ее сочувствии революционной борьбе.

Классические работы Ковалевской послужили ценным вкладом в развитие теории гироскопов и гироскопических приборов, получивших к настоящему времени необычайно широкое применение для навигационных и артиллерийских целей на морских судах, самолетах, а также для автоматического управления движением самолетов, судов, торпед, реактивных снарядов, космических кораблей.

Пуанкаре Анри (1854 — 1912) — великий французский математик, создатель качественной теории дифференциальных уравнений и теории автоморфных функций, в которой синтезированы основные, ведущие математические идеи XIX века: теории групп, теории функций и неевклидовых геометрий. В частности, ему принадлежит одна из интерпретаций геометрии Лобачевского, которая играет большую роль в теории функций комплексного переменного.

Пуанкаре заложил основы комбинаторной топологии — одной из важнейших математических дисциплин XX века. Он оставил важные исследования по теории рядов, небесной механике и др.



А. А. Марков.

Марков Андрей Андреевич (1856 — 1922) — выдающийся русский математик. Оставил крупные работы по теории чисел, теории вероятностей и математическому анализу. Особенно большое значение имеют его труды по теории вероятностей: он первый начал исследовать схемы зависимых случайных величин (так называемые цепи Маркова).

Цепи Маркова получили дальнейшее развитие в науке и в настоящее время нашли свое широкое применение в физике.

А. А. Марков был прогрессивным ученым. Он неоднократно выступал с разоблачением реакционных направлений в науке, в частности против действий царского правительства, отказавшегося утвердить избрание А. М. Горького в почетные члены Академии наук.

Ляпунов Александр Михайлович (1857 — 1918) — выдающийся русский математик и механик. Создал современную строгую теорию устойчивости равновесия и движения механических систем. Эта теория явилась основой развития автоматического регулирования производственных процессов и телеуправляемых систем. Ему принадлежат фундаментальные работы по математической физике, теории вероятностей и др.

А. М. Ляпунов.

Исследования Ляпунова являются источником новых работ во многих направлениях математики.

Кантор Георг (1845—1918)—выдающийся немецкий математик, создатель теории бесконечных множеств и теории трансфинитных чисел. В настоящее время теория множеств пронизывает все математические дисциплины, являясь как бы общим языком для них.

Эйнштейн Альберт (1879—1955). Особо следует остановиться на этом великом ученом, не столько математике, сколько физике, создателе физико-математической теории пространства и времени, а затем и тяготения, называемой теорией относительности. Эта теория является основой всей современной физики — исследования атомного ядра, превращений так называемых элементарных частиц, изучения космологических проблем.

А. Эйнштейн.

Господствовавшая до Эйнштейна со времен Галилея и Ньютона классическая физика не вступала в противоречие с фактами, пока она в своем развитии не столкнулась с изучением скоростей тел, которые уже нельзя было считать пренебрежимо малыми по сравнению со скоростью света. Именно тогда выяснилась ограниченность и упрощенность ньютоновских представлений. Это побудило Эйнштейна произвести полный пересмотр пространственно-временных представлений.

Установленное Эйнштейном на основе теории относительности соотношение между массой и энергией $E = mc^2$ играет решающую роль в деле использования внутриядерной энергии (E — энергия, m — масса, c — скорость света).

Теория Эйнштейна не умаляет значения теории Ньютона. Для движений со скоростями, пренебрежимо малыми по сравнению со скоростью света, теория Ньютона остается практически правильной. Но теперь она рассматривается как частный случай теории Эйнштейна.

В 1921 г. Эйнштейна приветствовали на своем заседании члены Королевского общества (Англия) в стенах того самого колледжа, где некогда жил и работал Исаак Ньютон. «Ньютон был для XVIII столетия тем, — заявил на заседании Резерфорд, — чем Эйнштейн стал для XX века», добавив при этом: «Признать этот факт англичанам, возможно, нелегко, но, как видите, они его признали».

В один из следующих дней Резерфорд* повел своего гостя к гробнице Ньютона в Вестминстере. Присутствоваший здесь Бернард Шоу**, пожимая руку Эйнштейна, сказал, обращаясь

---

* Резерфорд Эрнест (1871 — 1937) — великий английский физик, заложивший основу современного учения о радиоактивности и строении атома.

** Шоу Бернард (1856 — 1950) — выдающийся английский драматург и публицист.

к тени Ньютона: «Прости меня, Ньютон! Ты нашел единственно возможный для твоего времени путь, который был доступен человеку величайшей силы мысли, каким был ты... Понятия, созданные тобой, и сейчас еще ведут наше физическое мышление; но сегодня мы узнаем, что для более глубокого постижения мировых связей мы должны заменить твои понятия другими, более удаленными от сферы непосредственного опыта...».

Эйнштейн родился и работал в Германии. Со времени захвата власти фашистами началась травля Эйнштейна как общественного деятеля, борца против милитаризма. Это обстоятельство вынудило его в 1933 г. покинуть Германию. Впоследствии в знак протеста против гитлеровских гонений Эйнштейн, отказавшись от германского гражданства и звания члена Прусской Академии наук, переехал в г. Принстон (США), где жил и работал до конца своей жизни.

Главные результаты теории относительности (специальной и общей) Эйнштейн систематически изложил в своей книге «Сущность теории относительности» (ИЛ, М., 1955, стр.160).

Теория относительности с каждым годом приобретает все большее значение в физике. Без теории относительности невозможно понять процессы, происходящие в атоме, атомном ядре и космических лучах. Современные ускорители заряженных частиц рассчитаны на основе теории относительности. Выводы теории относительности подтверждены астрономическими наблюдениями.

* * *

Мы остановились на творчестве далеко не всех крупных математиков XIX века. Так, ничего не сказали ни о Дирихле, ни о Якоби, ни о Куммере, ни о Кронекере, ни о Софусе Ли, ни о Дедекинде. Не коснулись мы также и творчества наших замечательных соотечественников Е. И. Золотарева и Г. Ф. Вороного.

Кроме того, мы не имели возможности раскрыть сущность тех многих новых математических идей и направлений, которые возникли и получили свое развитие на протяжении последних столетий. Обо всем этом мы могли говорить здесь, разумеется, лишь в общих чертах и совершенно кратко.

По мере приближения к современности наша задача становится еще труднее, во-первых, потому, что необыкновенно разрослась сама математика и выросло число выдающихся исследователей, во-вторых, потому, что говорить о содержании современной математики популярно становится все труднее и труднее. Поэтому мы ограничимся лишь тем, что скажем несколько слов о крупнейшем математике конца XIX — начала XX века Давиде Гильберте, а затем остановим свое внимание еще на тех основных математических школах, которые работали в начале XX века в России.

Давид Гильберт (1862—1943) — великий немецкий математик. В своих многочисленных работах охватил почти все отрасли математики; полученные им результаты являются классическими. Он является одним из создателей двух важнейших математических дисциплин: функционального анализа и математической логики. Ему принадлежат важные результаты по теории чисел, теории инвариантов и др. Он дал также первую полную аксиоматику евклидовой геометрии и доказал ее непротиворечивость.

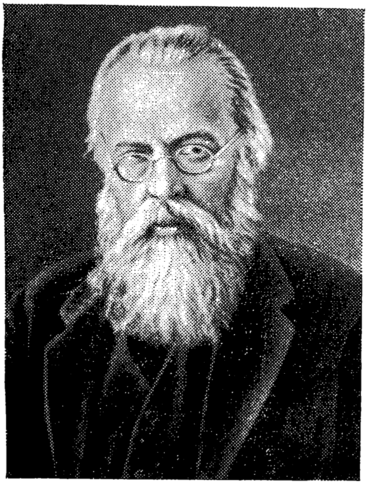
Д. Гильберт.

Большое значение для дальнейшего развития математики имели 22 проблемы, поставленные Гильбертом. Многие из них уже решены советскими математиками.

Из тех научных школ, которые работали в нашей стране до Великой Октябрьской социалистической революции, отметим 4 школы.

1. ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

С тремя крупнейшими ее представителями — П. Л. Чебышевым, А. А. Марковым и А. М. Ляпуновым — мы уже знакомы. Исследования по математической физике, которые культивировались в этой школе, продолжил В. А. Стеклов.



В. А. Стеклов.

В. А. Стеклов (1863—1926) — ученик А. М. Ляпунова. Ему принадлежат результаты большой важности по теории упругости, гидродинамике, теории распространения тепла, равновесия вращающейся жидкости и др. В. А. Стеклов с первых же дней Октябрьской революции отдал все свои силы, знания и авторитет делу развития науки в молодой Советской республике. В настоящее время Институт математики Академии наук носит имя В. А. Стеклова.

В Петербургской школе с успехом велись исследования и по теории чисел.

Н. Н. Лузин.

II. МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Она была основана **Д. Ф. Егоровым** (1869—1931) и **Н. Н. Лузиным** (1883—1950) — профессорами Московского университета.

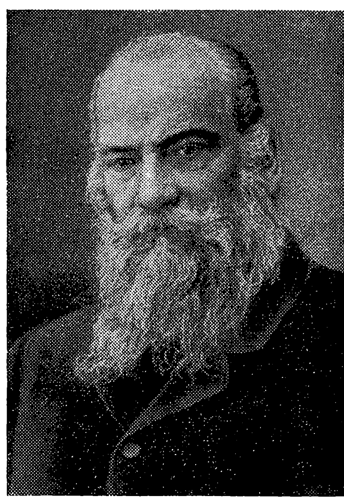
Работы Д. Ф. Егорова относятся к дифференциальной геометрии, дифференциальным и интегральным уравнениям, теории функций.

Учениками Егорова являются крупные советские ученые — Н. Н. Лузин, И. И. Привалов, В. В. Голубев, А. М. Размадзе, В. В. Степанов, И. Г. Петровский, Л. М. Сретенский, С. П. Фиников и др.

Основная заслуга в создании Московской школы теории функций принадлежит Николаю Николаевичу Лузину. Он не только сам имел в теории функций и теории множеств результаты первостепенной важности, но и сумел заинтересовать новой областью науки талантливую молодежь. Его учениками являются такие крупные математики, как М. Я. Суслин, П. С. Урысон, П. С. Александров, Д. Е. Меньшов, А. Я. Хинчин, Л. А. Люстерник, Н. К. Бари, А. Н. Колмогоров, Л. Г. Шнирельман, П. С. Новиков, М. В. Келдыш и др.

III. ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Жуковский Николай Егорович (1847 — 1921) — основоположник современной гидро- и аэромеханики, «отец русской авиации» (В. И. Ленин). Научное наследие Н. Е. Жуковского представляет необычайное по обширности и высокой полезности как для теории, так и для практики богатство. Здесь нет возможности выбрать и перечислить наиболее крупные работы Н. Е. Жуковского, так как все они крупные и весьма ценные и для науки, и для практики.



Н. Е. Жуковский.

В своей знаменитой работе «О присоединенных вихрях» Жуковский дал формулу для определения подъемной силы, действующей на самолет. Теоретически предсказанная Жуковским возможность «мертвой петли» была осуществлена впервые русским летчиком П. Н. Нестеровым.

А. Н. Крылов.

Учеником Н. Е. Жуковского является крупнейший ученый, математик и механик С. А. Чаплыгин.

Крылов Алексей Николаевич (1863—1945) — представитель другого направления прикладной математики, выдающийся русский математик, механик и кораблестроитель, основоположник теории корабля и кораблестроения, пользующейся мировой известностью. Он автор важных работ по теории магнитных и гироскопических компасов.

Большие исследования проведены Крыловым и в области артиллерии. Решая все эти труднейшие теоретические проблемы, имеющие огромную ценность для практики, Крылов внес значительный вклад и в математику. Его «Лекции о приближенных вычислениях» были первым в мировой литературе курсом приближенных вычислений и послужили образцом для вышедших после них курсов других авторов.

Его работа «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах», содержит целый ряд важных научных результатов. В нем исследованы вопросы, касающиеся вынужденных колебаний упругих систем, дан способ улучшения сходимости тригонометрических рядов.

Крыловым указан лучший способ решения так называемого «векового уравнения».

IV. ШКОЛА АЛГЕБРЫ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Она сформировалась в Киеве вокруг **Дмитрия Александровича Граве** (1883—1939). Учениками Граве являются: крупнейший специалист по алгебре, знаменитый полярный исследователь Отто Юльевич Шмидт, крупнейший советский математик-алгебраист Н. Г. Чеботарев и выдающийся алгебраист Б. И. Делоне.

Одним из крупных советских специалистов в области современной алгебры является профессор Московского университета А. Г. Курош.

УСПЕХИ СОВЕТСКИХ МАТЕМАТИКОВ

Безграничный простор для развития производительных сил, науки, искусства и культуры открылся после победы Великой Октябрьской социалистической революции. На новую, более высокую ступень поднялась у нас в СССР работа и в области математических наук. Советские математические школы, возглавляемые нашими учеными, такими, как академики П. С. Александров, С. Н. Бернштейн, И. М. Виноградов, М. В. Келдыш, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, Н. И. Мусхелишвили, П. С. Новиков, И. Г. Петровский, Л. С. Понтрягин, С. Л. Соболев, В. И. Смирнов и члены-корреспонденты Академии наук СССР И. М. Гельфанд, А. О. Гельфонд, Б. Н. Делоне, Л. Е. Меньшов, С. Н. Мергелян, И. Р. Шафаревич, по праву могут гордиться целым рядом достижений первостепенного значения.

Советские математические школы все с большим и большим успехом завоевывают ведущее место в мире по ряду отраслей математической науки: теории чисел (И. М. Виноградов, А. О. Гельфонд), конструктивной теории функций (С. Н. Бернштейн), теории вероятностей (А. Н. Колмогоров), топологии (П. С. Александров, Л. С. Понтрягин), уравнениям математической физики (И. Г. Петровский, С. Л. Соболев), теории упругости (Н. И. Мусхелишвили).

Советскими математиками достигнуты большие успехи и в деле создания разнообразных мощных математических машин. Созданы машины, позволяющие производить очень быстро огромные по объему и сложности вычисления, необходимые для строительства гигантов и проектирования сложных современных инженерных конструкций. С помощью этих машин сказочно быстро производятся, например, и необычайно большие по объему вычисления, необходимые для своевременного получения точных метеорологических данных, имеющих государственно важное значение. Выполнять многие из этих вычислений без машин раньше было практически невозможно.

Без современных математических машин невозможными были бы успешные запуски космических кораблей и космических ракет, невозможным было бы управление ими.

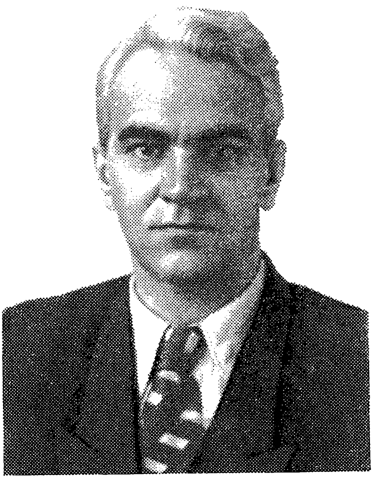
Счетномашинная техника уже широко применяется в устройствах для автоматического управления работой станков, движением самолетов, работой сложных установок и даже целых заводов.

Машинная вычислительная техника стала мощным средством и для научных исследований.

Машинновычислительная техника есть одно из новейших крупных достижений математической науки. В настоящее время мы являемся свидетелями необычайно бурного роста и развития этой техники.

Для развития науки в нашей стране созданы и продолжают создаваться необычайно благоприятные условия.

После Октябрьской революции, кроме университетов, основанных до революции*, возникли и укрепились университеты в Баку, Тбилиси, Ташкенте, Ереване, Петрозаводске, Перми, Горьком, Днепропетровске, Минске, Алма-Ате, Свердловске, Ростове-на-Дону, Иркутске, Хабаровске, Воронеже, Риге, Кишиневе, Вильнюсе, г. Фрунзе, Львове**, Саратове, Волгограде, Ашхабаде, Ужгороде, Самарканде, Черновицах. Выросла огромная сеть новых педагогических институтов с физико-математическими факультетами. Выросла новая сеть специальных научно-исследовательских математических институтов. Математическими центрами страны стали, кроме Москвы и Ленинграда, Киев, Тбилиси, Ташкент, Одесса, Саратов, Томск, Горький, Свердловск.



М. В. Келдыш.

В настоящее время создан и бурно развивается новый крупнейший научный центр в г. Новосибирске, призванный поставить на службу народов Советского Союза неисчислимые природные богатства Сибири.

Этот огромный рост научных математических центров привел к формированию в нашей стране крупных специалистов по самым разнообразным ветвям математической науки.

Успешное проникновение в тайны строения материи, запуски советских спутников, облет и фотографирование Луны, запуски космических кораблей с возвращением на землю, беспримерный полет Ю. А. Гагарина, впервые в мире проложившего путь в просторы вселенной, последующие более длительные и более усложненные полеты советских космонавтов требовали решения комплекса сложнейших научных проблем, в том числе и математических. Наши математические школы с решением этих проблем справились блестяще. Особенно большая заслуга в решении этих труднейших математических и механических проблем принадле-

* До Октябрьской революции университетскими городами были лишь Москва, Петроград, Киев, Харьков, Казань, Одесса, Томск, Юрьев (прежнее название г. Тарту Эстонской ССР).

** Во Львове университет существовал и до воссоединения Львовской области с УССР.

жит одному из наших крупнейших ученых в области математики, механики и вычислительной техники **М. В. Келдышу.**

М. В. Келдышу принадлежат фундаментальные математические исследования в области теории функций комплексного переменного, теории потенциала, приближенных методов решения дифференциальных уравнений, теории операторов и др.

Труды М. В. Келдыша являются образцом сочетания глубоких теоретических изысканий с их блестящим приложением к решению математических и механических проблем, связанных с практикой коммунистического строительства. На заре возникновения современной скоростной авиации человечество столкнулось с таинственным и грозным явлением. При подходе к известной границе скоростей оперение и крылья самолета начинали безудержно вибрировать. Вибрация достигала такой силы, что машина распадалась в воздухе. Это явление было названо флаттером. Никакими мерами по усилению прочности самолета не удавалось устранить флаттер. М. В. Келдыш разработал полную математическую теорию флаттера. Его теория указала реальные средства устранения флаттера. Так был опрокинут один из барьеров, мешавших нарастанию скоростей в авиации.

Исследования М. В. Келдыша по теории крыльев, движущихся на небольшой глубине под поверхностью жидкости, привели к созданию быстролетного корабля-судна на подводных крыльях.

Все эти ранние работы М. В. Келдыша перекрыты в настоящее время его последующими выдающимися достижениями.

На пресс-конференции, посвященной полету космонавта Германа Титова, академик М. В. Келдыш сказал: «Полеты советских кораблей-спутников показывают, что приближается время, когда человек сможет проникнуть далеко в космическое пространство, осуществить вековые мечты о полетах на Луну, Марс, Венеру и в еще более далекие глубины вселенной».

М. В. Келдыш принадлежит к плеяде таких ученых, чьи труды способствуют умножению могущества и славы нашего социалистического отечества.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

20. Верно. **31.** $\frac{x^3+y^3+z^3}{3xyz}$. **32.** $(x-y)^{10}$.

33. $k^2+(k+1)^2+k^2$, или $(k-1)^2+k^2+(k+1)^2$.

34. $(100x+10y+z)(x+y+z)$. **36.** При $x=5$ и $x=-5$.

37. Может. $|5|=|-5|$, но $5\neq-5$. **38.** Если $a>0$, то $a>-a$; если $a<0$, то $a<-a$.

50. $8-11-5+14$; $1-a-b+c-d$.

51. $-5+13-8$; $a+b-c-d$.

52. $15+(-9)$; $a+(-b)+(-c)$.

53. $2x^2-x-6$; $\frac{1}{6}x^2y^2+\frac{3}{4}xy$.

54. $2m$; $2a^2+2b^2$; $4ab$; x^2.

55. $2n$; $4ab$; $2a^2+2b^2$; $9x^2-10x+8$.

56. a^3+1; $x^4+x^2y^2+y^4$; $6x^2-xy-35y^2$.

57. $15x-1$; $x+y-1$; $2a$; a^6-b^6.

58. $(a^2-c^2)-(b^2-2bc)$. **59.** $a-(b-c+d)$.

63. $2a+5$; $3x^2+9x+7$; 19; $3x^2-3x-7$; $2b^2+2ab-3a-b+6$.

68. Сторону основания в сантиметрах обозначьте буквой x. Тогда длина бокового ребра будет $\frac{256-8x}{4}$, т. е. $64-2x$. Полная поверхность равна $4x(64-2x)+2x^2$ *см*^{2}. Сторона основания составит $21\frac{1}{3}$ *см*.

69. $4x^2-4(y+3)x+2y^2-4y+37=[2x-(y+3)]^2-(y+3)^2+2y^2-4y+37=(2x-y-3)^2+y^2-10y+28=(2x-y-3)^2+(y-5)^2+3$.

Данный многочлен отрицательных значений принимать не может.

70. При $y=0$ и $x=5$. **71.** При $y=2$ и $x=3$.

72. $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\left\{x^2+y^2-\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]\right\}=10\left\{60-\frac{1}{2}[10^2-60]\right\}=400.$

73. $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2=(x^2+y^2)^2-2\times\left[\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}\right]^2=60^2-2\cdot\left[\frac{10^2-60}{2}\right]^2=2800.$

74. Нельзя было делить на $a-b$. Ведь по условию $a=b$, а потому $a-b$ равно нулю. На нуль же делить нельзя.

84. Пусть в первом доме x окон, тогда во втором $2x$ окон, а в третьем $2x+40$. По условию задачи $x+2x+(2x+40)=540$. Отсюда $x=100$. Отв. 100; 200; 240.

85. Пусть уток было x голов; тогда гусей должно быть $2x$. По условию задачи $\frac{20\cdot 2x}{100}+\frac{30\cdot x}{100}=8400$, или $70x=840\,000$. Отсюда $x=12\,000$.

Уток было 12 000, а гусей 24 000. Уток стало $12\,000+\frac{30\cdot 12\,000}{100}$, т. е. 15 600, а гусей стало $24\,000+\frac{20\cdot 24\,000}{100}$, т. е. 28 800.

86. Пусть сыну в настоящее время x лет. Тогда отцу $(x+24)$ года. Через 5 лет сыну будет $(x+5)$ лет, а отцу $(x+24+5)$ лет. По условию задачи $(x+5)\,5=x+24+5$, или $5x+25=x+29$. Одно слагаемое $5x$ равно сумме $(x+29)$ минус другое слагаемое, т. е. $5x=x+29-25$, или $5x=x+4$.

Если из суммы $5x$ отнять слагаемое x, то получится другое слагаемое. Следовательно, $5x-x=4$, или $4x=4$. Отсюда $x=1$, т. е. сыну в настоящее время 1 год.

87. 0,729; 1024; $\frac{1}{1024}$; $-0{,}00001$; $\frac{225}{16}$; $\frac{64}{27}$; -16; 32.

88. 1) 1; 2) -1; 3) 1, если k — четное число, и -1, если k — нечетное число.

89. a^5; x^3; a^{12}; $(a+b)^5$; a^{11}; $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{11}$. **91.** a^{16}.

92. x^3; $-a^3$; y^3; $(a-2b)^4$; a; $\left(\frac{3}{7}\right)^2$; x^2; 1.

92а. $-0{,}8a^3bc$; $\frac{1}{3}r$; $2(a+b)(x-y)^2$.

92б. m; xy; $5a^2b^2c$; $a(x+y)$; $a^3(x+y)^3$; $5(x-y)$.

92в. $2a+b-3c$; $2b+3bc$; $2y-3z+x$; a^2+a+2; $5(a+x)^2-6\times$ $\times(a+x)+4$.

92г. $4a(b-2c)$; $4a^4b^2(2a-3b)$; $x^k(x^{2k}+1)$; $a^m(a^n-1)$; $(x-y)(a+b)$; $(a+b+c)^2$; $(x+y)^7(x+y+1)$; $(x+z)(y+1)$; $(a+1)(b+1)$; $(p-q)(m-n)$.

93. $(a+b+x+y)(a+b-x-y)$; $(a+b+1)(a+b-1)$; $(1+xy)\times$ $\times(1-xy)$; $(6a^2b+7x^2)(6a^2b-7x^2)$; $(a+2b)^2$; $(ax-b)^2$; $[3(3x+y)-1]^2=$ $=(9x+3y-1)^2$; $-(x-y)^2$.

94. $(a+2)(a^2-2a+4)$; $(a-3)(a^2+3a+9)$; $(x+1)(x^2-x+1)$; $(x+y-1)[(x+y)^2+(x+y)+1]=(x+y-1)(x^2+2xy+y^2+x+y+1)$; $-(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

95. $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$; $(a^3)^2-(b^3)^2=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=(a+b)\times$ $\times(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$; $a(a+1)(a-1)$; $4-(x+y)^2=$ $=(2+x+y)(2-x-y)$; $1-(x-y)^2=(1+x-y)(1-x+y)$; n^4+4n^2+ $+4-4n^2=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$.

96. Полагая $b+c=x$, $c+a=y$, $a+b=z$, преобразуем левую часть тождества в обозначениях x, y, z: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+$ $+y^2+z^2-xy-xz-yz)=(x+y+z)[(x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)]$ (см.

стр. 111). Но $x+y+z=2(a+b+c)$ и $xy+xz+yz=(b+c)(c+a)+$ $+(b+c)(a+b)+(c+a)(a+b)=a^2+b^2+c^2+3(ab+ac+bc)$.

Поэтому $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(a+c)(c+b)(a+b)=2\times$ $\times(a+b+c)[4(a+b+c)^2-3(a^2+b^2+c^2)-9(ab+ac+bc)]=2(a+b+$ $+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=2(a^3+b^3+c^3-3abc)$.

97. 1) $\frac{9bc^2}{16ad^2}$; 2) $\frac{b}{a}$; 3) $-\frac{x}{y}$; 6) $\frac{b+c}{x+y}$; 7) $\frac{x+3}{x^2-3x+9}$.

98. 1) $2880abc$; 2) $xy(x+y)$; 3) $x(x^4-1)$; 4) $(a-b)(b-c)(c-a)$.

99. 3) $\frac{r+q-p}{pqr}$; 6) 0.

106. Каждую дробь, состоящую из левой части тождества, преобразуем по формуле

$$\frac{1}{[a+(k-1)d](a+kd)}=\frac{1}{d}\left[\frac{1}{a+(k-1)d}-\frac{1}{a+kd}\right],$$

полагая последовательно $k=1, 2, 3, \ldots, n$. (Справедливость этой формулы легко доказать преобразованием ее правой части.)

После этого левая часть подлежащего доказательству тождества примет вид:

$$\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}\right)+\left(\frac{1}{a+d}-\frac{1}{a+2d}\right)+\left(\frac{1}{a+2d}-\frac{1}{a+3d}\right)+\right.$$
$$\left.+\ldots+\left[\frac{1}{a+(n-1)d}-\frac{1}{a+nd}\right]\right\}.$$

Это последнее выражение после раскрытия соответствующих скобок и приведения подобных членов преобразуется в выражение, в точности равное правой части тождества.

107. Из равенства $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ следует: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\right.$ $\left.+\frac{yz}{bc}\right)=1^2$. Отсюда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-2\left(\frac{xy}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}\right)$, или $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+$ $+\frac{z^2}{c^2}=1-2\cdot\frac{cxy+bxz+ayz}{abc}$ (A).

Из равенства $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ следует: $\frac{ayz+bxz+cxy}{xyz}=0$, или $ayz+$ $+bxz+cxy=0$.

Следовательно, с учетом равенства (A) получаем, что

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

108. Из равенства $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$ следуют равенства:

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)(b-c)}+\frac{c}{(a-b)(b-c)}=0;$$
$$\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)(c-a)}=0;$$
$$\frac{a}{(b-c)(a-b)}+\frac{b}{(c-a)(a-b)}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Складывая, получим:

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)+$$
$$+\frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-b}\right)+\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)=0,$$

или

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}-\left[\frac{a}{(c-a)(a-b)}+\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\right.$$
$$\left.+\frac{c}{(b-c)(c-a)}\right]=0.$$

Но $\frac{a}{(c-a)(a-b)}+\frac{b}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(b-c)(c-a)}=$

$$=\frac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)}{(c-a)(a-b)(b-c)}=$$
$$=\frac{ab-ac+bc-ab+ac-bc}{(c-a)(a-b)(b-c)}=0.$$

Поэтому $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$

113. 39 400 *л. с.* **114.** 0,001 *кг.* **115.** 45 *м.* **116.** 1 *кг.* **117.** Приблизительно 12 *кг.* **118.** Приблизительно 27 *ом.*

131. Из равенства $a^2+b^2+c^2=1$ следует равенство $a^4+b^4+c^4+2\times\times(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=1$. Отсюда

$$a^4+b^4+c^4=1-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2). \qquad \text{(A)}$$

Из равенства $a+b+c=0$ следует равенство $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$, или $1+2(ab+ac+bc)=0$. Отсюда $ab+ac+bc=-\frac{1}{2}$, или $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2$, или $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)=\frac{1}{4}$. Отсюда $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{1}{4}$. (Ведь $a+b+c=0$.) Теперь из равенства (А) получим: $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$.

132. Числа a_1 и b_1 не могут быть нулями одновременно, так как $a_1^2+b_1^2=1$. Пусть $b_1\neq 0$. Тогда из равенства $a_1a_2+b_1b_2=0$ имеем: $b_2=-\frac{a_1a_2}{b_1}$.

Это выражение b_2 подставим в равенство $a_2^2+b_2^2=1$. Получим: $a_2^2+\left(-\frac{a_1a_2}{b_1}\right)^2=1$, или $a_2^2\cdot\frac{a_1^2+b_1^2}{b_1^2}=1$, или $a_2^2=b_1^2$, так как $a_1^2+b_1^2=1$.

В равенство $a_1^2+b_1^2=1$ подставим вместо b_1^2 равную ей величину a_2^2. Получим первое требуемое равенство: $a_1^2+a_2^2=1$.

Подставляя в равенство $a_2^2+b_2^2=1$ вместо a_2^2 величину b_1^2, получим требуемое второе равенство: $b_1^2+b_2^2=1$.

Теперь докажем справедливость третьего равенства.

В выражение $a_1b_1+a_2b_2$ подставим $\frac{-a_1a_2}{b_1}$ вместо b_2.

Получим

$$a_1b_1 + a_2 \cdot \frac{-a_1a_2}{b_1}.$$

Если допустить, что $a_1=0$, то требуемое третье равенство будет справедливым.

Теперь допустим, что $a_1 \neq 0$.

Тогда

$$a_1b_1 + a_2b_2 = a_1b_1 + a_2 \cdot \frac{-a_1a_2}{b_1} = a_1 \frac{b_1^2 - a_2^2}{b_1}.$$

Но из данного равенства $a_1^2 + b_1^2 = 1$ и доказанного равенства $a_1^2 + a_2^2 = 1$ путем вычитания получим, что $b_1^2 - a_2^2 = 0$. Следовательно, $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Доказана справедливость и третьего равенства.

133. При $x<1$ $|x-1| = 1-x$, $|x-2| = 2-x$. Следовательно, при $x<1$ данное уравнение принимает вид: $1-x+2-x=1$. Отсюда $x=1$. Это свидетельствует о том, что данное уравнение не имеет ни одного корня, меньшего единицы.

При $1 \leqslant x \leqslant 2$ $|x-1| = x-1$ и $|x-2| = 2-x$. При этом данное уравнение принимает вид: $x-1+2-x=1$.

Последнее равенство удовлетворяется при всяком значении x. Это свидетельствует о том, что все значения x, удовлетворяющие условию $1 \leqslant x \leqslant 2$, являются корнями данного уравнения. Например, $1\frac{1}{8}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ будут корнями данного уравнения. Действительно, равенства $\left|1\frac{1}{8}-1\right| + \left|1\frac{1}{8}-2\right| = 1$; $|\sqrt{2}-1| + |\sqrt{2}-2| = 1$; $|\sqrt{3}-1| + |\sqrt{3}-2| = 1$ справедливы.

При $x>2$ $|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2$. Следовательно, при $x>2$ данное уравнение принимает вид: $x-1+x-2=1$. Отсюда $x=2$. Это свидетельствует о том, что данное уравнение не имеет ни одного корня, большего, чем число 2.

Итак, корнями данного уравнения являются все числа, заключенные между единицей и двумя, а также и числа 1 и 2. Никаких других корней данное уравнение не имеет.

135. 1) $\frac{a+b}{2}$; $\frac{a-b}{2}$; 2) 0; 2; 3) 60; 36; 4) -162; 42; 5) 10; 5; 8) 1; 4; 11; 10) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$.

136. $2k+1 = k^2+2k+1-k^2 = (k+1)^2-k^2$.

137. $ab(2a+b)(a+2b) = a(2a+b) \cdot b(a+2b) = (2a^2+ab)(ab+2b^2)$.

Положим, что $2a^2+ab = x+y$, $ab+2b^2 = x-y$.

Складывая и вычитая, получим, что $x = a^2+ab+b^2$, $y = a^2-b^2$.

Следовательно, $ab(2a+b)(a+2b) = (x+y)(x-y) = x^2-y^2$, или окончательно $ab(2a+b)(a+2b) = (a^2+ab+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$.

138. 24 000 *куб. м.* **139.** $\frac{5}{4}$ часа.

140. Первой краски возьмем x *кг*, а второй y *кг*. По условию задачи

$$\begin{cases} x+y=40, \\ \dfrac{\frac{7}{10}x+\frac{3}{5}y}{\frac{3}{10}x+\frac{2}{5}y}=\dfrac{5}{3}. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=10, \\ y=30. \end{cases}$$

141. За одну минуту часовая стрелка поворачивается на угол, равный $\frac{1}{2}$ градуса, а минутная — на 6 градусов.

Пусть стрелки часов оказались взаимно перпендикулярными первый раз после полуночи через x мин.

Тогда $6x-\frac{1}{2}x=90$. Отсюда $x=16\frac{4}{11}$.

142. 504 *км*. **143.** $\dfrac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}}$ час; $\dfrac{2}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ час; $\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$ час.

145. 7,2; 7,25; 7,252; 7,2522; ...
7,3; 7,26; 7,253; 7,2523; ....

146. 1) 385; 2) 96; 3) $\frac{7}{4}$; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 9; 7) -2.

146a. 1) $4x$; 2) $2x^5$; 3) $\frac{1}{2}xy^2$; 4) $\frac{2a^3}{9b^4}$; 5) $\frac{(a+b)^2}{a^2(a+2b)}$.

147. 1) $3\sqrt{7}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt[3]{2}$; 4) $6\sqrt{10}$; 5) $a\sqrt{b}$; 6) $a\sqrt{a}$; 7) $ab\sqrt[3]{2ab}$; 8) $\frac{a\sqrt{b}}{3x}$; 9) $(x+y)\sqrt{5}$; 10) $a^2b^2\sqrt[k]{ab^3}$.

148. 1) $\sqrt{12}$; 2) $\sqrt[3]{24}$; 3) $\sqrt[4]{48}$; 4) $\sqrt[5]{96}$; 5) $\sqrt{192}$; 6) $\sqrt{2a^2}$; 7) $\sqrt[3]{a^4}$; 8) $\sqrt{a^3b}$; 9) $\sqrt{x^2+x+1}$; 10) $\sqrt{a+b}$.

149. 1) $\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{7ab}$; 5) $\sqrt{3xy}$.

150. 1) $\frac{1}{b}\sqrt{ab}$; 2) $\frac{1}{b}\sqrt[3]{ab^2}$; 3) $\frac{a^2b}{c}\sqrt{abc}$; 4) $2a^2b\sqrt{a^2+3b^2}$; 5) $\frac{x}{y^2}\sqrt{x^2+y^2}$; 6) $c\sqrt{(a+b)c}$.

151. 1) $14\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{5}$; 3) $(3-y)\sqrt[3]{x^2y}$;
4) $(a+4x)\sqrt[3]{a}+(5a-b-2x)\sqrt{b}$.

152. 1) $5\sqrt{2}$; 2) $42\sqrt{3}$; 3) $4\sqrt[3]{3}$; 4) $5\sqrt{x}$; 5) $2x$; 6) $xy+x+1$;
7) $\sqrt[6]{72}$; 8) $a\sqrt[6]{a}$.

153. 1) $\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) $\frac{4}{3}$; 4) $\sqrt[4]{3}$; 5) $\sqrt[6]{2}$; 6) $\sqrt[6]{a}$.

154. 1) $\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt[3]{a}$; 3) $a\sqrt[n]{a^2}$.

155. 1) $\sqrt[4]{3}$; 2) $\sqrt[6]{2}$; 3) $\sqrt[4]{12}$; 4) $\sqrt[6]{24}$; 5) $\sqrt[6]{a^5}$; 6) $\sqrt[8]{128}$; 7) $\sqrt[24]{a^7}$.

156. 1) $3\sqrt{2}$; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$; 3) $\sqrt{a}$; 4) $\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$; 5) $\frac{\sqrt{x+y}}{x+y}$; 6) $\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$;
7) $\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$; 8) $6+\sqrt{35}$; 9) $\frac{18+5\sqrt{10}}{2}$; 10) $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$;

11) $\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$; 12) $\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}\,(5-\sqrt{5})}{10}$;

13) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$; 14) $\frac{4-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}{11}$;

15) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$.

157. 1) $\frac{3}{2(\sqrt{a+15}+\sqrt{a})}$; 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{(x+h)x}+\sqrt[3]{x^2}}$.

158. 1) 14; 2) $2x+2\sqrt{x^2-y}$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{14}$; 4) $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$.

159. 1) 273; 2) 2084. **160.** С недостатком $\frac{44}{20}$, с избытком $\frac{45}{20}$.

161. 1) $\begin{cases}\text{С недостатком } 1{,}732,\\ \text{с избытком } 1{,}733.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\text{С недостатком } 0{,}948,\\ \text{с избытком } 0{,}949.\end{cases}$

162. $\sqrt{2}=\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{9}$, значит, $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

166. $q=k\sqrt{f}$, где f — натяжение в килограммах, а q — число колебаний. $q=30$, когда $f=4$. Поэтому $30=k\sqrt{4}$. Отсюда $k=15$. Следовательно, $q=15\sqrt{f}$. При $f=9$ получим: $q=45$.

167. $T^2=kR^3$. $T=365$, когда $R=150$ млн. Следовательно, $365^2=k\times$ $\times(150\text{ млн.})^3$. Отсюда $k=\frac{365^2}{(150\text{ млн.})^3}$. Теперь имеем: $T^2=\frac{365^2}{(150\text{ млн.})^3}\cdot R^3$.

Чтобы узнать время обращения T Марса, подставим в последнюю формулу 225 млн. вместо R. $T^2=\frac{365^2}{(150\text{ млн.})^3}\cdot(225\text{ млн.})^3$. Сократив на $(75\text{ млн.})^3$, получим, $T^2=\frac{365^2}{2^3}\cdot 3^3$; $T^2=449\,634$; $T=\sqrt{449\,634}$, т. е. приблизительно $T=670$ (дней).

172. 3,45; $-1{,}45$.

176. Обозначим длину комнаты буквой x, а ширину буквой y, предполагая их выраженными в какой-либо одной и той же единице. По условию $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$, или $1+\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$. Обозначим искомое отношение $\frac{x}{y}$ буквой k. Тогда получим: $1+\frac{1}{k}=k$. Отсюда $k=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, т. е. приближенно $k=1{,}65$.

177. 20 и 30 часов.

178. Пусть токарь должен был изготовить x деталей за y дней. Тогда за один день он должен был изготовить $\frac{x}{y}$ деталей. По условию задачи

$$\begin{cases}\left(\frac{x}{y}+1\right)(y-5)=x,\\ \left(\frac{x}{y}-1\right)(y+7)=x.\end{cases}$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\begin{cases} x+y-5\cdot\dfrac{x}{y}-5=x, \\ x-y+7\cdot\dfrac{x}{y}-7=x, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y-5\cdot\dfrac{x}{y}=5, \\ -y+7\cdot\dfrac{x}{y}=7. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{x}{y}=6$; $y=35$; $x=210$.

179. Прейскурантную цену обозначим x руб. за метр, тогда $\frac{312}{x-\frac{1}{2}}+$ $+\frac{312}{x+\frac{1}{2}}=50$. Отсюда $x=12{,}5$. Магазин недополучил 1 руб.

180. 3 мин. 20 сек. **181.** $4x^2-4x-1=0$. **182.** $x^2-2mx+(m^2-n)=0$.

183. 1) $(x-3)(x-16)$; 2) $(3x-2)(5x+1)$.

184. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$.

185. Обозначив многочлен x^2+x+5 буквой y, разложим сначала на множители выражение $y^2+8xy+15x^2$. Рассматривая здесь букву y в качестве независимой переменной, а букву x в качестве известной величины и пользуясь формулой квадратного уравнения, найдем, что корнями многочлена $y^2+8xy+15x^2$ будут $-3x$ и $-5x$. Поэтому получим: $y^2+8xy+15x^2=$ $=(y+3x)(y+5x)$.

Следовательно, $(x^2+x+5)^2+8x(x^2+x+5)+15x^2=(y+3x)(y+5x)=$ $=(x^2+4x+5)(x^2+6x+5)=(x^2+4x+5)(x+1)(x+5)$.

186. $2ab-1=0$.

187. $(y+h)^2+p(y+h)+q=0$, $y^2+(2h+p)y+h^2+ph+q=0$. $2h+$ $+p=0$, $h=-\frac{p}{2}$. $y^2+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q=0$, $y^2=\frac{p^2}{4}-q$, $y=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, $x=h+y=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

189. Обозначим длину прямоугольника буквой x. Тогда ширина будет равна $\frac{p}{2}-x$, а площадь $x\left(\frac{p}{2}-x\right)$. С помощью выделения полного квадрата легко показать, что наибольшее значение площади получается при $x=\frac{p}{4}$, т. е. когда длина равна ширине.

190. Пусть r и h являются соответственно радиусом основания и высотой конуса, а x и y — радиусом основания и высотой цилиндра. Боковая поверхность цилиндра равна $2\pi xy$. Кроме того, $\frac{y}{h}=\frac{r-x}{x}$. Отсюда $y=$ $=\frac{h(r-x)}{r}$, а боковая поверхность цилиндра $\frac{2\pi h}{r}\cdot x(r-x)$.

Множитель $\frac{2\pi h}{r}$ является постоянной величиной. Поэтому достаточно искать наибольшее значение выражения $x(r-x)$. Наибольшее значение последнего выражения получается при $x=\frac{r}{2}$. Но если $x=\frac{r}{2}$, то $y=$ $=\frac{h\left(r-\frac{r}{2}\right)}{r}$, т. е. $y=\frac{h}{2}$. Следовательно, искомая наибольшая поверхность получается, когда высота цилиндра равна половине высоты конуса.

191. 1) $\pm\sqrt{2}$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) 6; -1; $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$; 3) $\frac{1\pm\sqrt{-17}}{2}$; 2; -1 (принять $x^2-x+2=y$, тогда $x^2-x+3=y+1$); 4) -1; $\frac{7\pm\sqrt{33}}{4}$; 5) $\pm\sqrt{-1}$; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

192. 1) 5; 2) 6; 3) 10; 4) $x_1=4$ и $x_2=-5$ (принять $\sqrt{x^2+x+5}=y$, тогда $x^2+x=y^2-5$); 5) 7; 6) -3; 7) $\dfrac{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^5+1}{\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^5-1}$ (см. стр. 287).

193. Приблизительно $x=3$, $y=3{,}2$.

199. Построить график функций $y=x^3$ и $y=3x^2-2$. Абсциссы точек пересечения и будут искомыми корнями.

204. $-2<x_1<x_2<2$. $(12x_2-x_2^3)-(12x_1-x_1^3)=(12x_2-12x_1)-(x_2^3-$ $-x_1^3)=(x_2-x_1)\,[12-(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)]$; $|x_2^2+x_1x_2+x_1^2|\leqslant|x_2^2|+|x_1x_2|+$ $+|x_1^2|<4+4+4=12$. Кроме того, $x_2-x_1>0$. Следовательно, $(12x_2-$ $-x_2^3)-(12x_1-x_1^3)>0$, или $12x_2-x_2^3>12x_1-x_1^3$.

А это и значит, что функция $12x-x^3$ на промежутке $(-2, 2)$ возрастает.

206. При замене x на $-x$ данное произведение не изменяется.

207. Геометрический образ (график) уравнения $y+|y|=x+|x|$ (1) удобно искать по частям.

1. Сначала найдем те точки, у которых $x>0$. Если $x>0$, то и $x+|x|=$ $=x+x=2x>0$. Но если $x+|x|>0$, то и $y+|y|>0$, а следовательно, и $y>0$. Итак, оказалось, что если $x>0$, то и $y>0$. А в таком случае уравнение (1) обратится в уравнение $2y=2x$, или $y=x$. Графиком же уравнения $y=x$ при $x>0$ является полупрямая OA (за исключением точки O), делящая пополам угол I квадранта.

2. Теперь станем искать те точки, у которых $x<0$. Если $x<0$, то $x+$ $+|x|=x-x=0$. Но если $x+|x|=0$, то и $y+|y|=0$, т. е. $y\leqslant 0$.

Итак, оказалось, что любая точка, у которой абсцисса отрицательна, а ордината отрицательная или нуль, принадлежит искомому графику. Это значит, что все точки, лежащие внутри III квадранта, и все точки, лежащие на левой половине оси X_1X, принадлежат искомому графику, за исключением точки O.

3. Найдем, наконец, точки, у которых $x=0$. Если $x=0$, то $x+|x|=0$. Но если $x+|x|=0$, то и $y+|y|=0$, т. е. $y\leqslant 0$. Это значит, что искомому графику принадлежат и все точки нижней половины оси Y_1Y, включая и точку O.

Из всего изложенного следует, что графиком уравнения (1) является весь III квадрант, включая его границы, и полупрямая OA, делящая угол I квадранта пополам, т. е. весь график состоит из части плоскости и полупрямой (рис. 235).

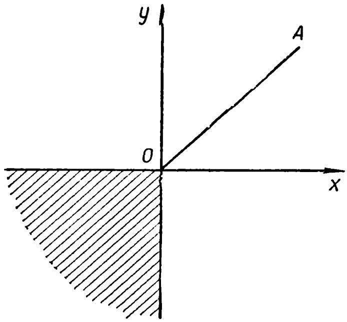


Рис. 235.

208. 2) Воспользоваться свойством корней приведенного квадратного уравнения. 3) Начать со сложения левых и правых частей данных уравнений. 4) Начать со сложения левых и правых частей данных уравнений и положить $x+y=z$. 5) См. стр. 337. 6) Применив сложение, можно найти, что $x+y=\pm 11$. 7) Положить $\frac{x}{y}=z$.

210. (0; 0), (1; 1).

211. Умножив на $x+y$, получим:

$$x^2-y^2+(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=20.$$

При $x+y>0$ это уравнение примет вид:

$$x^2-y^2+\sqrt{x^2-y^2}=20. \qquad (1)$$

При $x+y<0$ имеем:

$$x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}=20. \qquad (2)$$

Положим $\sqrt{x^2-y^2}=z$ $(z>0)$. Тогда уравнение (1) примет вид: $z^2+z-20=0$. Отсюда $z_1=4$; $z_2=-5$. Второе решение следует отбросить. Итак, $x^2-y^2=16$ и $x^2+y^2=34$.

Отсюда

$$1)\ \begin{cases} x=5; \\ y=3; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x=5; \\ y=-3; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x=-5; \\ y=3; \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} x=-5; \\ y=-3. \end{cases}$$

Из этих четырех решений годными являются лишь те, для которых $x+y>0$. Аналогично нужно решить и систему:

$$\begin{cases} x^2-y^2-\sqrt{x^2-y^2}=20, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$$

Отв. $1)\ \begin{cases} x=\frac{1}{2}\sqrt{118}, \\ y=\frac{3}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$ $\quad 2)\ \begin{cases} x=\frac{1}{2}\sqrt{118}, \\ y=-\frac{3}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$

$3)\ \begin{cases} x=-\frac{1}{2}\sqrt{118}, \\ y=\frac{3}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$ $\quad 4)\ \begin{cases} x=-\frac{1}{2}\sqrt{118}, \\ y=-\frac{3}{2}\sqrt{2}. \end{cases}$

(Здесь годны лишь такие решения, для которых $x+y<0$.)

212. Построить графики уравнения и убедиться, что они не имеют ни одной общей точки.

216. $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2\right]^n=\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)^n$. Но $1+\frac{1}{n}<1+\frac{1}{n}+$ $+\frac{1}{4n^2}$. Поэтому $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4n^2}\right)^n$, т. е. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$, что и требовалось доказать.

219. Легко видеть, что $\frac{1}{k^2}<\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$.

Пользуясь этим неравенством, получим, что

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=2-\frac{1}{n}<2.$$

220. Докажем, что разность между $a^3+b^3+c^3$ и $3abc$ не отрицательна. Действительно, $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. Из неравенства $(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\geqslant 0$ следует, что $2a^2+2b^2+2c^2-$ $-2ab-2ac-2bc\geqslant 0$, или $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\geqslant 0$. Кроме того, $a+b+c>0$. Следовательно, $a^3+b^3+c^3-3abc\geqslant 0$, или $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

221. Перемножив попарно крайние и средние множители, получим: $(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1{,}1>0$.

Сделаем еще следующие преобразования:

$$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24+1{,}1>0;$$
$$[(x^2-5x)+5]^2-25+24+1{,}1>0;$$
$$(x^2-5x+5)^2+0{,}1>0.$$

Неравенство справедливо при всех действительных значениях x.

222. При любых значениях x справедливы следующие неравенства:

$$(a_1x-b_1)^2\geqslant 0;$$
$$(a_2x-b_2)^2\geqslant 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_nx-b_n)^2\geqslant 0.$$

Таким образом,

$$a_1^2x^2-2a_1b_1x+b_1^2\geqslant 0;$$
$$a_2^2x^2-2a_2b_2x+b_2^2\geqslant 0;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_n^2x^2-2a_nb_nx+b_n^2\geqslant 0.$$

Складывая, получим неравенство $x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)x+1\geqslant 0$, справедливое при любом значении x.

Преобразуем последнее неравенство путем выделения полного квадрата $[x-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)]^2+1-(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\geqslant 0$ (1). Из этого неравенства непосредственно видно, что оно будет справедливым не при всяком значении x, если $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2>1$, и справедливым при всяком значении x, если $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant 1$.

Но поскольку мы знаем, что неравенство (1) при условиях нашей задачи справедливо при любых значениях x, по необходимости $(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+ +a_nb_n)^2 \leqslant 1$.

Из последнего неравенства вытекает, что $|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqslant 1$.

223. 1-й способ. При $x > \frac{7}{3}$ данное неравенство принимает вид:

$$2x-3-(3x-7)>0. \text{ Отсюда } x<4.$$

Следовательно, данное неравенство удовлетворяется при всех значениях x, больших $\frac{7}{3}$ и меньших 4.

При $x<\frac{3}{2}$ данное неравенство принимает вид:

$$-(2x-3)-[-(3x-7)]>0.$$

Отсюда $x>4$. Но это противоречит условию $x<\frac{3}{2}$. Поэтому данное неравенство не имеет решений, меньших числа $\frac{3}{2}$.

При $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{3}$ данное неравенство принимает вид:

$$2x-3-[-(3x-7)]>0.$$

Отсюда $x>2$. Следовательно, данное неравенство удовлетворяется и при $2<x<\frac{7}{3}$.

Теперь мы установили, что данное неравенство удовлетворяется как при $\frac{7}{3}<x<4$, так и при $2<x<\frac{7}{3}$. Непосредственной подстановкой легко убедиться, что данное неравенство справедливо и при $x=\frac{7}{3}$.

Итак, данное неравенство будет справедливым только при значениях x, удовлетворяющих неравенствам $2<x<4$.

2-й способ. Неравенство $|2x-3|>|3x-7|$ справедливо тогда и только тогда, когда $(2x-3)^2>(3x-7)^2$, или $5x^2-30x+40<0$, или $x^2-6x+8<0$, или $(x-2)(x-4)<0$. Отсюда $2<x<4$.

224. Неравенство $\left|\frac{2x-1}{x-2}\right|>1$ справедливо тогда и только тогда, когда $\left(\frac{2x-1}{x-2}\right)^2>1$, или $\frac{4x^2-4x+1}{x^2-4x+4}-1>0$, или $\frac{x^2-1}{(x-2)^2}>0$.

Данное неравенство справедливо при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|>1$, за исключением $x=2$.

229. Обозначим:

сумму всех трехзначных чисел буквой S_1;

сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 5, буквой S_2;

сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7, буквой S_3;

сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 35, буквой S_4.

Тогда искомая сумма S определится так: $S=S_1-S_2-S_3+S_4$.

230.
$$\begin{cases} a+aq+aq^2=168, \\ aq^3+aq^4+aq^5=21, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a+aq+aq^2=168, \\ q^3(a+aq+aq^2)=21, \end{cases}$$
$$\text{или } \begin{cases} a+aq+aq^2=168, \\ 168q^3=21. \end{cases}$$

231. Обозначим первый член прогрессии буквой a. Тогда задача сведется к проверке равенства
$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}=a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}.$$

232. Воспользуйтесь формулой суммы членов геометрической прогрессии.

233. $\dfrac{a}{1-q}=\dfrac{2}{3}, \quad a+aq+aq^2+aq^3=\dfrac{5}{8}.$

234. Пусть первый член искомой прогрессии будет $\frac{1}{2^k}$, а знаменатель $\frac{1}{2^l}$. Показать, что, каковы бы ни были натуральные числа k и l, сумма полученной бесконечной убывающей прогрессии не может оказаться равной $\frac{1}{5}$.

235. Сумма ряда не всегда остается неизменной при перегруппировках его членов. Свойства суммы, содержащей конечное число слагаемых, не всегда распространяется на суммы, содержащие бесконечное множество слагаемых.

236. Левую и правую части уравнения представить в виде степеней с одинаковыми основаниями.

237. 1) Принять $3^x=y$. 2) Принять $2^x=y$. **238.** Два.

239. Воспользоваться тем, что $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

240. Воспользоваться тем, что третья степень правой части равна третьей степени левой. При возведении правой части в третью степень, представьте ее предварительно в виде
$$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right).$$

Чтобы удобнее было возводить в куб выражение $1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$, представьте его в виде
$$\frac{\left(1-2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}\right)\left(1+2^{\frac{1}{3}}\right)}{1+2^{\frac{1}{3}}}$$
и воспользуйтесь формулой $(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3$.

241. Разделив на 3^x, получим:
$$9\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-7\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=2. \text{ Далее, надо положить } \left(\frac{2}{3}\right)^{x}=y.$$
Отв. $x=0$.

242. 2) Равенство $x^{y^2+7y+12}=1$ имеет место либо при $x=1$, либо при $y^2+7y+12=0$. $y_1=-3$, $y_2=-4$.

243. 3) $\lg\frac{6\cdot 5^x}{2^x+1}=\lg 10^x$, $\frac{6\cdot 5^x}{2^x+1}=2^x\cdot 5^x$. Так как $5^x\neq 0$, получим: $\frac{6}{2^x+1}=2^x$, или $\frac{6}{y+1}=y$, где $y=2^x$.

5) Применить формулу $\log_B A=\frac{\log_2 A}{\log_2 B}$.

6) Прологарифмировав левую и правую части уравнения по основанию a, получим: $\log_a^2 x=\log_a^3 x$.

245. Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{\log_b a}=\log_a b$.

246. Обозначим $\lg x$ буквой y и решим неравенство

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}>1;\ \frac{1}{y}+\frac{1}{1-y}-1>0;\ \frac{1-y+y^2}{y\cdot(1-y)}>0.$$

Числитель y^2-y+1 является положительным числом при всяком значении y, так как равен $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

Остается решить неравенство $y(1-y)>0$.
Из него получим: $0<y<1$. Следовательно, $0<\lg x<1$. Отсюда $1<x<10$.

247. $\lg x=\frac{1}{x}$. Построить кривые $y=\lg x$ и $y=\frac{1}{x}$.

248. Разделив на $\sqrt[x]{9}$, получим:

$$\sqrt[x]{\frac{4}{9}}+\sqrt[x]{\frac{6}{9}}=1,\ \text{или}\ \sqrt[x]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\sqrt[x]{\frac{2}{3}}=1.$$

Положим, что $\sqrt[x]{\frac{2}{3}}=y$. Тогда $y^2+y=1$; $y_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$$\sqrt[x]{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2};$$

$$\frac{1}{x}\lg\frac{2}{3}=\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2};\quad x=\frac{\lg\frac{2}{3}}{\lg\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

249. Из того, что $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^3>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right)^2$, не следует, что $\left(\frac{1}{4}\right)^3>\left(\frac{1}{4}\right)^2$, а следует, что $\left(\frac{1}{4}\right)^3<\left(\frac{1}{4}\right)^2$, поскольку основанием логарифмов здесь является число $\frac{1}{2}$, т. е. положительное число, меньшее единицы.

276. $(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}$ равно $\cos^3 x$ лишь тогда, когда $\cos x\geqslant 0$. Когда же $\cos x<0$, то равенство $(\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}=\cos^3 x$ будет неверным, так как при этом левая часть равенства будет представлять собой арифметический корень, т. е. положительное число, а правая часть будет числом отрицательным.

278. Применим метод доказательства от противного. Допустим, что существует число T такое, что равенство $\cos\sqrt{x+T}=\cos\sqrt{x}$ справедливо при любом значении x.

Полагая $x=0$, получим: $\cos\sqrt{T}=1$.

Отсюда $\sqrt{T}=2k\pi$. Полагая $x=T$, получим: $\cos\sqrt{2T}=1$. Отсюда $\sqrt{2T}=2l\pi$.

Делением получим: $\frac{\sqrt{2T}}{\sqrt{T}}=\frac{l}{k}$, или $\sqrt{2}=\frac{l}{k}$, что невозможно, так как k и l — целые числа. Полученное противоречие доказывает требуемое.

280.

$$\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} 2y=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}\cdot\frac{2\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 y}=\frac{4\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y}=$$
$$=\frac{4\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y}{1-(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y)^2+2\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y+(\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y)^2}=\frac{4b}{1-a^2+2b+b^2}.$$

281. Из равенства $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=0$ следует, что $\alpha+\beta=k\pi$. Отсюда $\beta=k\pi-\alpha$ и $\sin(\alpha+2\beta)=\sin(2k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$.

282.
$$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=$$
$$=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Наибольшее значение получится при $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1$, т. е. при $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, или при $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$, т. е. $x=\pi-\frac{3\pi}{4}+(k-1)\pi$, или, наконец, при

$$x=\frac{\pi}{4}+n\pi,$$

где n — любое целое число. Наибольшее значение функции $\sin x+\cos x$ равно $\sqrt{2}$.

283. Из данного равенства найдем, что

$$\operatorname{tg} x=-\frac{\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z}{1-\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z}=-\operatorname{tg}(y+z)=\operatorname{tg}(-y-z).$$

Мы знаем, что из равенства $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\varphi$ следует равенство

$$x=k\pi+\varphi.$$

Применяя это к равенству $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}(-y-z)$, получим, что $x=k\pi+(-y-z)$, или $x+y+z=k\pi$.

284. Разделив все члены данного уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$, получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Это деление законно, так как $a^2+b^2\neq 0$. (Если бы $a^2+b^2=0$, то были бы одновременно равными нулю a и b и данное уравнение приняло бы вид $0=c$ и не позволило бы найти $\sin x$ и $\cos x$.)

Так как сумма квадратов чисел $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ равна единице, то всегда будет существовать такой угол φ, что

$$\sin\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\qquad \cos\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Используя это, представим данное уравнение в виде

$$\sin\varphi\sin x+\cos\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

или в виде

$$\cos(x-\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.\ \text{Отсюда}\ \sin(x-\varphi)=\pm\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Чтобы найти $\sin x$ и $\cos x$, преобразуем их так:

$$\sin x=\sin(x-\varphi+\varphi)=\sin(x-\varphi)\cos\varphi+\cos(x-\varphi)\sin\varphi;$$
$$\cos x=\cos(x-\varphi+\varphi)=\cos(x-\varphi)\cos\varphi-\sin(x-\varphi)\sin\varphi.$$

Подставляя известные значения, получим два решения:

$$1)\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{ac+b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\\[2mm] \cos x=\dfrac{bc-a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2};\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases}\sin x=\dfrac{ac-b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\\[2mm] \cos x=\dfrac{bc+a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}.\end{cases}$$

Задача имеет решение лишь при условии $c^2\leqslant a^2+b^2$.

285.
$$\sin x\sin y\sin z=\sin x\sin y\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}-(x+y)\right]=$$
$$=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}\cdot\cos(x+y)=$$
$$=-\frac{1}{2}[\cos^2(x+y)-\cos(x-y)\cos(x+y)]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\cos^2(x+y)-\cos(x-y)\cos(x+y)+\frac{\cos^2(x-y)}{4}-\frac{\cos^2(x-y)}{4}\right]=$$
$$=-\frac{1}{2}\left\{\left[\cos(x+y)-\frac{\cos(x-y)}{2}\right]^2-\frac{\cos^2(x-y)}{4}\right\}=$$
$$=\frac{1}{8}\cos^2(x-y)-\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\frac{\cos(x-y)}{2}\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{8}\cos^2(x-y)\leqslant\frac{1}{8}.$$

286. Поскольку $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}>\sin\alpha;$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha>\sin\alpha+\cos\alpha;$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}>\sin\alpha+\cos\alpha;$$
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}>\sin\alpha+\cos\alpha.$$

Разделим обе части на $\sin\alpha$. Смысл неравенства не изменится, так как $\sin\alpha > 0$. Тогда получим:

$$\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} > \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}, \text{ или } \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\alpha.$$

287. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\sin x < x$.

Подставив в это неравенство вместо x число $\cos\varphi$, получим:

$$\sin\cos\varphi < \cos\varphi.$$

Эту подстановку мы имели право сделать потому, что число $\cos\varphi$ находится в том же промежутке, что и число x.

Действительно, по условию задачи $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а потому

$$0 < \cos\varphi < 1 < \frac{\pi}{2}.$$

Итак, мы доказали пока, что $\sin\cos\varphi < \cos\varphi$.

Далее, поскольку $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, постольку $\varphi > \sin\varphi$.

Числа φ и $\sin\varphi$ находятся внутри промежутка $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. В этом же промежутке косинус есть убывающая функция, а потому

$$\cos\varphi < \cos\sin\varphi.$$

Учитывая и доказанное раньше, получим: $\sin\cos\varphi < \cos\varphi < \cos\sin\varphi$. Отсюда $\sin\cos\varphi < \cos\sin\varphi$.

Последнее неравенство справедливо как при $\varphi = 0$, так и при $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

288. Чтобы данная функция имела период 3π, должно иметь место равенство

$$\frac{\sin\frac{5}{m}x}{\sin mx} = \frac{\sin\frac{5}{m}(x + 3\pi)}{\sin m(x + 3\pi)}$$

при всяком значении аргумента x.

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\frac{\sin\frac{5}{m}x}{\sin mx} = \frac{\sin\frac{5x}{m}\cos\frac{15\pi}{m} + \cos\frac{5x}{m}\sin\frac{15\pi}{m}}{\sin mx\cos 3m\pi + \cos mx\sin 3m\pi}.$$

Учитывая, что $\cos 3m\pi = (-1)^m$ и $\sin 3m\pi = 0$, получим:

$$\frac{\sin\frac{5x}{m}}{\sin mx} = \frac{\sin\frac{5x}{m}\cos\frac{15\pi}{m} + \cos\frac{5x}{m}\sin\frac{15\pi}{m}}{(-1)^m\sin mx}.$$

Отсюда

$$\sin\frac{5x}{m}\cos\frac{15\pi}{m} + \cos\frac{5x}{m}\sin\frac{15\pi}{m} = (-1)^m\sin\frac{5x}{m}. \qquad (1)$$

По условию задачи это равенство должно быть тождеством относительно x. Полагая в нем $x=0$, найдем, что

$$\sin\frac{15\pi}{m}=0.$$

Учитывая последнее равенство, из равенства (1) получим:

$$\sin\frac{5x}{m}\cos\frac{15\pi}{m}=(-1)^m\sin\frac{5x}{m}.$$

Поскольку последнее равенство должно иметь место при любом значении x, постольку

$$\cos\frac{15\pi}{m}=(-1)^m.$$

А это будет тогда и только тогда, когда m будет делителем числа 15.

Следовательно, заданная функция будет иметь период 3π при следующих значениях параметра m:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \pm 15.$$

293. Если $|\gamma|\leqslant 1$, то $\arcsin\gamma+\arccos\gamma=\frac{\pi}{2}$ (см. стр. 543).

Подставив в это равенство вместо γ число $\cos\arcsin x$, получим:

$$\arcsin(\cos\arcsin x)+\arccos(\cos\arcsin x)=\frac{\pi}{2}.$$

Эта подстановка законна; абсолютная величина выражения $\cos\arcsin x$ так же не превосходит единицы, как и абсолютная величина числа γ.

Теперь докажем, что $\cos\arcsin x=\sin\arccos x$.

Действительно,

$$\cos\arcsin x=\cos(\arccos\sqrt{1-x^2})=\sqrt{1-x^2}$$

и

$$\sin\arccos x=\sin(\arcsin\sqrt{1-x^2})=\sqrt{1-x^2}.$$

Подставив во второе слагаемое левой части равенства (1) вместо выражения $\cos\arcsin x$ равное ему выражение $\sin\arccos x$, получим:

$$\arcsin(\cos\arcsin x)+\arccos(\sin\arccos x)=\frac{\pi}{2}.$$

297. 1) $|z|=1$. На окружности круга с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

$|z|<1$. Внутри этого круга.

$|z|>1$. Вне этого круга.

2) $R(z)=1$. На прямой, параллельной оси Y_1Y и отстоящей от нее вправо на расстоянии, равном единице.

$R(z)<1$. Во всей полуплоскости, слева от прямой $x=1$.

$R(z)>1$. Во всей полуплоскости, лежащей справа от прямой $x=1$.

3) $I(z)=1$. На прямой, параллельной оси X_1X.

$I(z)<1$. Во всей полуплоскости, лежащей ниже прямой $y=1$.

$I(z)>1$. Во всей полуплоскости, лежащей выше прямой $y=1$.

4) $\arg z = 1$. На луче, проходящем через начало координат и составляющем с осью X_1X угол, равный одному радиану.

$\arg z = \frac{\pi}{2}$. На части оси Y_1Y, лежащей выше оси X_1X.

$\arg z = -\frac{\pi}{2}$. На части оси Y_1Y, лежащей ниже оси X_1X.

$\arg z = 0$. На части оси X_1X, лежащей правее оси Y_1Y.

$\arg z = \pi$. На части оси X_1X, лежащей левее оси Y_1Y.

298. а) Сначала возвести в куб, а затем полученное — в квадрат. б) Сначала возвести в квадрат, а затем полученное — в степень k.

299. Числитель и знаменатель дроби $\frac{(1+i)^7}{(1-i)}$ умножить на $(1+i)$, затем возвести $(1+i)$ сначала в квадрат, а затем полученное в четвертую степень.

301. Заменить z выражением $x+yi$ и воспользоваться тем, что модуль отношения равен отношению модулей.

308. Если два комплексных числа равны, то равны и их модули. Поэтому $|\bar{z}| = |z^{n-1}|$, или $|\bar{z}| = |z|^{n-1}$, так как модуль степени равен той же степени модуля основания степени. Но $|\bar{z}| = |z|$, так как модули сопряженных комплексных чисел равны между собой. Поэтому $|z| = |z|^{n-1}$.

Но последнее равенство возможно лишь тогда, когда $|z| = 1$ или когда $z = 0$.

Умножим обе части равенства $\bar{z} = z^{n-1}$ на z. Тогда получим, что $\bar{z} \cdot z = z^n$.

Но $\bar{z} \cdot z$, как произведение сопряженных чисел, равно квадрату модуля z, т. е. единице. Значит, $z^n = 1$, или $z = \sqrt[n]{1}$.

Итак, равенство $\bar{z} = z^{n-1}$ при $n > 2$ имеет место лишь тогда, когда $z = 0$ или когда

$$z = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{(см. стр. 568), где } k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1.$$

309. Одно из равенств

$$\sqrt{a-b} = i\sqrt{b-a} \text{ и } \sqrt{b-a} = i\sqrt{a-b}$$

будет верным, а другое неверным.

Если $a < b$, то верным будет первое равенство и неверным второе. Если же $b < a$, то верным будет второе и неверным первое (см. стр. 554).

Кроме того, неверным является и наше начальное утверждение о том, что равенство $\sqrt{x-y} = i\sqrt{y-x}$ справедливо при любых значениях x и y. Оно справедливо лишь тогда, когда $x < y$.

310. $\frac{z_1+z_2}{2}$.

311. $z_2 + z_3 - z_1$.

312. На окружности с центром $(0;\ -2)$ и радиусом, равным единице. Указание. Воспользоваться тем, что $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2. Выражение $|z + 2i|$ можно представить в виде $|z - (-2i)|$.

313. $\pm\sqrt{6}$, $\pm i\sqrt{2}$. 314. $2\cos\frac{\varphi}{2}$ и $\frac{3\varphi}{2}+2k\pi$.

327. Задача сводится к решению системы:

$$\begin{cases} 1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0; \\ (-2)^3+a\cdot(-2)^2+b\cdot(-2)+c=0; \\ (-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=10. \end{cases}$$

333. Делимость следует из того, что числа 0; -1; $-\frac{1}{2}$ являются корнями данного многочлена.

334. Корни трехчлена x^2+x+1 являются одновременно и корнями многочлена x^3-1, так как $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$.

Но всякий корень многочлена x^3-1, или уравнения $x^3=1$, обладает тем свойством, что его куб равен 1. Следовательно, куб каждого корня, трехчлена x^2+x+1 также равен единице.

Чтобы доказать делимость какого-либо многочлена $f(x)$ на x^2+x+1, достаточно доказать, что каждый корень многочлена x^2+x+1 является корнем многочлена $f(x)$.

Пусть число n кратно трем, т. е. $n=3m$, где m — целое положительное число. Пусть, далее, x есть один из корней трехчлена x^2+x+1. Тогда

$$x_1^{2n}+x_1^n+1=x_1^{6m}+x_1^{3m}+1=$$
$$=(x_1^3)^{2m}+(x_1^3)^m+1=1+1+1=3,$$

т. е. x_1 не является корнем многочлена $x^{2n}+x^n+1$ в том случае, когда n кратно трем.

Пусть n не кратно трем, т. е. $n=3k\pm 1$. Тогда

$$x_1^{2(3k\pm 1)}+x_1^{3k\pm 1}+1=x_1^{6k}\cdot x^{\pm 2}+x_1^{3k}\cdot x_1^{\pm 1}+1=$$
$$=x_1^{\pm 2}+x_1^{\pm 1}+1=\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\pm 2}+\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{\pm 1}+1=0.$$

Также можно убедиться, что второй корень x_2 трехчлена x^2+x+1 также является корнем многочлена $x^{2n}+x^n+1$, если n не кратно трем. Итак, предложение доказано.

335. Рассматривая выражение

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$

как целую рациональную функцию от аргумента x и замечая, что это выражение обращается в нуль при $x=-y$ и при $x=-z$, заключаем, что оно делится на $x-(-y)$ и на $x-(-z)$, т. е. на $x+y$ и на $x+z$.

Рассматривая данное выражение как целую рациональную функцию от аргумента y, аналогично убедимся в том, что оно делится и на $y+z$.

Следовательно,

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=(x+y)(x+z)(y+z)M.$$

Теперь выясним форму множителя M.

Данное выражение есть однородный многочлен 5-й степени, а произведение $(x+y)(x+z)(y+z)$ по раскрытии скобок будет однородным многочленом 3-го измерения. Поэтому множитель M должен быть однородным многочленом 2-го измерения, т. е. должен иметь вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx.$$

Но есть еще одно обстоятельство, на которое надо обратить внимание.

Значение данного выражения не будет изменяться, если в нем менять местами буквы x, y и z. Таким же свойством обладает и произведение $(x+y)(y+z)(z+x)$.

Следовательно, этим свойством должен обладать и множитель M, т. е. он должен иметь вид:

$$A(x^2+y^2+z^2) + D(xy+yz+zx).$$

Итак, мы можем записать следующее:

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 =$$
$$= (x+y)(y+z)(z+x)[A(x^2+y^2+z^2) + D(xy+yz+zx)].$$

Чтобы найти A и D, составим два уравнения.

Полагая, например, $x=1$, $y=1$ и $z=1$, получим:

$$240 = 8(3A+3D), \text{ или } A+D=10.$$

Полагая $x=1$, $y=1$ и $z=0$, получим:

$$30 = 2(2A+D), \text{ или } 2A+D=15.$$

Решая систему

$$\begin{cases} A+D=10, \\ 2A+D=15, \end{cases}$$

найдем, что $A=5$ и $D=5$.

Окончательно получаем:

$$(x+y+z)^5 - x^5 - y^5 - z^5 = 5(x+y)(y+z)(z+x) \times$$
$$\times (x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2.$$

336. Для решения этой задачи нам придется неоднократно пользоваться известным тождеством

$$x^m - y^m = (x-y)(x^{m-1} + x^{m-2}y + x^{m-3}y^2 + \ldots + y^{m-1}),$$

где m — целое положительное число.

За общий знаменатель трех данных дробей примем произведение $(a-b)(a-c)(b-c)$. Тогда сумма этих дробей примет вид:

$$\frac{a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}.$$

Теперь разделим числитель этой дроби на $(a-b)$; затем полученное частное разделим на $(b-c)$ и, наконец, вновь полученное частное разделим на $(a-c)$.

Сначала преобразуем числитель

$$a^n(b-c) + b^n(c-a) + c^n(a-b) =$$
$$= a^nb - a^nc + b^nc - ab^n + c^n(a-b) =$$
$$= ab(a^{n-1} - b^{n-1}) - c(a^n - b^n) + c^n(a-b).$$

В результате деления на $(a-b)$ получим частное

$$ab\,(a^{n-2}+a^{n-3}b+\ldots+b^{n-2})-$$
$$-c\,(a^{n-1}+a^{n-1}b+\ldots+b^{n-1})+c^n, \text{ или}$$
$$a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\ldots+ab^{n-1}-$$
$$-a^{n-1}c-a^{n-2}bc-\ldots-ab^{n-2}c-b^{n-1}c+c^n,$$

или

$$a^{n-1}(b-c)+a^{n-2}b\,(b-c)+\ldots+ab^{n-2}(b-c)-c\,(b^{n-1}-c^{n-1}).$$

В результате деления этого частного на $(b-c)$, получим

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}-c\,(b^{n-2}+b^{n-3}c+\ldots+c^{n-2}),$$

или

$$ab^{n-3}+a^2b^{n-3}+\ldots+a^{n-2}b+a^{n-1}-$$
$$-b^{n-2}c-b^{n-3}c^2-\ldots-bc^{n-2}-c^{n-1},$$

или

$$b^{n-2}(a-c)+b^{n-3}(a^2-c^2)+\ldots+b\,(a^{n-2}-c^{n-2})+(a^{n-1}-c^{n-1}).$$

В результате деления этого частного на $(a-c)$ получим искомое целое выражение

$$b^{n-2}+b^{n-3}(a+c)+b^{n-4}(a^2+ac+c^2)+\ldots+$$
$$+b\,(a^{n-3}+a^{n-4}c+\ldots+c^{n-3})+(a^{n-2}+a^{n-3}c+\ldots+c^{n-2}).$$

Это целое выражение можно записать кратко так: $\sum a^\alpha b^\beta c^\gamma$, где сумма распространена на всевозможные неотрицательные целые значения α, β, γ, дающие в сумме число $n-2$.

Поясним на примере смысл знака $\sum$.

$$\sum_{\alpha=0}^{m} x^\alpha = 1+x+x^2+\ldots+x^m.$$

Знак $\sum$ есть прописная буква греческого алфавита, называемая „сигмой".

337.
$$x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+1}}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{2(\sqrt{10}-1)}}{2},$$
$$x_{3,4}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{10}+1}}{2}\pm i\,\frac{\sqrt{2(\sqrt{10}-1)}}{2}.$$

340.
$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)=120.$$
$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=120.$$

Положить $x^2+5x=y$. Отв. 1; -6; $\dfrac{-5\pm i\sqrt{39}}{2}$.

341. Для $x>0$ левая часть уравнения возрастает с возрастанием x. При $x=1{,}5$ $x^5+x<10$, а при $x=1{,}6$ $x^5+x>10$. Поэтому левая часть имеет положительный корень, лежащий внутри промежутка (1,5; 1,6).

Так как данное уравнение является приведенным с целыми коэффициентами, дробных корней оно не имеет (см. стр. 625). Поэтому существующий между числами 1,5 и 1,6 корень является обязательно иррациональным числом.

342. Число нуль является корнем уравнения $(x+1)^n=(x-1)^n$ при четном значении n. При $n=3$ получим: $(x+1)^3=(x-1)^3$, или $x^3+3x^2+3x+1=x^3-3x^2+3x-1$. Отсюда $x_1=+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i$; $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot i$.

Уравнение $(x+1)^4=(x-1)^4$, или $x^4+4x^3+6x^2+4x+1=x^4-4x^3+$ $+6x^2-4x+1$ имеет три следующих корня: $x_1=0$; $x_2=i$; $x_3=-i$.

Решим уравнение $(x+i)^3=(x-i)^3$ иначе. Извлекая кубический корень, получим: $x+1=(x-1)\sqrt[3]{1}$. (Ведь кубический корень имеет три значения:

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}, \quad \text{где } k=0,\ 1,\ 2.)$$

Отсюда

$$x=-\frac{1+\sqrt[3]{1}}{1-\sqrt[3]{1}}=-\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}}{1-\cos\frac{2k\pi}{3}-i\sin\frac{2k\pi}{3}}=$$

$$=-\frac{2\cos^2\frac{k\pi}{3}+2i\sin\frac{k\pi}{3}\cos\frac{k\pi}{3}}{2\sin^2\frac{k\pi}{3}-2i\sin\frac{k\pi}{3}\cos\frac{k\pi}{3}}=-\frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{\sin\frac{k\pi}{3}}\cdot\frac{\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}}{\sin\frac{k\pi}{3}-i\cos\frac{k\pi}{3}}=$$

$$=-\frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{\sin\frac{k\pi}{3}}\cdot i\cdot\frac{\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}}{i\left(\sin\frac{k\pi}{3}-i\cos\frac{k\pi}{3}\right)}=-i\,\frac{\cos\frac{k\pi}{3}}{\sin\frac{k\pi}{3}}=-i\,\mathrm{tg}^{-1}\,\frac{k\pi}{3},$$

где $k=0,\ 1,\ 2$.

При $k=0$ $x=\infty$, т. е. нет корня;

если $k=1$, то $x=-i\frac{\sqrt{3}}{3}$; если же $k=2$, то $x=+\ i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Применять этот способ к решению уравнения $(x+1)^3=(x-1)^3$ нет необходимости, так как оно легко решается с помощью формулы куба суммы, как это было показано выше.

Однако этот второй способ удобнее всего для решения уравнения $(x+1)^n=(x-1)^n$.

Итак, перейдем к решению уравнения $(x+1)^n=(x-1)^n$.

Извлекая корень n-й степени из обоих частей уравнения, получим:

$$x+1=(x-1)\sqrt[n]{1}, \text{ или } \frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt[n]{1}}{1}.$$

Применим производную пропорцию: сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго отношения к их разности. Тогда

$$x=\frac{\sqrt[n]{1}+1}{\sqrt[n]{1}-1}=-\frac{1+\sqrt[n]{1}}{1-\sqrt[n]{1}}=-\frac{1+\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}}{1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}}=$$

$$=-\frac{2\cos^2\frac{k\pi}{n}+2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}{2\sin^2\frac{k\pi}{n}-2i\sin\frac{k\pi}{n}\cos\frac{k\pi}{n}}=-\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}}=$$

$$=-\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\cdot i\cdot\frac{\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n}}{i\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{\cos\frac{k\pi}{n}}{\sin\frac{k\pi}{n}}\cdot i=-i\,\mathrm{tg}^{-1}\,\frac{k\pi}{n},$$

где $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$.

При $k=0$ $\operatorname{tg}^{-1}\frac{k\pi}{n}=\infty$, т. е. корня нет.

Данное уравнение имеет всего $(n-1)$ различных корней. Требование решить уравнение означает требование найти все его корни (действительные и мнимые).

Ошибка заключалась в том, что, извлекая корень n-й степени, мы брали только одно, а не все n его значений. Парадокс раскрыт.

343. Обозначив сумму $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ символом S_n, составим таблицу значений S_n для $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$

n	S_n	
1	1^2	$=1$
2	1^2+2^2	$=5$
3	$1^2+2^2+3^2$	$=14$
4	$1^2+2^2+3^2+4^2$	$=30$
5	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$	$=55$
6	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$	$=91$
. .	. . . .	. . .

(A)

Заметить из этой таблицы закономерность, которая позволила бы обнаружить искомую формулу, очень трудно, почти невозможно.

Один из способов, к которому бывает полезно обращаться в подобных случаях, таков: вводят в рассмотрение другую задачу, сходную с данной, но более доступную, и пытаются найти взаимосвязь между данной задачей и другой, введенной.

В соответствии с этим рассмотрим сумму первых степеней натуральных чисел, а именно сумму

$$\sigma_n = 1+2+3+\ldots+n.$$

Известно, что

$$\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Составим для этой суммы таблицу, аналогичную таблице (A)

n	σ_n	
1	1	$=1$
2	$1+2$	$=3$
3	$1+2+3$	$=6$
4	$1+2+3+4$	$=10$
5	$1+2+3+4+5$	$=15$
6	$1+2+3+4+5+6$	$=21$
. .	. . . .	. . .

(B)

Возникает вопрос, как связаны между собой таблицы (A) и (B). После тех или иных попыток найти эту связь нам может прийти в голову мысль исследовать по этим таблицам отношение $\frac{S_n}{\sigma_n}$.

Для $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ мы получим, что

$$\frac{S_n}{\sigma_n}=1,\quad \frac{5}{3},\quad \frac{7}{3},\quad 3,\ \frac{11}{3},\quad \frac{13}{3},\ldots,\ \text{или}$$

$$\frac{S_n}{\sigma_n}=\frac{3}{3},\quad \frac{5}{3},\quad \frac{7}{3},\quad \frac{9}{3},\quad \frac{11}{3},\quad \frac{13}{3},\ \ldots$$

Здесь почти невозможно удержаться, чтобы не сформулировать предположение, что

$$\frac{S_n}{\sigma_n}=\frac{2n+1}{3}.$$

Пользуясь же тем, что $\sigma=\frac{n(n+1)}{2}$, мы можем теперь высказать предположение, что

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (3)$$

Справедливость этой формулы, полученной в качестве предположения, докажите самостоятельно методом полной индукции.

344. При $n=1$ закон верен, так как $1+\frac{1\cdot(1+1)}{2}=2$. Действительно, одна прямая рассекает плоскость на две части.

Допустим, что закон верен для $n=k$, т. е. число частей, на которые рассекается плоскость, равно $1+\frac{k(k+1)}{2}$.

Проведем еще одну прямую так, чтобы она не была параллельной ни одной из ранее взятых прямых и не проходила бы через точку пересечения каких-либо двух из них.

Эта дополнительно проведенная $(k+1)$-я прямая пересечет все ранее взятые прямые в k различных точках и, следовательно, пройдет по $k+1$ частям плоскости, каждую из которых разделит на две части. Таким образом, число частей плоскости увеличится на $k+1$ и станет равным

$$1+\frac{k(k+1)}{2}+k+1,\ \text{т. е.}\ 1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Закон оказался верным и при $n=k+1$. Следовательно, он верен при всяком n.

345. Требуется доказать справедливость неравенства

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{3n+1}>1, \qquad (1)$$

где n — натуральное число.

При $n=1$ неравенство справедливо. Действительно,

$$\frac{1}{1+1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{3\cdot 1+1}>1.$$

Допустим, что неравенство справедливо при $n=k$, т. е. что

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+1}>1.$$

Докажем, что при этом наше неравенство окажется справедливым и при $n=k+1$. При $n=k+1$ левая часть нашего неравенства примет вид:

$$\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\frac{1}{(k+1)+3}+\ldots+\frac{1}{3(k+1)+1},$$

или

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\ldots\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}.$$

Преобразуем последнюю сумму к виду:

$$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}=$$
$$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots\frac{1}{3k+1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Сумма, стоящая в первых скобках, по сделанному нами предположению больше единицы. Теперь докажем, что сумма, стоящая во вторых скобках, положительна. Действительно,

$$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}-\frac{1}{k+1}=\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{3k+3}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}+\frac{-2}{3(k+1)}=$$
$$=\frac{18(k+1)^2-2(3k+2)(3k+4)}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}=\frac{2}{3(k+1)(3k+2)(3k+4)}>0.$$

Итак, доказано, что наше неравенство справедливо при $n=k+1$, если только оно справедливо при $n=k$. Кроме того, было доказано, что наше неравенство справедливо при $n=1$.

Из всего этого следует, что неравенство (1) справедливо всегда, т. е. при любом натуральном значении n.

346—350. Применяйте неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

352. Воспользуйтесь неравенством $\frac{x+y+z}{3}\geqslant\sqrt[3]{xyz}$, где x, y, z — измерения ящика. Отв. $\left(\frac{l}{12}\right)^3$.

354. Пользуясь формулой $A_m^p=\frac{p_m}{p_{m-p}}$, получим: $\frac{\frac{p_x}{p_{x-4}}\cdot p_{x-4}}{p_{x-2}}=42$. Отсюда $(x-1)x=42$.

355. Воспользоваться формулами: $A_m^p=\frac{p_m}{p_{m-p}}$ и $C_m^p=\frac{p_m}{p_p p_{m-p}}$.

356. $C_{12}^3\cdot 3$. **357.** $\frac{P_9}{P_3P_3P_3}$.

358. Места на скамейке обозначим клетками (рис. 236). Посадим на нечетных местах мальчиков. Таких всевозможных расположений мальчиков по нечетным местам будет 5!. Каждому одному из этих расположений мальчиков будет соответствовать 5! расположений по четным местам девочек. Значит, всего различных расположений мальчиков и девочек окажется $5 \cdot 5!$.

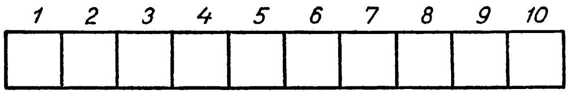


Рис. 236.

Такое же число новых различных расположений на скамейке мы получим, если посадим мальчиков на четные места.

Следовательно, рассадить мальчиков и девочек так, как указано в условии задачи, можно 28800-ю способами, потому что $5! \cdot 5! \cdot 2 = 28800$.

359. См. решение задачи **358.**

360. Каждый член разложения будет содержать, кроме числового коэффициента, произведение четырех буквенных множителей. Среди этих множителей могут оказаться и одинаковые. Поэтому число не подобных членов будет равно числу сочетаний с повторениями, которые можно составить из 4-х элементов x_1, x_2, x_3, x_4 по четыре, т. е. будет равно

$$C^4_{4+4-1}, \quad \text{или} \quad C^4_7 = C^3_7 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

361. C^2_n, т. е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

362. Сначала делаем проверку на примере:

$$\frac{40!}{3!\,5!\,8!\,19!} = \frac{40!}{3!\,37!} \cdot \frac{37!}{5!\,32!} \cdot \frac{32!}{8!\,24!} \cdot \frac{24!}{19!\,5!} = C^3_{40} \cdot C^5_{37} \cdot C^8_{32} \cdot C^{19}_{24}.$$

Каждый множитель — целое число.

Теперь приведем общее доказательство:

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2! \ldots k_i!} =$$

$$= \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!\,(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)}{k_3!\,(n-k_1-k_2-k_3)} \cdots$$

$$\cdots \frac{(n-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1})!}{k_1!\,(n-k_1-k_2-\ldots-k_i)!} = C^{k_1}_n \cdot C^{k_2}_{n-k_1} \ldots C^{k_i}_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{i-1}}.$$

Каждый множитель — целое число.

363. Каждое сочетание из четырех элементов назовем для краткости «набором». Тогда одному из трех лиц можно выдать набор столькими способами, сколько можно составить сочетаний из 12 элементов по четыре, т. е. C^4_{12} способами. Тогда, какой бы набор ни получило одно из трех лиц, всякий раз будет оставаться 8 предметов. Из этих восьми предметов можно составить C^4_8 набора. Поэтому число различных распределений наборов между двумя лицами будет равно произведению

$$C^4_{12} \cdot C^4_8.$$

При каждом отдельном распределении наборов между двумя лицами будет оставаться 4 предмета, которые каждый раз будут доставаться третьему лицу.

Следовательно, число способов распределения наборов между тремя лицами также будет равно произведению $C_{12}^4 \cdot C_8^4$, т. е.

$$\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4!}\cdot\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}\cdot\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4!}=\frac{12!}{(4!)^3}.$$

Если бы было 24 предмета и их надо было распределить между 6 лицами по четыре предмета, то число всех различных способов распределения было бы

$$C_{24}^4\cdot C_{20}^4\cdot C_{16}^4\cdot C_{12}^4\cdot C_8^4=\frac{24!}{(4!)^6}.$$

364. Если все составные множители произведения $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\ \ldots$ $\ldots\ 48\cdot 49\cdot 50$ разложить на простые множители, то простое число 5 встретится 12 раз

$$\begin{array}{cccccccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, & 30, & 35, & 40, & 45, & 50 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2, \end{array}$$

а простое число 2 встретится более чем 25 раз. Поэтому число 50! имеет на конце двенадцать нулей.

365. Воспользуемся тождеством $k\cdot k!=(k+1)!-k!$. Тогда

$$1\cdot 1!=2!-1!;\quad 2\cdot 2!=3!-2!;\quad 3\cdot 3!=4!-3!;$$
$$(n-2)\cdot(n-2)!=(n-1)!-(n-2)!;$$
$$(n-1)\cdot(n-1)!=n!-(n-1)!;$$
$$n\cdot n!=(n+1)!-n!.$$

Складывая, получим: $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ \ldots\ +n\cdot n!=(n+1)!-1.$

366. В произведении

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ \ldots\ \cdot 497\cdot 498\cdot 499\cdot 500 \tag{1}$$

на 7 делятся только числа

$$7;\ 14;\ 21;\ \ldots\ ;\ 497.$$

Если каждое из этих чисел разделить на 7, то произведение полученных частных представится так:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ \ldots\ \cdot 71. \tag{2}$$

Переходя от произведения (1) к произведению (2), мы удалили множитель 7 из произведения (1) 71 раз, т. е. число раз, равное целой части дроби $\frac{500}{7}$.

В произведении (2) на 7 делятся только следующие числа:

$$7;\ 14;\ 21;\ \ldots\ 70.$$

Если каждое из этих чисел разделить на 7, то произведение полученных частных представится так:

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10. \tag{3}$$

Переходя от произведения (2) к произведению (3), мы удалили множитель 7 еще 10 раз, т. е. число раз, равное целой части дроби $\frac{500}{7^2}$.

В произведении (3) множитель 7 содержится 1 раз, т. е. число раз, равное целой части дроби $\frac{500}{7^3}$.

Из всего изложенного следует, что показатель степени, с которым простое число 7 входит в произведение (1), равен сумме целых частей дробей $\frac{500}{7}$, $\frac{500}{7^2}$, $\frac{500}{7^3}$, т. е. сумме $71+10+1$, которая составляет 82.

В математике употребляется символ $[\alpha]$. Символом $[\alpha]$ принято обозначать целое число, ближайшее к α и меньшее или равное ему.

Примеры:

$$\left[\frac{31}{7}\right]=4;\quad [3,14]=3;\quad [\sqrt{2}]=1;\quad [5]=5;\quad [-1,8]=-2;\quad \left[\frac{5}{6}\right]=0.$$

Символ $[\alpha]$ называется целой частью числа α.

Теперь мы можем записать ответ задачи так:

$$\left[\frac{500}{7}\right]+\left[\frac{500}{7^2}\right]+\left[\frac{500}{7^3}\right].$$

Показатель степени, с которым простое число 3 входит в произведение натуральных чисел от 1 до 500, равен

$$\left[\frac{500}{3}\right]+\left[\frac{500}{3^2}\right]+\left[\frac{500}{3^3}\right]+\left[\frac{500}{3^4}\right]+\left[\frac{500}{3^5}\right]+\left[\frac{500}{3^6}\right]=$$
$$=166+55+18+6+2=247.$$

367. 120 нулями.

368. Любые два члена комиссии, согласно условию задачи, не имеют доступа к сейфу, т. е. не будут располагать полным комплектом ключей для вскрытия сейфа. Сочетаний из 5 членов комиссии по два будет $10\left(C_5^2=\frac{5!}{2!\,3!}\right)$.

Такими сочетаниями из членов комиссии A, B, C, D, E будут следующие соединения:

AB, BC, CD, DE.
AC, BD, CE,
AD, BE,
AE,

Ключи к различным замкам обозначим номерами 1, 2, 3, ..., n.
Пока мы не знаем, чему равно n, т. е. не знаем, сколько замков, по меньшей мере, должен иметь сейф.

Для того чтобы любые два члена комиссии не могли открыть сейф, необходимо, по меньшей мере, чтобы у них недоставало одного из требующихся ключей.

Но для того чтобы любые два члена комиссии при появлении любого третьего могли открыть сейф, необходимо снабдить каждого из оставшихся трех членов ключом, недостающим у первых двух.

Пусть у членов A и B нет ключа № 1, тогда каждый из членов C, D, E должен иметь этот ключ. У членов A и C должно недоставать, по крайней мере, одного ключа; так как у A имеется ключ № 1, то у них не должно быть ключа № 2. Но в таком случае ключом № 2 должны быть снабжены B, D и E. И т. д.

Такое распределение ключей запишем в виде следующей таблицы:

Сочетание по два	Номера ключей у членов комиссии				
	A	B	C	D	E
AB	—	—	1	1	1
AC	—	2	—	2	2
AD	—	3	3	—	3
AE	—	4	4	4	—
BC	5	—	—	5	5
BD	6	—	6	—	6
BE	7	—	7	7	—
CD	8	8	—	—	8
CE	9	9	—	9	—
DE	10	10	10	—	—

Из этой таблицы видно, что сейф должен иметь, по меньшей мере, 10 замков и что каждый член комиссии должен быть снабжен шестью ключами.

369. Пользуясь формулой $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k} b^k$, получим в данном случае:

$$T_{k+1}=C_{21}^k\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}\right)^{21-k}\left(\sqrt{\frac{b}{\sqrt[8]{a}}}\right)^k,$$

или

$$T_{k+1}=C_{21}^k\, a^{\frac{21-k}{3}}\cdot b^{-\frac{1}{6}(21-k)}\cdot b^{\frac{k}{2}}\, a^{-\frac{1}{6}k},$$

или

$$T_{k+1}=C_{21}^k\, a^{\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}}\cdot b^{-\frac{1}{6}(21-k)+\frac{k}{2}}.$$

По условию задачи

$$\frac{21-k}{3}-\frac{k}{6}=-\frac{1}{6}(21-k)+\frac{k}{2}.$$

Отсюда $k=9$. Следовательно, искомым членом разложения будет 10-й.

370. $2^m=128$; отсюда $m=7$.

Далее воспользоваться формулой общего члена разложения.

371. $C_m^4 : C_m^2=2{,}5$. Отсюда $m=8$.

372. $$C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+4C_n^3+\ldots+(n+1)C_n^n=$$
$$=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n+C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n)=$$
$$=2^n+\left[n+2\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+n\right]=$$
$$=2^n+n\left[1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}+\ldots+1\right]=$$
$$=2^n+n\,(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1+C_{n-1}^2+\ldots+C_{n-1}^{n-1})=$$
$$=2^n+n\cdot 2^{n-1}=(n+2)\cdot 2^{n-1}.$$

373. Возьмем тождество $(1+x)^n\cdot(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ и запишем его в преобразованном виде:

$$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)\,(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n)=$$
$$=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+C_{2n}^2x^2+\ldots+C_{2n}^nx^n+\ldots+C_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

В левой части этого тождества после раскрытия скобок коэффициент при x^n будет равен

$$C_n^0C_n^n+C_n^2C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\ldots+C_n^nC_n^0,$$

или

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2,$$

так как

$$C_n^{n-k}=C_n^k.$$

В правой же части тождества коэффициент при x^n равен C_{2n}^n. Но коэффициенты при x^n в левой и правой части тождества должны быть одинаковыми.

Поэтому

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n.$$

374. Судить о делимости многочлена на x^k легче, чем судить о делимости на $(x-a)^k$. Чтобы воспользоваться этим преимуществом, введем новую переменную y, положив $x=1+y$.

Теперь достаточно будет доказать, что многочлен $(1+y)^{2n}-n(1+y)^{n+1}+$ $+n(1+y)^{n-1}-1$ делится на y^3.

Преобразуем этот многочлен, применяя формулу бинома Ньютона:

$$1+2ny+\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}y^2+C_{2n}^3y^3+\ldots+C_{2n}^{2n}y^{2n}-$$
$$-n\left[1+(n+1)y+\frac{(n+1)n}{1\cdot 2}y^2+C_{n+1}^3y^3+\ldots+C_{n+1}^{n+1}y^{n+1}\right]+$$
$$+n\left[1+(n-1)y+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}y^2+C_{n-1}^3y^3+\ldots+C_{n-1}^{n-1}y^{n-1}\right]-1.$$

После приведения подобных членов останутся только члены, содержащие переменную y в степенях не ниже третьей. Действительно,

$$1-n+n-1=0;$$
$$2n-n(n+1)+n(n-1)=0;$$
$$2n(2n-1)-n^2(n+1)+n(n-1)(n-2)=0.$$

Итак, многочлен $(1+y)^{2n}-n(1+y)^{n+1}+n(1+y)^{n-1}-1$ делится на y^3. Следовательно, многочлен $x^{2n}-nx^{n+2}+nx^{n-1}-1$ делится на $(x-1)^3$.

375. $\frac{1}{4}$. **376.** $\frac{1}{2}$. **377.** $\frac{1}{2}$. **378.** $\frac{m}{m+n}$. **379.** $\frac{1}{12}$.

380. Если представить себе, что все шары пронумерованы, то различных исходов будет C_7^2. Таких же исходов, при которых оба шара окажутся белыми C_3^2. Поэтому искомая вероятность будет равна $\frac{C_3^2}{C_7^2}$, т. е. равна $\frac{1}{7}$.

381. $\frac{C_5^2}{C_{25}^2}$, т. е. $\frac{1}{30}$ (см. задачу 380).

382. Всех равновозможных, единственно возможных и несовместных исходов будет 8: ННН, ННГ, НГН, НГГ, ГНН, ГНГ, ГГН, ГГГ. (Н — надпись, Г — герб.)

Исходов, благоприятствующих появлению трех надписей, лишь один. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{1}{8}$.

383. $\frac{1}{4}$ (см. задачу 382).

384. Всех равновозможных, единственно возможных и несовместных исходов будет 6^3, т. е. 216. Благоприятствующими случаями будут:

115,	214,	313,	412,	511,
124,	223,	322,	421,	
133,	232,	331,		
142,	241,			
151.				

Их число равно 15. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{15}{216}$, т. е. $\frac{5}{72}$.

385. Всех исходов 4: БГ, БН, ЧГ, ЧН (Б — белый, Ч — черный, Н — надпись). Благоприятствующих три случая. Искомая вероятность равна $\frac{3}{4}$.

386. $\frac{C_m^2}{C_{m+n}^2}$ (см. задачу 380).

387. Число всех исходов равно C_{21}^2. Число благоприятствующих случаев равно $2\cdot 3$. (Если на белых шарах поставить номера 1 и 2, а на красных 3, 4, 5, то благоприятными будут случаи

13,	14,	15,
23,	24,	25.)

Искомая вероятность $\frac{1}{35}$.

388. $\frac{lm}{C_{l+m+n}^2}$ (см. задачу 387).

389. Всех исходов C_{100}^2. Благоприятствующих случаев $4\cdot 96+C_4^2$. Искомая вероятность $\frac{13}{165}$.

390. 0,85. 391. $\frac{1}{3}$. 392. $\frac{13}{18}$. 393. $1-\frac{1}{8}$, т. е. $\frac{7}{8}$ (см. задачу 382).

394. $1-\frac{C_{96}^{10}}{C_{100}^{10}}\approx 1-0{,}63=0{,}37$. 395. $0{,}95\cdot 0{,}90\cdot 0{,}95\approx 0{,}73$.

396. Вероятность того, что самолет не будет сбит при одном выстреле, равна $1-0{,}004$, т. е. 0,996.

По теореме умножения независимых событий вероятность того, что самолет не будет сбит при 250 выстрелах, равна $(0{,}996)^{250}$. Вероятность же, что он будет сбит, равна $1-(0{,}996)^{250}\approx 0{,}63$.

397. Вероятность того, что все выстрелы попадут в цель, равна $(0{,}8)^5$. Вероятность того, что при 5 выстрелах будет хотя бы один промах, равна $1-(0{,}8)^5\approx 0{,}67$.

398. $\left(\frac{51}{52}\right)^{100}\approx 0{,}144$. 399. $1-\left(\frac{51}{52}\right)^{100}\approx 1-0{,}144=0{,}856$.

400. $\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}$. 401. $\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}$. 402. $\frac{92}{100}\cdot\frac{72}{100}\approx 0{,}66$.

403. $\frac{4}{11}\cdot\frac{7}{10}\approx 0{,}25$. 404. $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{120}$. (Применяется теорема умножения зависимых событий.)

405. $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{210}$ (см. задачу 404). 406. $P=\frac{l}{L}$.

407. $P=\frac{r^2}{R^2}$.

408. $P=\frac{2a-2r}{2a}=\frac{a-r}{a}$. 409. $P=\frac{\text{Пл. } q}{\text{Пл. } G}=\frac{(a-2r)^2}{a^2}$. 410. $P=\frac{6-2}{6}=\frac{2}{3}$.

411. $P=\frac{\text{Пл. } q}{\text{Пл. } G}=\frac{\pi\cdot 10^2-\pi\cdot 5^2}{\pi\cdot 10^2}=\frac{3}{4}$.

412. а) $P=\frac{\text{Пл. } q}{\text{Пл. } G}=\frac{(R\sqrt{2})^2}{\pi R^2}=\frac{2}{\pi}$. б) $P=\frac{\text{Пл. } q}{\text{Пл } G}=\frac{\frac{(R\sqrt{3})\cdot\sqrt{3}}{4}}{\pi R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

413. $P=\frac{\text{Пл. } q}{\text{Пл. } G}=\frac{0{,}5\pi R^2}{\pi R^2}=\frac{1}{2}$.

414. Обозначим моменты поступления сигналов x и y. Тогда $0\leqslant x\leqslant T$ $0\leqslant y\leqslant T$.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему координат. В этой системе указанным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки квадрата с вершинами (0; 0), (0; T), (T; 0) и (T; T). Сигнализатор сработает, если при $y>x$ будет $y<x+t$, а при $y<x$ будет $y>x-t$.

Приняв во внимание отрезки прямых $y=x+t$ и $y=x-t$, расположенных внутри указанного выше квадрата, получим:

$$P=\frac{\text{Пл. } q}{\text{Пл. } G}=\frac{T^2-2\cdot\frac{(T-t)^2}{2}}{T^2}=\frac{t(2T-t)}{T^2}.$$

415. По условию задачи
$$0 \leqslant x \leqslant l, \; 0 \leqslant y \leqslant l.$$
Этим неравенствам удовлетворяют координаты любой точки квадрата с вершинами (0; 0), (0;l) и (l; l).

Благоприятными значениями x и y будут:

при $y > x$ значения, удовлетворяющие неравенству $y < x + \frac{l}{2}$, а при $y < x$ значения $y > x - \frac{l}{2}$.

Приняв во внимание отрезки прямых
$$y = x + \frac{l}{2} \text{ и } y = x - \frac{l}{2},$$
расположенные внутри указанного выше квадрата, получим:
$$P = \frac{\text{Пл. } q}{\text{Пл. } G} = \frac{l^2 - 2 \cdot \frac{l^2}{8}}{l^2} = \frac{3}{4}.$$

420. Было доказано (см. стр. 693), что $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2{,}75$ при всяком натуральном значении n. Следовательно, при всяком значении n, большем или равном 3, будет справедливым неравенство $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < n$, или $\frac{(n+1)^n}{n^n} < n$, или $(n+1)^n < n^{n+1}$, или $\sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n} < \sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}}$, или $\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$.

Итак, при $n \geqslant 3$ имеем: $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$, т. е. $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \sqrt[6]{6} \ldots$

Теперь сравним $\sqrt[3]{3}$ с $\sqrt{2}$:
$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}; \qquad \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}.$$
Отсюда видно, что $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

Следовательно, выражение $\sqrt[n]{n}$ имеет наибольшее значение при $n = 3$, равное $\sqrt[3]{3}$.

421. $\log_e i$ мы рассматриваем в области комплексных чисел. Поэтому и $\log_e 1$ мы обязаны рассматривать также в области комплексных чисел, т. е. считать, что $\log_e 1 = 2k\pi i$.

В области комплексных чисел
$$4 \log_e i = 4\left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi\right) i = (2\pi + 8l\pi)\, i = (1 + 4l)\, 2\pi i.$$

В формуле $\log_e 1 = 2k\pi i$ буква k обозначает любое целое число.

Взяв $k = 1 + 4l$, получим для $\log_e 1$ значение $(1 + 4l)\, 2\pi i$, равное значению выражения $4 \log_e i$.

Нелепый результат $4\log_e i = 0$ мы получили потому, что вместо равенства $\log_e 1 = 2k\pi i$ взяли равенство $\log_e 1 = 0$.

422. а) $-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$; б) $\frac{1}{(x+1)^2}$; в) $100(1+x^2)^{99} \cdot 2x$;

г) $3\sin^2 x \cos x$; д) $3^{\sin x} \ln 3 \cdot \cos x$; е) $l^{x^2} \cdot 2x$;

ж) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; з) $(1+x)\,e^x$; и) $-\operatorname{tg} x$;

к) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$ при условии, что $0 < x < 1$.

423. Обозначим радиус основания цилиндра x, а высоту буквой y. Тогда полная поверхность определится формулой

$$S = 2\pi xy + 2\pi x^2. \tag{1}$$

Но по условию задачи $\pi x^2 y = v$.

Отсюда $y = \frac{v}{\pi x^2}$. Подставляя последнее выражение вместо буквы y в формулу (1), получим:

$$S = 2\pi x \frac{v}{\pi x^2} + 2\pi x^2, \text{ или } S = \frac{2v}{x} + 2\pi x^2.$$

Теперь остается исследовать эту функцию на максимум и минимум, считая v постоянным.

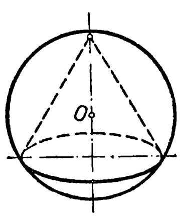


Рис. 237.

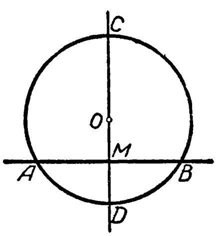


Рис. 238. Сечение шара плоскостью, проходящей через ось конуса.

425. Обозначим высоту конуса буквой x, а радиус основания буквой y (рис. 237). Тогда объем конуса определится формулой

$$v = \frac{1}{3}\pi y^2 x. \tag{1}$$

Но по свойству пересекающихся хорд окружности $(AM \cdot MB = CM \cdot MD)$ (рис. 238), т. е.

$$y^2 = x(2R - x).$$

Подставляя это выражение в формулу (1) вместо y^2, получим:

$$v = \frac{\pi}{3}(2R - x)\,x^2, \text{ или } v = \frac{2\pi}{3}Rx^2 - \frac{\pi}{3}x^3.$$

Остается исследовать эту функцию на максимум и минимум, считая R постоянным.

426. Обозначим длину рычага буквой x, а величину уравновешивающей силы буквой F (рис. 239). Тогда момент силы F будет равен $F \cdot x$, момент груза $P \cdot a$, а момент самого рычага $qx \cdot \frac{x}{2}$.

По закону механики

$$F \cdot x = P \cdot a + \frac{qx^2}{2}. \text{ Отсюда } F = \frac{P \cdot a}{x} + \frac{qx}{2}.$$

Остается исследовать эту функцию на максимум и минимум, считая P, a и q постоянными.

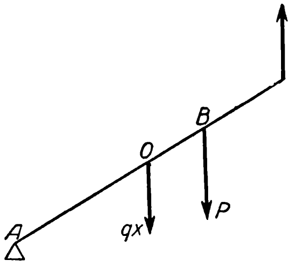


Рис. 239. O — середина рычага; qx — вес рычага.

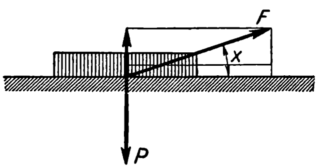


Рис. 240.

427. Величину приложенной силы обозначим буквой F, а угол, составленный направлением этой силы с горизонтом, буквой x (рис. 240).

Разложим силу F на две составляющие: горизонтальную и вертикальную.

Вертикальная сила будет равна $F \sin x$, а горизонтальная $F \cos x$.

Благодаря действию вертикальной составляющей, давление груза на плоскость станет равным $P - F \sin x$.

По закону механики произведение этого давления на коэффициент трения должно равняться горизонтальной составляющей. Поэтому

$$(P - F \sin x)\mu = F \cos x. \text{ Отсюда } F = \frac{P \cdot \mu}{\cos x + \mu \sin x},$$

где P и μ — постоянные.

$$F' = \frac{P\mu(-\sin x + \mu \cos x)}{(\cos x + \mu \sin x)^2}.$$

Потребовав, чтобы производная F' обратилась в нуль, получим: $-\sin x + \mu \cos x = 0$. Отсюда $\operatorname{tg} x = \mu$. При $\mu = 0{,}25$ найдем, что $x = 13{,}5°$.

О РЕШЕНИЯХ ВОСЬМИ ЗАДАЧ, ПОМЕЩЕННЫХ В РАЗДЕЛЕ «УЧАЩИМСЯ О МАТЕМАТИКЕ»

Задача 1. См. А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, ГТТИ, 1957, стр. 160 и 167.

Задача 2. См. В. Зимин, О наименьшем круге, вмещающем данную систему точек на плоскости. Отдельный оттиск журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики», Одесса, 1901.

Задача 3. См. «Популярные лекции по математике». Н. Е. Натансон, Простейшие задачи на максимум и минимум, ГТТИ, стр. 28.

Задача 4. См. А. Ф. Бермант и Л. А. Люстерник, Тригонометрия, ГТТИ, 1957, стр. 160.

Задача 5. См. Вебер и Вельштейн, Энциклопедия элементарной математики, т. II, § 96, Книгоиздательство «Матезис», Одесса.

Задача 6. См. А. Я. Хинчин, Три жемчужины теории чисел, гл. II, ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.

Задача 7. См. стр. 423.

Задача 8. См. Б. А. Кордемский, Н. В. Русалев, Удивительный квадрат, ГТТИ, 1952, стр. 47.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава XVII. Уравнения с числовыми коэффициентами, приводимые к квадратным

Глава XVIII. Иррациональные уравнения

Глава XIX. Функции и их графики

Глава XX. **Алгебраический и графический способы решения системы уравнений выше первой степени**

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Глава XXI. **Неравенства**

Глава XXII. **Пределы**

Глава XXIII. **Последовательности**

Глава XXIV. **Ряды сходящиеся и расходящиеся**

Глава XXV. **Обобщенная степень, показательная функция и показательные уравнения**

Глава XXVI. Логарифмы

Глава XXVII. Тригонометрические функции произвольного угла и первые три группы основных формул

Глава XXVIII. Последующие группы основных тригонометрических формул

Глава XXIX. Обратные тригонометрические функции

Глава XXX. Комплексные числа

Глава XXXI. Умножение и деление расположенных многочленов

Глава XXXII. Теорема Безу и ее применения

Глава XXXIII. Теорема Гаусса и свойства целой рациональной функции

Глава XXXIV. Уравнения высших степеней с одним неизвестным

Глава XXXV. Некоторые системы уравнений высших степеней, решаемые искусственным путем 631

Глава XXXVI. Математическая индукция

Глава XXXVII. Соединения (комбинаторика)

Глава XXXVIII. Бином Ньютона

Глава XXXIX. Начальные сведения из теории вероятностей

Глава XL. Число *e* и его простейшие применения

Глава XLI. Производная, ее простейшие применения и понятие дифференциала

Глава XLII. Интеграл

Глава XLIII. Некоторые понятия и предложения элементарной теории множеств

Савелий Иванович Туманов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ АЛГЕБРА

Редактор *Э. К. Викулина.* Художественный редактор *В. С. Эрденко*
Технический редактор *Н. Ф. Макарова.* Корректор *Т. А. Кузнецова*

Сдано в набор 19/X 1967 г. Подписано к печати 25/IX 1970 г. 60×90 1/16. Бум. типогр. № 2. Печ. л. 54. Уч.-изд. л. 43,66. Тираж 150 тыс. экз. (Пл. 1970 г.) А08685.

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26. Заказ № 703.

Цена без переплета 1 р. 18 коп., переплет № 7 18 коп., переплет № 5 10 коп.

1 р. 28 к.